This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Math 3158.78

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM THE
FARRAR FUND

The bequest of Mrs. Eliza Farrar in memory of her husband, John Farrar, Hollis Professor of Mathematics, Astronomy and Natural Philosophy, 1807–1836

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION GRAPHIQUE

ET SES

APPLICATIONS

DÉVELOPPEMENT DES THÈSES PRÉSENTÉES AU CONCOURS UNIVERSITAIRE DE 1873-1874

PAR

M. J. MASSAU

SOUS-INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES

LIVRE I

EXTRAIT

DES

ANNALES DE L'ASSOCIATION DES INGÉNIEURS SORTIS DES ÉCOLES SPÉCIALES DE GAND

BRUXELLES
IMPRIMERIE FÉLIX CALLEWAERT PÈRE
RUE DE L'INDUSTRIE, 26

1878

Math 3158.78
~~3008.78.4~~

HARVARD COLLEGE
OCT 16 1911
LIBRARY.
Farrar fund

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION GRAPHIQUE

ET SES

APPLICATIONS

DÉVELOPPEMENT DES THÈSES PRÉSENTÉES AU CONCOURS UNIVERSITAIRE DE 1873-1874

PAR

M. J. MASSAU

SOUS-INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES

(Planches I et II)

INTRODUCTION

L'objet de ce mémoire est d'exposer une méthode générale ayant pour but de remplacer les calculs de l'ingénieur par des opérations graphiques. Les tracés que nous proposons reposent sur une construction fondamentale que nous avons appelée *intégration graphique* et qui consiste à construire la courbe $y = \int fx\,dx$, connaissant la courbe $y = fx$; le livre premier de notre travail est consacré à l'étude de ce problème.

Dans le livre II nous montrons que l'on peut, par intégrations successives, construire un grand nombre de courbes, notamment les paraboles et les hyperboles de divers degrés. Remarquant ensuite que la ligne intégrale première donne les surfaces engendrées par les ordonnées de la ligne primitive, nous démontrons que l'intégrale seconde donne les moments sta-

tiques de ces mêmes surfaces et par suite leurs centres de gravité, que plus généralement les moments de degré n sont donnés par la ligne intégrale d'ordre $n+1$. On déduit de ces considérations, que les efforts tranchants et les moments fléchissants d'une poutre droite s'obtiennent respectivement par une simple et une double intégration.

Dans les livres suivants, nous abordons des questions qui se rapportent plus spécialement à la science de l'ingénieur ; ainsi dans le livre III nous donnons le moyen d'effectuer graphiquement les calculs d'un projet de route ; dans le livre IV nous résolvons les problèmes relatifs à la stabilité des constructions en maçonnerie ; dans le livre V nous nous occupons de la stabilité des poutres diverses ; enfin, dans le livre VI nous traitons quelques questions d'hydraulique ; nous montrons que l'intégration graphique peut s'étendre aux équations différentielles de la forme

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = o$$

et nous en déduisons l'étude des axes hydrauliques dans les cours d'eau non prismatiques.

LIVRE PREMIER

Méthodes générales d'intégration graphique.

CHAPITRE PREMIER

Généralités.

§ 1er. — Notions préliminaires.

1. *Représentation graphique des quantités.* — On représente les quantités de quelque nature qu'elles

soient par des lignes proportionnelles ; soient X, X', X'' des nombres de même nature, a la longueur qui représente l'unité ; les longueurs qui représentent les nombres X, X', X'' sont données par les équations $x = Xa$, $x' = X'a$, $x'' = X''a$. Si a est exprimé en millimètres, x, x', x'' seront donnés également en millimètres. Lorsque a n'est pas exprimé par un nombre simple, cette méthode conduit à des multiplications fréquentes et pénibles que l'on peut éviter au moyen d'une échelle.

2. *Représentation graphique d'une fonction.* — Pour représenter une fonction $Y = fX$, on choisit deux axes coordonnés, on porte à des échelles convenables (différentes ou non) X en abscisses, Y en ordonnées ; la courbe que l'on obtient est la représentation graphique de la fonction. Réciproquement $Y = fX$ est l'équation de la courbe. Toutefois cette équation n'est pas homogène et il est utile de la transformer.

3. Soient a, b les longueurs des unités des échelles des X et des Y ; les coordonnées x, y d'un point quelconque de la courbe seront données par les formules $x = Xa$, $y = Yb$, d'où l'on tire

$$X = \frac{x}{a}, \quad Y = \frac{y}{b};$$

l'équation $Y = fX$ devient

$$\frac{y}{b} = f\frac{x}{a}$$

qui est l'équation homogène de la courbe.

Plus généralement soit une relation $f(X, Y, Z) = o$ entre des quantités X, Y, Z de natures différentes dont nous représentons les unités par a, b, c ; en rendant cette relation homogène, elle devient

$$f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) = o.$$

4. *Intégration graphique.* — Dans ce qui va suivre, nous représenterons toujours les fonctions par des courbes; quand nous dirons donner ou trouver une fonction, cela voudra dire donner ou trouver graphiquement la courbe qui la représente. Cela étant et en vue de ramener toutes les constructions à un même tracé, nous choisissons comme opération fondamentale, l'opération qui consiste à trouver l'intégrale d'une fonction donnée : c'est à cette opération que nous avons donné le nom d'*intégration graphique*. La courbe donnée sera appelée *courbe primitive*, nous appellerons *courbe intégrale* la courbe qui représente la fonction intégrale et nous aurons souvent à considérer des courbes intégrales premières, secondes, etc., si l'on effectue plusieurs intégrations graphiques successives. Réciproquement une courbe pourra donner lieu à des courbes dérivées de divers ordres.

5. *Formules fondamentales.* — Soit $Y = fX$ la fonction donnée, Z l'intégrale de cette fonction ; on a l'équation $dZ = YdX$ et en la rendant homogène par la méthode n° 3, on trouve :

$$d\frac{z}{c} = \frac{y}{b}\,d\frac{x}{a} \text{ ou bien } dz = \frac{ydx}{\frac{ab}{c}};$$

d'où en posant

$$\lambda = \frac{ab}{c} \quad (1)$$

on déduit :

$$dz = \frac{ydx}{\lambda} \quad (2)$$

En intégrant cette dernière entre les limites x et $x + \Delta x$, on obtient :

$$\Delta z = \int_x^{x+\Delta x} \frac{ydx}{\lambda} \quad (3).$$

Cette équation (3) peut subir une transformation qui sera très-utile dans ce qui va suivre. Soient AB (fig. 1) la courbe primitive, A et B les points dont les abscisses sont x et $x + \Delta x$. En supposant les axes rectangulaires, ydx sera la surface d'un élément $MM'm'm$ et

$$\int_x^{x+\Delta x} ydx$$

sera la surface du trapèze curviligne $ABba$. Traçons $\alpha\beta$, parallèlement à l'axe des x, de façon que le rectangle $\alpha\beta ba$ ait même surface que le trapèze curviligne $ABba$ et soit y_m l'ordonnée commune des points de la droite $\alpha\beta$: c'est ce que nous appellerons *l'ordonnée moyenne* de l'arc AB En exprimant l'égalité des surfaces $\alpha\beta ba$ et $ABba$, on a :

$$y_m \Delta x = \int_x^{x+\Delta x} ydx$$

En portant cette valeur de

$$\int_x^{x+\Delta x} ydx$$

dans l'équation (3), on obtient :

$$\Delta z = \frac{y_m \Delta x}{\lambda} \quad (4)$$

6. *Remarques.* — 1° Cette transformation suppose les axes coordonnés rectangulaires ; mais il est facile de l'étendre au cas de deux axes faisant entre eux un angle quelconque ω.

Il sera toujours possible, en effet, d'imaginer un parallélogramme $\alpha\beta ab$ (fig. 2), équivalent au trapèze

curviligne $AB\ ba$; y_m l'ordonnée de $\alpha\ \beta$ sera encore l'ordonnée moyenne. L'équation qui exprime l'égalité des surfaces $AB\ ba$, et $\alpha\ \beta\ ba$ est :

$$y_m \Delta x \sin \omega = \int_x^{x+\Delta x} y\, dx \sin \omega$$

d'où comme précédemment on tire :

$$y_m \Delta x = \int_x^{x+\Delta x} y\, dx$$

2° De l'équation

$$\Delta z = \int_x^{x+\Delta x} \frac{y\, dx}{\lambda},$$

il résulte que l'on peut dire que la courbe intégrale est engendrée par un point se déplaçant sur l'ordonnée de la courbe primitive, ou sur son prolongement de quantités proportionnelles à la surface engendrée par cette ordonnée.

3° L'équation

$$\Delta z\ \lambda = \int_x^{x+\Delta x} y\, dx$$

montre que Δz est la dimension variable d'un rectangle ou parallélogramme, dont l'autre dimension est constante et égale à λ et dont la surface est équivalente à la surface engendrée par l'ordonnée de la courbe primitive. La longueur λ donnée par l'équation $\lambda = \frac{a\,b}{c}$ ne dépend que des échelles adoptées dans le tracé ; nous l'appellerons *base de l'intégration*.

§ 2. — Propriétés de la courbe intégrale.

7. *Propriété I.* — L'équation (2) peut se mettre sous la forme

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y}{\lambda};$$

soit AB (fig. 3) la courbe primitive, $A_1 B_1$ la courbe intégrale; dz et dx sont les accroissements $A_1 R'$ et RR' des coordonnées d'un point quelconque A_1 de la courbe intégrale qu'on suppose transporté en R sur la tangente.

Si nous portons $O'A'$ égal et parallèle à $A\,a$, OP égal à λ et parallèle à Ox; la relation

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y}{\lambda} \text{ ou bien } \frac{RR'}{A_1 R'} = \frac{O'A'}{PO'}$$

montre que les triangles $A_1 RR'$ et $O'PA'$ ont deux côtés parallèles et proportionnels; ils sont semblables et les troisièmes côtés $A_1 R$ et PA' sont parallèles. De là cette propriété : si on porte PO' égal à λ, parallèlement et dans le sens de l'axe de x, si à partir du point O' comme origine on porte différentes ordonnées de la courbe primitive sur un axe $o'y'$ parrallèle à oy, si on joint les extrémités de ces dernières au point P, on obtient les directions des tangentes à la courbe intégrale aux points correspondant aux ordonnées choisies. La figure que l'on obtient ainsi est le diagramme des directions des tangentes à l'intégrale; les rayons qui donnent ces directions émergent d'un point P qui est le pôle du diagramme; oy' est l'axe du diagramme, O' en est l'origine; les longueurs $O'A'$, $O'B'$,... sont les ordonnées du diagramme; enfin PA', PB'... sont les directions correspondant à ces ordonnées.

8. *Propriété II.* — L'équation (4) peut se mettre sous la forme

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{y_m}{\lambda}$$

En l'interprétant on trouvera la direction de la corde de l'intégrale de la même manière que l'équation (2) a donné la direction de la tangente.

Soient AB (fig. 4) la courbe primitive; $A_1 B_1$ la courbe intégrale ; soit $ab = A_1 b_1 = \Delta x$; on a $\Delta z = B_1 b_1$; portons $O' C'$ égal et parallèle à y_m ; la relation

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{y_m}{\lambda} \text{ ou } \frac{B_1 b_1}{A_1 b_1} = \frac{O'C'}{PO'}$$

montre que les triangles $A_1 B_1 b_1$ et $PC'O'$ ont deux côtés parallèles et proportionnels ; ils sont semblables et les troisièmes côtés $A_1 B_1$ et PC' sont parallèles. De là la propriété suivante : La direction de la corde d'un arc de l'intégrale est la direction du diagramme relative à l'ordonnée moyenne de l'arc de la courbe primitive qui correspond à l'arc de la courbe intégrale.

9. *Propriété III.* — Les tangentes aux extrémités d'un arc de la courbe intégrale se coupent en un point dont l'abscisse est l'abscisse moyenne de l'arc correspondant de la courbe primitive.

En effet, soient (fig. 5) $A_1 T$ et TB_1, les tangentes aux extrémités de l'arc $A_1 B_1$ de la courbe intégrale ; considérons la ligne brisée $A_1 TB_1$ comme une ligne intégrale, la courbe primitive qui y correspond est la ligne brisée $At't''B$, puisque la propriété du n° 7 donne pour la dérivée de $A_1 T$ une constante égale à Aa et pour la dérivée de TB, une constante égale à Bb. Or, les deux courbes intégrales $A_1 B_1$ et $A_1 TB_1$ ont une corde commune $A_1 B_1$, il faut donc que, dans les courbes primi-

tives, y_m soit le même, sinon la propriété II (n° 8) donnerait des cordes de directions différentes pour ces deux intégrales. Pour que y_m soit le même pour les deux courbes primitives AB et $At't''B$ il faut que surface $ABba$ = surface $At't''Bba A$; retranchons ces deux surfaces équivalentes de la même surface $Aa'b'Bba A$, il doit rester deux surfaces équivalentes, c'est-à-dire que : Surf. $a'ABb'$ = surf. $a't't''b'$. Ce qui prouve que $a't'$ ou l'abscisse du point T est l'abscisse moyenne de l'arc AB. C. Q. F. D.

10. Ces propriétés vont nous permettre d'aborder d'une manière générale le problème de l'intégration graphique ; la courbe intégrale ne peut évidemment se construire que par points ; nous allons donner deux méthodes ; l'une donne un polygone inscrit dans la courbe, l'autre un polygone circonscrit.

§ 3. — Méthodes générales.

11. *Méthode d'intégration par polygone inscrit à la courbe intégrale.* — Soit (fig. 6) $ABCD...$, la courbe primitive ; menons les ordonnées Aa, Bb, Cc,... à des distances égales ou inégales ; nous nous proposons de chercher les points de la courbe intégrale situés sur ces ordonnées, ou ce qui revient au même, de tracer le polygone inscrit dont ces points soient les sommets. Considérons les arcs AB, BC, CD... de la courbe primitive et par un moyen exact ou approché déterminons les ordonnées moyennes de ces arcs ; d'après la propriété II (n° 8), si nous portons ces ordonnées en $o'\alpha'$, $o'\beta'$, $o'\gamma'$, les droites $P_{\alpha'}$, $P_{\beta'}$, $P_{\gamma'}$... donneront les directions des cordes des arcs A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, de l'intégrale qui correspondent aux arcs AB, BC, CD... de la courbe primitive.

On sait que l'intégrale contient une constante arbitraire et n'est déterminée que lorsqu'on en connaît une valeur; la courbe intégrale ne pourra donc être tracée que si on en connaît un point; donnons-nous, par exemple, le point A_1, correspondant au point A, nous obtiendrons le polygone inscrit cherché en menant A_1B_1 parallèlement à P_α, B_1C_1 parallèlement à P_β', etc.

Si les ordonnées sont suffisamment rapprochées, les points $A_1, B_1, C_1 \ldots$ suffiront pour déterminer la courbe ; on pourra du reste par la propriété I (n° 7) mener la tangente en ces différents points.

12. *Remarque.* — Si on déplaçait le point A_1 en A_1', (fig. 6) ce qui revient à modifier la constante arbitraire, on obtiendrait une autre courbe intégrale $A_1'B_1'C_1'D_1' \ldots$

Les ordonnées de ces deux intégrales ne peuvent différer que par une constante. On en conclut que les différentes courbes intégrales d'une même courbe primitive sont indentiques de forme; connaissant l'une d'elles, il suffit de la faire glisser parallèlement à l'axe des ordonnées pour avoir toutes les autres.

Le transport d'une courbe est une opération assez compliquée; aussi nous opérerons toujours d'une autre manière ; au lieu de transporter la courbe, nous transporterons l'axe de x d'une quantité égale et de signe contraire, cela aura évidemment le même résultat, savoir augmenter ou diminuer les ordonnées d'une quantité constante.

13. *Méthode du polygone circonscrit.* Soit (fig. 7), $ABCD$, la courbe primitive Aa, Bb, Cc, des ordonnées à des distances égales ou inégales; déterminons par un moyen quelconque exact ou approché les abscisses moyennes α, β, j, des arcs AB, BC, CD. Soit A_1 le point donné de la courbe intégrale correspondant au point A ; en portant les ordonnées Aa, Bb, Cc, sur le diagramme, on trouve les directions PA', PB', PC', des tangentes à

la courbe intégrale aux points A_1, B_1, C_1, D_1, de cette dernière qui correspondent aux points A, B, C, D de la courbe primitive. Nous pourrons mener la tangente en A_1, en menant par le point A_1 qui est donné, une parallèle à PA'; la propriété III, n° 9, nous donne le point où la tangente en A_1 est coupée par la tangente en B_1; ce point α_1, étant déterminé, on peut mener la tangente en B_1 et passer successivement de la même manière aux différentes tangentes $\beta_1 j_1$, $j_1 \delta_1$, etc.

CHAPITRE II.

Détermination de l'ordonnée moyenne de différents arcs de courbe.

14. Nous avons vu n° 11 que l'intégration graphique par polygone inscrit à l'intégrale exige la connaissance des ordonnées moyennes des différents arcs dans lesquels on décompose la courbe primitive; nous allons examiner successivement comment on peut trouver graphiquement les ordonnées moyennes de droites et d'arcs paraboliques de divers degrés. Ces cas particuliers qui sont très-importants et se présentent très-souvent dans les calculs de l'ingénieur, sont les seuls que nous considérons; dans le cas d'un arc quelconque on pourra toujours l'assimiler au cas d'un arc de parabole de degré plus ou moins élevé, assimilation qui conduira à une construction approchée de l'ordonnée moyenne.

§ 1er. — Cas d'une ligne droite.

15. *L'ordonnée moyenne d'une ligne droite est l'ordonnée du milieu de la droite.*

En effet, soit (fig. 8) AB la droite donnée, E son

milieu; si par le point E on mène CD parallèlement à l'axe des x, le trapèze $ABba$ sera équivalent au rectangle (ou parallélogramme) $CDba$ d'après un théorème de géométrie élémentaire; donc Ee est l'ordonnée moyenne.

§ 2. — Arc parabolique du second degré.

16. On entend par paraboles du degré n les courbes qui ont pour équation $y = a + bx + cx^2 \ldots\ldots + lx^n$; la parabole du second degré a donc pour équation : $y = a + bx + cx^2$. Cette équation renfermant 3 coefficients, il faut 3 conditions pour déterminer un arc parabolique du second degré; nous examinerons successivement les deux cas suivants :

A. — L'arc parabolique est donné par 3 points dont les lignes d'ordonnée sont équidistantes, 2 de ces points étant les extrémités de l'arc.

B. — L'arc parabolique est donné par ses deux extrémités et la tangente en l'une d'elles.

A. — *Arc parabolique du second degré déterminé par 3 points dont les ordonnées sont équidistantes et dont deux sont les extrémités de l'arc.*

17. *Expression analytique de l'ordonnée moyenne.* Soit AB (fig. 9) l'arc parabolique du second degré; nous supposons que l'on donne les points extrêmes A, B, et le point intermédiaire C tel que les projections ou pieds d'ordonnées A', C', B' des points A, C, B, soient à égale distance. Soient : $y_0 = AA'$, $y_1 = CC'$, $y_2 = BB'$, $A'C' = C'B' = h$.

Prenons pour origine des coordonnées le point C', les points A, C, B auront respectivement pour coordonnées :

$$A. \begin{cases} x = -h \\ y = y_0 \end{cases} \qquad C \begin{cases} x = 0 \\ y = y_1 \end{cases} \qquad B. \begin{cases} x = +h \\ y = y_2 \end{cases}$$

en exprimant que ces coordonnées satisfont à l'équation $y = a + bx + cx^2$, on a 3 équations pour déterminer les coefficients a, b, c; on trouve

$$(1)\quad \begin{cases} y_0 = a - bh + ch^2 \\ y_1 = a \\ y_2 = a + bh + ch^2 \end{cases}$$

D'autre part, l'ordonnée moyenne cherchée y_ma pour valeur

$$y_m = \frac{\int_{-h}^{+h} y\,dx}{2h}$$

ou en effectuant l'intégration et la division par $2h$:

$$y_m = a + \frac{ch^2}{3} \quad (2)$$

Il s'agit de trouver a et c, au moyen des équations (1) de condition entre a et c; la seconde des équations (1) donne $a = y$; en ajoutant les deux autres, on trouve : $y_0 + y_2 = 2a + 2ch_2$, ou en remplaçant a par sa valeur $y_0 + y_2 = 2y_1 + ch^2$, d'où :

$$ch^2 = \frac{y_0 + y_2}{2} - y_1$$

Remplaçant, dans la valeur de y_m, a et ch^2 par leurs valeurs, il vient :

$$y_m = y_1 + \frac{1}{3}\left(\frac{y_0 + y_2}{2} - y_1\right)$$

en effectuant les calculs, on trouve :

$$y_m = \frac{y0 + 4y_1 + y_2}{3} \quad (3)$$

18. — *Construction graphique.* Pour construire graphiquement la valeur de y_m donnée par l'équa-

tion (3), considérons les points A, B, C (fig. 9) comme des points pesants ayant pour poids respectifs 1, 1, 4 ; je dis que le centre de gravité de ces 3 points aura pour ordonnée l'ordonnée moyenne cherchée. En effet, soit y' l'ordonnée de ce centre de gravité ; le poids total des 3 points est égal à $1 + 1 + 4 = 6$, son moment par rapport à l'axe des x est $6y'$; comme il doit être égal à la somme des moments des 3 poids, on a : $6y' = y_0 + 4y_1 + y_2$ d'où :

$$y' = \frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{6} = y_m$$

ce qu'il fallait démontrer. Le problème est donc ramené à chercher le centre de gravité des 3 poids A, B, C égaux respectivement à 1, 1, 4. Pour trouver ce centre de gravité, combinons d'abord les deux poids égaux A et B ; le poids résultant égal à 2 est appliqué au point I milieu de AB ; pour combiner ensuite le poids C avec le poids I, nous diviserons CI en parties inversement proportionnelles à 4 et à 2, ou encore à 2 et à 1 ; c'est-à-dire qu'en divisant CI en trois parties égales, le point de division E le plus près de C sera le point cherché. On a donc la construction graphique suivante : étant donné un arc parabolique du second degré ACB par ses deux extrémités A et B, et par un point intermédiaire C à égale distance des ordonnées extrêmes, l'ordonnée moyenne de cet arc s'obtient en divisant en 3 parties égales la droite CI qui joint le point C au milieu I de la corde AB, le point de division le plus rapproché du point C a pour ordonnée l'ordonnée moyenne cherchée.

B. — *Arc parabolique du second degré déterminé par ses deux extrémités et ses tangentes en ces extrémités.*

19. Soit AB (fig. 9) l'arc de parabole dont on connaît les

deux extrémités A et B et sa tangente au point A : connaissant la tangente au point A, on a immédiatement la tangente au point B, puisqu'on sait, qu'en vertu d'une propriété de la parabole, les deux tangentes en A et en B se coupent en un point T du diamètre conjugué à la corde AB. On sait aussi que $TC = CI$; on en conclut que IE qui est égal à $\frac{2}{3}CI$ ou $\frac{2CI}{3}$ est aussi égal à $\frac{IT}{3}$; le point E est donc le centre de gravité du triangle ATB. De là la construction suivante : étant donné un arc de parabole du second degré par ses deux extrémités AB et ses tangentes AT, BT en ces deux extrémités, l'ordonnée moyenne de cet arc de parabole est l'ordonnée du centre de gravité du triangle formé par ses deux tangentes et la corde AB de l'arc.

§ 3. — Arc parabolique du troisième degré.

20. La parabole du troisième degré a pour équation $y = a + bx + cx^2 + dx^3$; cette équation contient 4 coefficients ; il faut donc 4 conditions pour déterminer un arc parabolique du troisième degré.

Nous examinerons successivement les deux cas suivants :

A. — Le cas où l'arc est déterminé par 4 points dont les ordonnées soient équidistantes, deux des points étant les extrémités de l'arc.

B. — Le cas où l'arc est déterminé par ses deux extrémités et les tangentes en ces extrémités.

A. — *Arc parabolique du troisième degré déterminé par 4 points dont les ordonnées sont équidistantes et dont deux sont les extrémités de l'arc.*

21. *Expression analytique de l'ordonnée moyenne.* Soit l'arc $ABCD$ (fig. 10) donné par les 4 points A, B, C, D, tels que les ordonnées AA', BB', CC', DD', sont

équidistantes, c'est-à-dire que : $A'B' = B'C' = C'D'$. Prenons comme origine des coordonnées le point O milieu de $A'D'$; soient : $y_0 = AA'$, $y_1 = BB'$, $y_2 = CC'$, $y_3 = DD'$; soit $AO = OD' = h$, on en déduit $B'O = OC' = \frac{h}{3}$. L'ordonnée moyenne y_m est donnée par l'équation

$$y_m = \int_{-h}^{+h} y dx ;$$

on en déduit comme dans le paragraphe précédent :

$$y_m = a + \frac{ch^2}{3} \quad (1)$$

Les coefficients a et c se détermineront par les équations qui expriment que les points A, B, C, D se trouvent sur l'arc parabolique.

Les coordonnées des points A et D sont respectivement :

$$A. \begin{cases} x = -h \\ y = y_0 \end{cases} \qquad B. \begin{cases} x = +h \\ y = y_3 \end{cases}$$

en exprimant que ces coordonnées satisfont à l'équation de la parabole, on trouve :

$$y_0 = a - bh + ch^2 - dh^3$$
$$y_3 = a + bh + ch^2 + dh^3 ;$$

en ajoutant ces équations et en divisant par 2 il vient :

$$\frac{y_0 + y_3}{2} = a + ch^2 \quad (2)$$

En exprimant que les points B et C se trouvent sur l'arc parabolique, on trouve une équation semblable à l'équation (2) ; on peut la déduire de cette dernière en remplaçant y_0 et y_3 par y_1 et y_2, et h par $\frac{h}{3}$;

$$\text{on a donc : } \frac{y_1 + y_2}{2} = a + \frac{ch^2}{9} \quad (3)$$

Si, entre les équations (1) (2) (3), on élimine a et c, on trouve une relation d'où l'on déduit la valeur de y_m :

$$y_m = \frac{y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3}{8} \quad (4)$$

22. *Construction graphique de l'ordonnée moyenne.* Pour construire graphiquement la valeur de y_m donnée par l'équation (4), considérons les points A, B, C, D (fig. 10), comme des points pesants ayant pour poids respectifs 1, 3, 3, 1.

Le centre de gravité de ces poids aura précisément pour ordonnée, l'ordonnée moyenne cherchée, car si on appelle y' l'ordonnée de ce centre de gravité, en prenant l'axe des x comme axe des moments, le théorème des moments donne :

$$(1 + 3 + 3 + 1)\, y' = y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3$$

$$\text{d'où : } y' = \frac{y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3}{8} = y_m$$

Le problème est donc ramené à la recherche du centre de gravité des poids A, B, C, D. Pour y arriver combinons d'abord les deux poids égaux A, D en un poids égal à 2 appliqué en F milieu de AD ; combinons ensuite les deux poids B, C égaux à 3 en un poids unique égal à 6 appliqué en E milieu de BC. Il reste alors à combiner les poids 6 et 2 appliqués en E et en F ; pour cela, divisons FE par le point I en parties inversement proportionnelles à 6 et à 2 : le point I sera le centre de gravité cherché. Or, on a :

$$\frac{EI}{IF} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

d'où : $\frac{EI}{EI+IF \text{ ou } FE} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$; d'où : $EI = \frac{FE}{4}$

Le point *I* s'obtient donc en divisant *FE* en 4 parties égales : c'est le point de division le plus rapproché de *F*. De là la règle suivante : quand un arc parabolique du troisième degré est donné par 4 points *A*, *B*, *C*, *D* dont les ordonnées sont équidistantes, deux de ces points étant les extrémités de l'arc, l'ordonnée moyenne de cet arc s'obtient en divisant en 4 parties égales la droite qui joint les milieux des deux cordes *AD* et *BC* qui joignent, l'une les points extrêmes, l'autre les points intermédiaires; le point de division le plus rapproché de la courbe aura pour ordonnée l'ordonnée moyenne cherchée.

B. Arc parabolique déterminé par ses deux extrémités et les tangentes en ces deux points.

23. *Expression analytique de l'ordonnée moyenne.*

Soit l'arc *AB* (fig 11) donné par ses deux extrémités *A*, *B* et les tangentes *AK*, *BL* en ces extrémités. Soient $AA' = y_0$, $BB' = y_1$; soient aussi y'_0, y'_1 les dérivées de l'ordonnée de la courbe aux points *A* et *B;* prenons comme origine des coordonnées le point *O* milieu de *A'B'* et soit $A'O = OB' = h$; l'ordonnée moyenne de l'arc parabolique, dont l'équation est $y = a + bx + cx^2 + dx^3$, a pour valeur l'expression trouvée au littera précédent :

$$y_m = a + \frac{ch^2}{3} \qquad (1)$$

Les coefficients *a* et *c* satisfont à certaines équations qu'on obtient en exprimant que la courbe passe par les points *A*, *B* et qu'elle a en ces points y'_0 et y'_1 pour dérivées.

Les coordonnées des points A et B sont respectivement :

$$A \begin{cases} x = -h \\ y = y_0 \end{cases} \quad B \begin{cases} x = +h \\ y = y_1 \end{cases}$$

en exprimant que ces cordonnées satisfont à l'équation de la parabole du 3e degré, on trouve : $y_0 = a - bh + ch^2 - dh^3$, $y_1 = a + bh + ch^2 + dh^3$, d'où en ajoutant et divisant par 2,

$$\frac{y_0 + y_1}{2} = a + ch^2 \quad (2)$$

La dérivée de y a pour valeur générale $y = b + 2cx + 3dx^2$; en exprimant que pour $x = +h$ et $x = -h$ on a respectivement $y' = y'_0$, $y' = y'_1$ on trouve :

$$\begin{aligned} y'_0 &= b - 2ch + 3dh^2 \\ y'^1 &= b + 2ch + 3dh^2 \end{aligned}$$

soustrayant la première équation de la seconde, il vient : $y'_1 - y'_0 = 4ch$ (3),

Si on élimine a et c entre les équations (1) (2) (3) on trouve une relation d'où l'on tire :

$$y_m = \frac{y' - \frac{y'_1 h}{3} + y_0 + \frac{y'_0 h}{3}}{2} \quad (4)$$

24. *Construction graphique de l'ordonnée moyenne.*

Si nous portons (fig. 11),

$$A'D' = \frac{h}{3} \text{ et } B'E' = \frac{h}{3}$$

les points D et E auront respectivement pour ordonnées

$$DD' = y_0 + \frac{y'_0 h}{3} \text{ et } EE' = y_1 - \frac{y'_1 h}{3}$$

La valeur de y_m de l'équation (4) peut donc s'écrire :

$$y_m = \frac{DD' + EE'}{2}$$

et par conséquent y_m est l'ordonnée du point milieu I de DE. De là la règle suivante : Lorsqu'un arc parabolique du 3e degré est défini par ses deux extrémités et les tangentes en ces extrémités, l'ordonnée moyenne de cet arc est l'ordonnée du milieu de la droite qui joint les deux points de ces tangentes situés entre les ordonnées extrêmes et distants respectivement de chacune de ces dernières de la sixième partie de la distance qui les sépare.

25. *Autre construction graphique de l'ordonnée moyenne.*

Soient K et L (fig 11) les points où les tangentes AK et BL vont couper l'axe oy. D'après la construction précédente, l'ordonnée moyenne de l'arc AB est l'ordonnée du point I que nous pourrons considérer comme le centre de gravité de deux poids égaux appliqués aux points D et E; supposons ces poids égaux à 3; le poids 3 en D pourra se décomposer en deux poids appliqués en A et K; d'après la règle de la décomposition des forces parallèles, et en remarquant que

$$AD = \frac{DK}{2}$$

les poids A et K seront respectivement égaux à 2 et 1. De même le poids 3 en E pourra se décomposer en un poids 2 en B et un poids 1 en L. Les poids 1 en L et 1 en K donnent un poids résultant égal 2 appliqué en R milieu de LK. Finalement on a donc à combiner 3 poids égaux à 2 en A, B et R; le point I cherché est donc le centre de gravité du triangle ABR. De là la règle suivante : l'ordonnée moyenne d'un arc parabo-

lique du 3e degré défini par ses deux extrémités et les tangentes en ces extrémités est l'ordonnée du centre de gravité d'un triangle dont les 3 sommets sont : les deux extrémités de l'arc, et le milieu du segment intercepté par les tangentes extrêmes sur l'ordonnée située à égale distance de ces extrémités.

26. *Remarque.* — Cette dernière construction comprend comme cas particulier la construction donnée au n° 19 pour le cas d'un arc parabolique du second degré. Dans ce dernier cas, le segment *LK* est nul et le triangle *ABR* devient le triangle formé par la corde et les deux tangentes extrêmes.

§ 4. — Arc parabolique de degré supérieur au 3e.

27. Il serait possible de donner des règles graphiques pour trouver les ordonnées moyennes d'arcs paraboliques de degré supérieur au 3e ; seulement ces règles sont assez compliquées ; ainsi pour la parabole du 4e degré déterminée par 5 points dont les ordonnées $y_0\ y_1\ y_2\ y_3\ y_4$ sont équidistantes, on trouve que l'ordonnée moyenne de l'arc compris entre les ordonnées extrêmes $y_0\ y_4$ est donnée par la formule

$$y_m = \frac{7\,y_0 + 32\,y_1 + 12\,y_2 + 32\,y_3 + 7\,y_4}{90},$$

formule qui ne conduit pas à une construction simple. Pour cette raison, nous nous arrêterons ici à l'étude des paraboles ; nous n'aurons pas l'occasion, du reste, d'avoir besoin de l'intégration d'arcs paraboliques de degré supérieur au troisième.

CHAPITRE III.

Détermination de l'abscisse moyenne de différents arcs de courbe.

28. Nous avons vu n° 13 que l'intégration par polygone circonscrit à la courbe intégrale exige la connaissance des abscisses moyennes des différents arcs dans lesquels on décompose la courbe primitive. Nous allons nous occuper de la recherche de ces abscisses moyennes.

§ 1er. — Cas d'une ligne droite.

29. *L'abscisse moyenne d'une ligne droite est l'abscisse du milieu de cette droite.* — Cette proposition se démontre comme celle du n° 15.

§ 2. — Parabole rapportée a l'axe des y.

30. Nous entendons par là les paraboles qui ont pour équation $x = a + by + cy^2 + \ldots\ldots$; il est évident que l'on trouverait les abscisses moyennes d'un arc de l'une de ces courbes par les mêmes règles que celles qui ont été exposées n^{os} 16 à 27 pour trouver les ordonnées moyennes des arcs paraboliques rapportés à l'axe des x.

§ 3. — Relation entre l'abscisse moyenne et l'ordonnée moyenne.

31. *Connaissant l'ordonnée moyenne, on peut déterminer l'abscisse moyenne et réciproquement.*

Soit, en effet, l'arc AB (fig. 12), ab la projection de

cet arc sur l'axe des x ; portons l'ordonnée moyenne de l'arc AB en Cc sur l'ordonnée qui divise ab en deux parties égales ; par le point C menons $A'B'$ parallèlement à la droite AB.

La ligne $A'B'$ et l'arc AB ont même ordonnée moyenne Cc, on en conclut que surf. $A'B'ba$ = surf. $A\,m\,B\,ba$.

En retranchant de ces deux surfaces équivalentes la surface commune $AB\,ba$, il reste deux surfaces équivalentes, donc :

Surf. $A'B'BA$ = surf. $A\,m\,B$.

En remarquant que le parallélogramme $A'B'BA$ est équivalent au parallélogramme $A''B''BA$ comme ayant même base AB et même hauteur, on reconnaît qu'on a aussi surf. $A''B''BA$ = surf. $A\,m\,B$. En retranchant ces deux surfaces de la surface commune ${}_\beta BA_\alpha$ on trouve surf. ${}_\beta B\,m\,A_\alpha$ = surf. ${}_\beta B''A''_\alpha$. On en conclut que les lignes $A''B''$ et $A\,m\,B$ ont même abscisse moyenne, donc l'abscisse moyenne de l'arc $A\,m\,B$ est E_t. Nous reconnaissons ainsi la propriété suivante :

Si nous portons l'ordonnée moyenne d'un arc AB en Cc sur l'ordonnée située à égale distance des ordonnées extrêmes de l'arc, si semblablement nous portons l'abscisse moyenne en E_t sur l'abscisse située à égale distance des abscisses extrêmes de l'arc, les deux points E et C sont sur une parallèle à la corde de l'arc. Cette propriété permet de trouver l'abscisse moyenne connaissant l'ordonnée moyenne et réciproquement.

CHAPITRE IV.

Exemples d'intégration exacte.

32. Nous nous proposons d'examiner dans ce chapitre un certain nombre de cas où l'on peut trouver

l'intégrale exactement; nous nous occuperons successivement des cas où les arcs de la courbe primitive sont des droites et des arcs paraboliques; nous donnerons ensuite un exemple d'intégrations graphiques successives.

§ 1er. — Cas ou la ligne primitive est formée de lignes droites.

33. *Droite parallèle à l'axe des x.* Soit *AB* (fig. 13) la droite, parallèle à l'axe des x, qui constitue la ligne primitive. Le diagramme ne donne qu'une seule direction *PA'* pour toutes les cordes et tangentes de l'intégrale; cette dernière doit donc se réduire à une ligne droite parallèle à la droite *PA'*. Soit A_1 le point de l'intégrale qui tient lieu de la constante arbitraire; on obtiendra cette intégrale en menant par le point A_1 une droite A_1B_1 parallèle à *PA'*.

34. *Ligne formée de parallèles aux axes coordonnés,* soit (fig. 14) *ABCDEF....* la ligne primitive formée de droites parallèles aux axes coordonnés; d'après le numéro précédent, les intégrales de chacun des arcs *AB, CD, EF,* etc.... sont des droites dont les directions sont données par le diagramme en *PA', PC', PE',* etc...., soit A_1 le point donné de la courbe intégrale correspondant au point *A* de la courbe primitive; on obtiendra la ligne intégrale en menant successivement A_1C_1 parallèlement à *PA'* par le point A_1, C_1E_1 parallèlement à *PC'* par le point C_1, E_1F_1 parallèlement à *PE'* par le point E_1, etc....

35. *Ligne polygonale quelconque.* Soit (fig. 15) *ABCD....* la ligne polygonale constituant la courbe primitive: les ordonnées moyennes des côtés *AB, BC, CD...,* sont les ordonnées *Ii, Kk, Ll.....* du milieu de ces

droites ; en portant ces ordonnées en oI', oL', oK'.... sur l'axe du diagramme, on obtient en PI', PK', PL'.... les directions des cordes A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1.... de l'intégrale. Connaissant un point A_1 de la courbe intégrale, on peut mener A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, etc.... parallèlement à PI', PK', PL', etc.... et l'on obtient un polygone $A_1B_1C_1D_1$... inscrit dans l'intégrale. L'intégrale étant une courbe, puisque ses inclinaisons varient d'un point à un autre, on ne peut la construire que par points ; si les points A_1, B_1, C_1, D_1,... sont insuffisants, on en trouvera d'autres en divisant les côtés AB, BC, CD.... en plusieurs parties et en considérant chacune des parties comme un arc. Remarquons d'ailleurs que les arcs de l'intégrale sont des arcs de parabole, car la courbe primitive ayant une équation de la forme $y = ax + b$, l'intégrale aura pour équation

$$y_1 = \frac{ax^2}{2} + bx + c,$$

qui est l'équation d'une parabole du second degré. Si donc, au moyen du diagramme, on mène des tangentes aux extrémités de ces arcs de parabole, ces derniers seront complétement déterminés et pourront être tracés aussi exactement qu'on le désire.

36. ***Même cas. Autre construction.*** On peut employer la méthode du polygone circonscrit à l'intégrale. Reprenons la figure 15 ; les abscisses moyennes des droites AB, BC, CD.... sont les abscisses des milieux de la droite ; de là la construction suivante : menons des lignes d'ordonnées par les milieux i, k, l,.... des projections des arcs AB, BC..., portons les ordonnées Aa, Bb, Cc, Dd,... en oA', oB', oC'..., soit PA', PB' PC'... les directions correspondantes. En menant successivement A_1t parallèlement à PA, tr parallèlement à PB', etc... on obtient en A_1trs... le polygone circons-

crit à l'intégrale. Cette méthode a sur la précédente l'avantage de donner immédiatement les tangentes à l'intégrale ; les arcs de cette dernière sont alors complétement déterminés.

§ 2. — Autres cas.

37. On opérerait de la même manière pour toutes les courbes que l'on peut décomposer en arcs paraboliques du second ou du troisième degré ; nous croyons qu'il est inutile d'entrer dans de plus longs détails au sujet de ces cas, dont nous rencontrerons plus loin les plus importants.

38. On peut se proposer de construire graphiquement l'intégrale multiple d'une fonction représentée par une courbe ; on effectue alors plusieurs intégrations successives par les méthodes du paragraphe précédent, en se donnant de chacune des courbes intégrales un point tenant lieu de la constante arbitraire, soit (fig. 16) $A_0AB_0B\ldots$ une ligne formée de parallèles aux axes coordonnés ; nous obtiendrons par la méthode du n° 34, le polygone $A_1B_1C_1D_1$ pour première intégrale ; par la méthode du n° 36 nous obtiendrons la seconde intégrale, qui est formée d'arcs paraboliques définis par leurs extrémités $A_2, B_2, C_2D_2\ldots$ et leurs tangentes extrêmes. Le pôle P_1 se rapporte à la première intégration, le pôle P_2 à la seconde. Pour effectuer une troisième intégration, nous remarquerons que les ordonnées moyennes des arcs A_2B_2, $D_2C_2\ldots$ sont connues, puisque d'après le n° 19 ce sont les ordonnées des centres de gravité des triangles formés par les cordes des arcs et leurs tangentes extrêmes ; on obtient aisément le polygone $A_3B_3C_3B_3$ inscrit à l'intégrale troisième en portant ces ordonnées moyennes en $O'''A'''$, $O'''B'''$, etc.... sur un diagramme dont P_3 est le pôle ;

on a : A_3B_3 parallèle à A_3B''', BC_3, parallèle à A_3B''', etc...

Pour effectuer une quatrième intégration, il faut commencer par définir complétement les arcs de courbe A_3B_3, B_3C_3, etc... en menant au moyen du diagramme les tangentes en leurs extrémités; les ordonnées moyennes se trouveront alors par le procédé du n° 25, et on en déduirait aisément un polygone inscrit dans l'intégrale quatrième cherchée.

Nous n'avons pas indiqué cette quatrième intégration pour ne pas compliquer la figure.

CHAPITRE V.

Méthodes approchées d'intégration graphique.

39. Soit AD (fig. 17) une courbe primitive quelconque définie par différents points A, B, C, D; en général, il sera impossible d'en tracer exactement la courbe intégrale; mais en assimilant les arcs AB, BC, CD, aux arcs dont on peut trouver les ordonnées moyennes, nous allons rencontrer différents procédés d'intégration graphique approchée.

§ 1er. — Méthode d'assimilation a une ligne polygonale.

40. Si nous remplaçons les arcs AB, BC, CD,... par leurs cordes, on ramène la courbe à une ligne polygonale dont on a facilement l'intégrale. Cette méthode est la traduction graphique de la méthode dite des trapèzes pour le calcul des quadratures.

§ 2. — Méthode d'assimilation a une suite d'arcs paraboliques du second degré.

41. Assimilons les arcs AB, BC... (fig. 18), à des

arcs paraboliques du second degré ; pour que ces arcs soient déterminés, il est nécessaire d'en connaître les points intermédiaires I, K, L dont les ordonnées sont à égales distances des points extrêmes.

En appliquant la méthode du n° 18 pour trouver les ordonnées moyennes de ces arcs, on obtient facilement l'intégrale cherchée. Cette méthode est la traduction graphique de la méthode dite de Simpson.

§ 3. — Méthode d'assimilation a une suite d'arcs paraboliques de degré supérieur au second.

42. La méthode précédente, quoique plus exacte que la méthode par trapèze, a l'inconvénient de se prêter très-mal aux courbes présentant des points d'inflexion, car l'arc parabolique du second degré n'a jamais de semblable point. C'est pour cette raison qu'il est avantageux dans certains cas d'assimiler les arcs de la courbe primitive à des arcs paraboliques de degré supérieur au second. Nous pourrons, par exemple, choisir des arcs paraboliques du troisième degré ; en appliquant le procédé du n° 22 pour chercher l'ordonnée moyenne de ces arcs, on effectuera l'intégration aussi facilement que par la méthode du paragraphe précédent.

§ 4. — Méthode donnant une limite de l'erreur.

43. Il est très-utile quand on effectue une intégration graphique approchée de connaître quelle est l'approximation sur laquelle on peut compter.

On arrive à ce résultat en remplaçant la courbe donnée par deux autres lignes dont on puisse trouver les intégrations exactement et telle que l'une donne une intégrale trop grande M et l'autre une intégrale trop

petite m. Si on adopte M ou m comme valeur de l'intégrale demandée, on commettra une erreur plus petite que $M - m$; l'erreur sera positive si on choisit M, négative si on choisit m. Enfin on peut prendre, pour valeur de l'intégrale, la quantité

$$\frac{M+m}{2};$$

l'erreur sera réduite de moitié, mais on n'en connaîtra plus le sens. La méthode dite de Poncelet est fondée sur ce principe; en la traduisant graphiquement nous arriverons à un procédé d'intégration graphique approchée donnant une limite de l'erreur.

44. Soit (fig. 19) AI la courbe primitive donnée, proposons-nous d'en chercher l'intégrale entre les limites A et I; nous divisons sa projection sur l'axe des x en un nombre pair de parties égales, ab, bc, cd, etc. Nous supposons que la courbure de la courbe ne change pas de sens dans l'étendue considérée, et pour fixer les idées, nous supposerons la courbe concave vers l'axe des x. Nous obtiendrons une intégrale plus grande que l'intégrale cherchée en remplaçant la courbe $ABC\ldots I$ par ses tangentes aux points B, D, F, H; nous obtiendrons une intégrale plus petite en remplaçant la courbe par le polygone inscrit $ABDFHI$.

Considérons d'abord l'intégrale trop grande : pour la construire graphiquement, remarquons que les points B, D, F, H, donnent précisément les ordonnées moyennes des tangentes qui passent par ces points; de là la construction suivante (d'après la méthode du n° 12) : portons sur l'axe du diagramme $O'B' = Bb$, $O'D' = Dd$, $O'F' = Ff$, $O'H' = Hh$; soit P le pôle du diagramme; soient A_1C, parallèle à PB', C_1E_1 parallèle à PD', E_1G_1 parallèle à PF', G_1I parallèle à PH', la

ligne $A_1 C_1 E_1 G_1 I_1$ est l'intégrale du polygone des tangentes à la courbe donnée.

Considérons maintenant le polygone inscrit *ABDFHI* pour en avoir l'intégrale nous opérerons au moyen des abscisses moyennes (méthode du n° 13). Faisons abstraction pour le moment des droites *AB* et *HI*; si l'on prend le point *B*, sur $A_1 C_1$ comme premier point on trouve pour l'intégrale de *BDFH* le polygone déjà tracé $B_1 C_1 E_1 G_1 H_1$. Occupons-nous actuellement des lignes *AB* et *HI*. En ce qui concerne la droite *AB*, $B_1 A_1$ donne déjà l'une des tangentes à l'arc de l'intégrale; l'autre tangente dont la direction est *PA'* doit couper la première en un point *t* dont l'abscisse est l'abscisse moyenne de *AB*; ce point *t* est donc sur l'ordonnée située à égale distance des ordonnées *Bb* et *Aa*, ce qui détermine la tangente $_\alpha t$. On trouverait de même $H_1 r_\beta$ pour l'intégrale de la droite *HI*. En résumé, nous trouvons comme valeur trop grande $I_1 a'$, comme valeur trop petite $_\beta \alpha' = I_1 a' - ({}_\alpha' a' - I_1 {}_\beta)$. Si nous adoptons $I i$ où $_\beta \alpha'$ comme valeur de l'intégrale cherchée, l'erreur est plus petite que $I {}^\beta - Aa$. Si nous adoptons la moyenne de ces deux valeurs, c'est-à-dire la distance des milieux des segments $_\beta I$ et $_\alpha a'$, l'erreur sera plus

petite que $\frac{{}_\alpha' a' - I_\beta}{2}$

CHAPITRE VI.

Généralisations de l'intégration graphique.

§ 1er. — Transformations des axes.

45. *Transport des axes.* — Dans tout ce qui précède, nous avons toujours supposé que la courbe intégrale et

la courbe primitive étaient rapportées aux mêmes axes ; il est évident d'abord que tous les tracés s'appliquent également aux cas où les axes sans être identiques sont parallèles, puisque toutes les constructions précédentes reposent sur la direction des cordes et tangentes de l'intégrale, directions qui ne sont pas altérées en transportant les axes et la courbe intégrale parallèlement à eux-mêmes. Enfin si on fait tourner les axes de la courbe intégrale d'un certain angle soit solidairement, soit chacun séparément, il suffit pour que les propriétés des n^{os} 7, 8, 9, bases de tous les tracés, soient encore applicables, que l'on fasse subir au diagramme les mêmes mouvements. On pourrait, par exemple, renverser complétement l'axe des x et intégrer en marchant de droite vers gauche ; il suffit pour cela de renverser également la droite qui joint le pôle à l'origine du diagramme. Nous avons indiqué fig. 20 un exemple de cette inversion.

46. *Courbe primitive rapportée à une ligne courbe.*

Nous pourrons supposer que, sans cesser de compter les abscisses parallèlement à l'axe des x (fig. 21), les ordonnées y de la courbe primitive soient portées en Aa, Bb à partir d'une courbe ab servant de courbe de repère. Par la pensée, transportons suivant elles-mêmes les ordonnées Aa, Bb de façon que leurs pieds viennent sur l'axe des x; la fonction primitive sera représentée alors par la courbe $A''B''$ et on pourra y appliquer toutes les constructions des chapitres précédents. Soit, par exemple, à chercher la direction de la tangente au point de l'intégrale correspondant au point A ; on portera $o'A''' = A''a'$, PA''' sera la direction demandée ; comme on a $A''a' = Aa$, on voit qu'il est inutile de construire la courbe $A''B''$ et qu'il suffit de porter $A'''O' = Aa$ pour arriver au même but.

Enfin on peut encore simplifier la construction en

opérant de la manière suivante : menons PP' parallèlement à oy ; projetons le point a sur PP', le point A sur $o'y'$ par lignes parallèles à l'axe des x; l'examen de la figure montre immédiatement qu'en joignant ces deux projections, on obtient une ligne P_aA' parallèle à PA'' et que par conséquent P_aA' donne aussi la direction de la tangente à l'intégrale.

Des considérations du même genre sont applicables à la recherche de la direction d'une corde de l'intégrale. Soit à chercher la corde de l'intégrale correspondant à la corde AB de la courbe primitive (fig. 21); soient y' l'ordonnée d'un point quelconque de la courbe AB par rapport à ox, y'' l'ordonnée du point correspondant de la courbe ab par rapport au même axe ox, y l'ordonnée du même point de la courbe AB par rapport à la courbe ab ; on a $y = y' - y''$ et on en déduit aisément $y_m = y'_m - y''_m$; $y_m\ y'_m\ y''_m$ désignant les moyennes des ordonnées y, y', y'' entre les limites a' et b'.

Si la courbe $A''B''$ était construite, il suffirait pour avoir la direction de la corde cherchée, de porter l'ordonnée moyenne $M''\ m'$ de l'arc $A''\ B''$ en $O'M''$, $P'M''$ serait la direction cherchée ; or $M''\ m'$ qui est y_m est égal à $y'_m - y''_m$, c'est-à-dire à la différence Mm des ordonnées moyennes des arcs AB et ab. On obtiendra donc aussi la direction cherchée en projetant parallèlement à l'axe des x le point m sur PP' et le point M sur $o'y'$ en joignant les deux projections.

Il résulte de ces considérations que dans le cas où la courbe primitive est rapportée à une courbe de repère, la construction ordinaire du diagramme des inclinaisons des cordes et tangentes à l'intégrale subit la modification suivante : les rayons qui donnent les inclinaisons dont il s'agit au lieu d'émerger d'un pôle fixe, partent de points qui sont les projections, sur une parallèle à

l'axe du diagramme, des pieds, des ordonnées ou des ordonnées moyennes de la courbe primitive. La distance entre cette ligne des pôles et l'axe du diagramme mesurée suivant *ox* est la base d'intégration.

47. *Intégrale rapportée à une ligne courbe.* Soit (fig. 22) *AB* la courbe primitive rapportée à l'axe *ox*; nous supposons que la courbe intégrale soit rapportée à la courbe donnée *ab*.

Proposons-nous d'abord de chercher la direction de la tangente au point A_1 de la courbe intégrale correspondant au point *A* de la courbe primitive. Soient *z* l'ordonnée, comptée à partir de *ab*, d'un point quelconque A_1 de la courbe intégrale; *z'* l'ordonnée du même point par rapport à *ox*, *z''* l'ordonnée du point *a*; on a :

$$z' = z + z'' \text{ d'où } \frac{dz'}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dz''}{dx}$$

On a :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y}{\lambda}$$

et on peut écrire aussi :

$$\frac{dz''}{dx} = \frac{y''}{\lambda}$$

si on appelle *y''* l'ordonnée de la courbe dérivée de la courbe *ab*; il vient alors :

$$\frac{dz'}{dx} = \frac{y + y''}{\lambda}$$

c'est-à-dire, qu'on peut considérer *z'* comme l'intégrale de la somme de deux fonctions; de là on déduit la construction suivante : menons *PO'* parallèlement à la tangente en *a*, *oo'* sera égal à *y''*; portons $o'A'' = Aa'$, on aura $oA'' = y + y''$ et par conséquent *PA''* sera la direc-

tion cherchée. On peut aussi adopter la construction suivante : projetons $A\,a'$ en $o\,A'$ sur oy'; menons oP_a parallèlement à la tangente en a, P_aA' donnera aussi la direction cherchée. On trouverait de la même manière la direction de la corde à l'intégrale; oA' deviendrait l'ordonnée moyenne, oP_a une parallèle à la corde de ab.

48. *Cas particulier : la courbe de repère est une ligne droite.*

Dans ce cas la droite oP_a est invariable, c'est une parallèle à la courbe des repères; le pôle Pa est fixe. Il suit de là que dans une intégration graphique on peut prendre pour pôle un point quelconque, pourvu que la courbe intégrale soit rapportée à un axe parallèle à la droite qui joint le pôle à l'origine du diagramme. Cette conséquence résultait déjà du n° 45; mais il peut être utile de la faire remarquer à nouveau.

49. *Remarque.* — Lorsque l'on rapporte la courbe primitive ou la courbe intégrale à une courbe des repères, la propriété du n° 8, n'est plus applicable; on peut toutefois trouver graphiquement au moyen des abscisses moyennes de la courbe primitive et de la courbe de repère, le point d'intersection des tangentes aux extrémités d'un arc de l'intégrale; pour abréger, nous n'exposerons pas cette construction ici.

§ 2. — Modifications de la base d'intégration. Échelles.

50. Nous avons vu au n° 7, que le pôle du diagramme était distant de l'axe du diagramme, parallèlement à l'axe des x, d'une quantité λ appelée base d'intégration et donnée par la formule $\lambda = \frac{a\,b}{c}$, dans laquelle, a, b, c, désignent respectivement les lon-

gueurs qui représentent les unités de la variable, de la fonction et de l'intégrale.

Cette formule montre que la base d'intégration est proportionnelle aux échelles de la variable et de la fonction et inversement proprement proportionnelle à l'échelle de l'intégrale.

51. Si l'on prend $c = b$, la formule donne $\lambda = a$, c'est-à-dire, que les échelles de la fonction primitive et de l'intégrale sont les mêmes, qnand on prend pour base d'intégration l'unité d'abscisse a. Si $a = b = c = 1$, on a $\lambda = 1$; dans ce cas particulier la propriété du n° 7 devient une propriété connue.

Si l'on prend $c = nb$, la formule donne $\lambda \frac{a}{n}$, c'est-à-dire, que l'échelle de l'intégrale sera n fois plus grande que l'échelle de la fonction, si l'on prend pour base d'intégration une longueur n fois plus petite que l'unité d'abscisse a et réciproquement.

52. *Connaissant les unités* a, b, c, *trouver la base d'intégration.*

Si on opère au moyen du double décimètre, a, b, c, sont donnés, par exemple, en millimètres ; on calculera λ et on portera la longueur obtenue.

Si on opère au moyen d'échelles, on a alors sur le papier les longueurs a, b, c ; on trouve λ par la construction suivante : Soient (fig. 23) $AB = a$ parallèle à l'axe des x, $BC = b$ parallèle à l'axe des y, $BE = c$ dans la même direction ; joignons AE et menons CP parallèlement à AE ; PB sera la base d'intégration cherchée.

On a, en effet,

$$\frac{PB}{AB} = \frac{BC}{BE} \text{ d'où } PB = \frac{AB + BC}{BE} = \frac{ab}{c}$$

53. *Autre interprétation de la construction graphique.* Considérons la ligne DC, et cherchons-en l'intégrale passant par le point A ; au point B l'intégrale aura

pour valeur l'unité et sera représentée par $BE = c$. Or, si $PB = \lambda$, PC doit donner la direction de AE, le point P s'obtiendra donc en menant CP parallèlement à AE. Cette interprétation a l'avantage de permettre d'étendre la construction au cas où une ou plusieurs des quantités a, b, c deviennent trop petites ou trop grandes pour se prêter à une construction élégante. On prend alors des multiples ou des sous-multiples de a, b, c. Soient, par exemple, $AB = 25\,a$, $BC = 4\,b$, l'intégrale de CD sera $25 \times 4 = 100$; portons $BE = 100\,c$, on obtient λ comme précédemment.

54. *Choix de la base d'intégration.* A vue, on peut reconnaître assez facilement, d'après l'ordonnée moyenne de la partie de courbe à intégrer, quelle est la base d'intégration qu'il faut adopter pour que l'intégrale ne sorte pas des limites du dessin; au moyen de cette base λ, on peut calculer ou construire c par les opérations inverses de celles des numéros précédents.

Si on opère au moyen du double décimètre on calcule c par la formule

$$c = \frac{a\,b}{\lambda}$$

c sera en général un nombre compliqué; on prendra un nombre simple qui s'en rapproche. Ainsi soit $c = 222{,}3\ldots$ on prendra $c = 200$ et calculera λ. De cette facon l'intégrale sera tracée à une échelle très-simple.

Lorsqu'on opère au moyen d'échelles, on adopte définitivement la base d'intégration trouvée à vue comme nous l'avons indiqué précédemment; mais il s'agit alors de construire une échelle pour l'intégrale. On trouve c par le tracé graphique suivant (fig. 23) $AB = a$ $BC = b$ $BP = \lambda$, en menant AE parallèle à PC, on a $EA = c$. Il peut se faire que a, b, c soient des quantités trop petites

ou trop grandes ; alors on prend AB, BC égaux à des multiples ou sous-multiples simples de a et b. Ainsi, par exemple, si on prend :

$AB = 25\,a$, $BC = 4\,b$, on aura $BC = 100\,c$ et on construira aisément l'échelle de l'intégrale comme il est indiqué sur la fig. 23. BX est une échelle connue quelconque.

55. *Multiplier ou diviser l'intégrale par une constante.* Supposons que l'intégrale $z = \int Y\,dX$ soit représentée à l'échelle c; si on adopte une échelle

$$c' = \frac{c}{k}$$

pour mesurer les ordonnées de la courbe obtenue, il est évident que l'on obtiendra des nombres k fois plus grands; on aura par conséquent la fonction $z' = k\int Y dX$.

La formule

$$\lambda = \frac{ab}{c} \text{ devient } \lambda = \frac{ab}{kc'}$$

c'est au moyen de cette formule que l'on calculera λ si on se donne c', ou c' si on se donne λ.

Quand on opère au moyen d'échelles, il suffit de tenir compte du facteur k dans la valeur à attribuer à BE ; ainsi, si $AB = 25\,a$, $BC = 4\,b$,
on aura $BE = 100\,c = 100\,k\,c'$, d'où l'on déduira aisément l'échelle c' par la construction indiquée sur la fig. 24 où on a supposé $100\,k = 62$. BX est une échelle connue quelconque.

§ 3. — Transformations du diagramme.

56. *Déplacement du pôle.* — Nous avons déjà vu au n° 48 que l'on peut prendre pour pôle du diagramme un point quelconque, pourvu que l'on considère la

courbe intégrale comme rapportée à une droite parallèle à la ligne qui joint le pôle à l'origine du diagramme. Deux courbes intégrales d'une même courbe primitive obtenues avec deux pôles différents jouissent de la propriété remarquable suivante : les cordes et les tangentes correspondantes se coupent sur une même ligne droite parallèle aux deux pôles. Soient P, P' les deux pôles ; A_1B_1, $A_1B'_1$ les intégrales correspondantes ; menons la droite PP', et soit O'' le point où cette droite va couper l'axe du diagramme ; considérons la courbe primitive AB comme rapportée à l'axe $O''O_1$; les deux courbes A_1B_1 et $A_1B'_1$ seront deux intégrales de cette nouvelle fonction, si on rapporte ces courbes intégrales à une parallèle à la droite PP'. Si nous menons cette parallèle A_1x' par le point d'intersection A_1 des courbes intégrales, nous obtiendrons deux intégrales, ayant même constante (puisque les courbes passent par A_1) ; on en conclut que par rapport à A_1x' les ordonnées des deux courbes A_1B_1, $A_1B'_1$ sont dans un rapport constant qui est celui des échelles ou le rapport inverse des bases d'intégration. On en déduit aisément que les ordonnées doivent être nulles ensemble, c'est-à-dire que tous les points où les courbes se coupent doivent être sur l'axe A_1x' ; si nous considérons deux cordes correspondantes, ces cordes auront aussi les ordonnées de leurs extrémités dans le même rapport ; on démontrerait aisément par la géométrie élémentaire qu'il en est de même de tous les points de ces cordes et de leurs prolongements ; il en résulte donc que les cordes coupent aussi l'axe A_1x' au même point ; finalement, les tangentes pouvant être considérées comme limites de cordes jouissent aussi de cette propriété ; il en est de même des côtés, quand les courbes présentent des parties droites.

57. La démonstration qui précède ne s'applique pas

au cas où l'on déplace le pôle parallèlement à l'axe du diagramme ; mais en considérant ce déplacement particulier comme limite d'un autre déplacement pour lequel la propriété existe toujours, on reconnaît par la théorie des limites que cette propriété est générale.

On pourrait objecter aussi que les deux courbes $A_1 B_1$, $A_1 B'_1$ pourraient ne pas se rencontrer ; mais il sera toujours facile de trouver un axe tel que les deux courbes représentent une même intégrale particulière. Ainsi soient B_1 B'_1 deux points correspondants, on choisira l'axe de manière que l'on ait

$$\frac{B_1 b}{B'_1 b}$$

égal au rapport des échelles ou au rapport inverse des bases d'intégration.

58. *Application.* — La propriété du n° 56 peut conduire d'une matière assez élégante à des théorèmes connus de la géométrie. Nous nous contenterons ici d'en déduire le théorème de Desargues.

Soit *ABCD* une ligne primitive formée de deux parallèles à l'axe des x ; en prenant un pôle quelconque, on trouve pour intégrale deux droites quelconques $A_1 B_1$, $B_1 D_1$ se coupant sur l'ordonnée BC ; soit $B_1 D_1$ une corde de l'intégrale.

Si on mène deux autres droites $A_2 B_2$, $B_2 D_2$ arbitrairement mais se coupant aussi sur l'ordonnée BC, on aura une autre intégrale ; $A_2 D_2$ sera la corde correspondante à $A_1 D_1$. En vertu de la propriété du n° 56, les côtés $A_1 B_1 A_2 B_2$, $B_1 D_1 B_2 D_2$, doivent se couper en trois points situés en ligne droite, c'est-à-dire que les triangles $A_1 B_1 D_1$, $A_2 B_2 D_2$ assujettis à la seule condition d'avoir les 3 sommets sur 3 droites parallèles ont leurs côtés qui se coupent en 3 points situés en ligne droite ; c'est dans cette propriété que consiste le théorème de Desargues.

Deux côtés correspondants des triangles $A_1 B_1 C_1$ et $A_2 B_2 C_2$ peuvent avoir la même direction; leur point d'intersection se transporte alors à l'infini et la droite des points d'intersection des autres côtés correspondants doit être parallèle à cette direction.

Les deux médianes $A_1 a_1$, $A_2 a_2$ des triangles considérés sont deux cordes correspondantes et se coupent en un point de la droite $R S T$; si les centres de gravité des deux triangles coïncident, ils doivent se confondre avec ce point; de là cette autre propriété :

Si les triangles $A_1 B_1 C_1$ et $A_2 B_2 C_2$ sont tracés de manière que leurs centres de gravité coïncident, les côtés homologues se coupent sur une droite passant par ce centre de gravité.

59. *Transformation plus générale.* — La transformation du diagramme par déplacement du pôle est un cas particulier d'une transformation plus générale; nous pouvons considérer le diagramme comme un faisceau de droites; si on construit un faisceau homographique du faisceau donné, on obtiendra un autre diagramme dont les ordonnées y' sont liées aux anciennes ordonnées y par la relation $yy' + ay + by' + c = o$.

60. *Application.* — Étant donné une fonction $y = fx$, construire la courbe

$$z = \int \frac{dx}{y}$$

L'équation rendue homogène devient :

$$\frac{z}{c} = \int \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{J}} \frac{dx}{a} \quad \text{ou} \quad z = \frac{bc}{a} \int \frac{dx}{y} = l \int \frac{dx}{y}$$

en posant

$$l = \frac{bc}{a}.$$

Soit oy l'axe du diagramme, OA une ordonnée ; $PO = l$; en menant PA perpendiculairement à PA on détermine $OA' = y'$; et l'on a

$$y'y = l^2, \text{ d'où } y = \frac{l^2}{y'}.$$

La valeur de z devient

$$z = \frac{1}{l}\int y'dx.$$

En intégrant y' au moyen de PO comme base d'intégration, on a l'intégrale cherchée.

CHAPITRE VII.

Détermination des constantes d'intégration.

§ 1er. — Cas d'une seule intégration.

61. Soit $Y = fX$ une fonction représentée par la courbe AB (fig. 28) ; soit A_1B_1 une intégrale que nous représenterons par $\int YdX$; l'intégrale générale sera $Z = \int YdX + C$.

Pour représenter cette intégrale, il suffit de supposer que l'axe des x soit déplacé parallèlement à lui-même du côté y négatif d'une longueur représentant la quantité C, ou en d'autres termes de rapporter la courbe A_1B_1 à l'axe $y = -C$.

62. Pour qu'une intégrale particulière soit déterminée, il faut se donner une condition ; cette condition permettra de trouver la position de l'axe des x'. Ainsi, si on veut que l'intégrale ait une valeur connue pour une valeur donnée de la variable, on connaîtra un point de cet axe ; il en serait de même si on se posait comme condition que pour deux valeurs données de la

variable, l'intégrale áit deux valeurs égales et de signes contraires, etc...

§ 2. — Cas d'une double intégration.

63. Supposons que l'on intègre la courbe A_1B_1 fig. 28 et que l'on obtienne la courbe A_2B_2 représentant l'intégrale seconde $\int\int Y dX$. L'intégrale générale a pour valeur $z_1 = \int\int Y dX + Cx + C'$.

La courbe A_2B_2 rapportée à une courbe dont l'ordonnée est z' représente la fonction $z_1 = \int\int Y dX - z'$; si l'on veut que cette dernière fonction coïncide avec l'intégrale générale il suffit de prendre $-z' = Cx + C'$, c'est-à-dire, que la courbe A_2B_2 représente l'intégrale générale de la fonction Y; lorsqu'on la rapporte à un axe quelconque (dont l'équation est $z' = -Cx + C'$) parallèle ou non à l'axe des x.

Pour qu'une intégrale seconde soit déterminée, il faut deux conditions; ces deux conditions permettront de déterminer la position de l'axe arbitraire par rapport auquel la courbe doit être rapportée. Ainsi, par exemple, si l'intégrale seconde est assujettie à prendre deux valeurs connues pour deux valeurs données de la variable, l'axe sera déterminé par deux points.

64. *Relation entre deux courbes intégrales secondes différentes.* Soit A_1B_1 (fig. 28) une intégrale première de la courbe donnée AB; A_2B_2, une intégrale seconde. Pour obtenir une autre intégrale première, il suffit de rapporter la ligne A_1B_1 à un axe $o'x'$ parallèle à ox; il en résulte une modification du diagramme des inclinaisons de l'intégrale seconde; mais comme le montre la figure, cette modification revient à transporter le pôle de P' en P' parallèlement à l'axe des y. Deux intégrales secondes jouissent donc (n° 56) de la propriété que les

côtés, les tangentes et les cordes correspondantes se coupent sur une même parallèle à l'axe des y. Cela suppose, d'ailleurs, que les échelles restent les mêmes, sinon le transport du pôle cesserait d'être parallèle à l'axe des y, ainsi que le lieu des intersections des lignes correspondantes des intégrales secondes.

§ 3. — Cas d'une intégrale d'ordre n.

65. Supposons que l'on ait effectué n intégrations successives, soit $\int\int\int..YdX$ l'intégrale représentée par la courbe ; l'intégrale générale a pour valeur

$$Z_n = \int\int\int...YdX + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + ... + C_n;$$

la courbe tracée représentera cette valeur de Z_n si on la considère comme rapportée à la ligne de repère

$$Z'_n = -C_1 x^{n-1} - C_2 x^{n-2} ... - C_n;$$

en effet, dans cette hypothèse, la courbe intégrale a pour équation

$$Z_n = \int\int\int...YdX - Z'_n = \int\int\int...YdX + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} ... + C_n$$

En dérivant cette équation on trouve :

$$Z'_{n-1} = \int\int\int...YdX - \frac{dZ'_n}{dx}$$

$$Z'_{n-2} = \int\int\int...YdX - \frac{d^2Z'_n}{dx^2}, \text{ etc.}$$

On reconnaît que les lignes de repère des intégrales Z_n, Z_{n-1}, Z_{n-2}..., ont pour ordonnées

$$Z'_n, \frac{dZ'_n}{dx}, \frac{d^2Z'_n}{dx^2} ...;$$

c'est-à-dire qu'elles peuvent se déduire les unes des autres par intégrations ou différentiations successives.

.TIONS

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION GRAPHIQUE

ET SES

APPLICATIONS

DÉVELOPPEMENT DES THÈSES PRÉSENTÉES AU CONCOURS UNIVERSITAIRE DE 1873-1874

PAR

M. J. MASSAU

SOUS-INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES

LIVRE II

EXTRAIT

DES

ANNALES DE L'ASSOCIATION DES INGÉNIEURS SORTIS DES ÉCOLES SPÉCIALES DE GAND

BRUXELLES
IMPRIMERIE FÉLIX CALLEWAERT PÈRE
RUE DE L'INDUSTRIE, 26

1878

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION GRAPHIQUE

ET SES

APPLICATIONS

DÉVELOPPEMENT DES THÈMES PRÉSENTÉS AU CONCOURS UNIVERSITAIRES DE 1873-1874

PAR

M. J. MASSAU

SOUS-INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES

(Planches XXX à XXXIII).

LIVRE II (1)

Applications à l'algèbre, à la géométrie et à la mécanique (2)

CHAPITRE PREMIER

Des quatre opérations graphiques.

66. *Addition et soustraction.* — L'addition et la soustraction sont suffisamment connues ; il suffit de porter bout à bout les longueurs données sur une droite indé-

(1) Voir pages 13 à 55 de la première livraison de cette année.

(2) Parmi les nombreuses applications que nous allons exposer, nous rencontrerons quelquefois des constructions qui ne sont pas nouvelles ;

finie, dans le même sens pour les ajouter, dans un sens contraire pour les soustraire.

67. *Multiplication.* — Soit à trouver le produit $z = xy$; construisons (fig. 29) le rectangle $ABCD$ en portant à une certaine échelle $AB = x$, $BC = y$; la surface de ce rectangle sera précisément le produit cherché. Ce dernier est donc une intégrale que l'on cherchera par la méthode ordinaire ; de là la construction suivante : prenons A comme pôle ; portons Ao' égale à la base d'intégration (unité d'échelle, si on prend la même échelle pour x, y, z) ; AC_1 sera la ligne intégrale et BC_1 le produit cherché.

Il est à remarquer que si l'on voulait obtenir le produit de y par une autre quantité x', il suffirait de porter $AB' = x'$, BC_1' serait ce produit. Si enfin on porte en $o'y'$ les longueurs de 1 à 100 et si l'on trace toutes les lignes analogues à AD', si ensuite on porte en Ax toutes les longueurs de 1 à 100 et si on mène des ordonnées par les points obtenus, on obtiendra une table graphique de multiplication des nombres compris entre 1 et 100. Approximativement on pourra en déduire les produits de nombres plus compliqués.

68. *Divisiom.* — Soit à trouver le quotient $y = \frac{z}{x}$. Reprenons la fig. 29. On connaît $BC_1 = z$ qui est le dividende, $AB = x$ qui est le diviseur ; on demande le quotient $o'D' = y$. De là la construction suivante : on porte $AB = x$, $BC_1 = z$, on joint AC_1 qui détermine sur l'axe du diagramme la longueur $o'D'$ qui représente le quotient cherché.

il nous a paru utile de les rattacher à l'opération type de l'intégration graphique. Telles sont la multiplication et la division graphique, qui depuis longtemps ont été déduites de la théorie des lignes proportionnelles. Le lecteur reconnaîtra aisément ces emprunts dont nous signalerons d'ailleurs les moins évidents.

CHAPITRE II

Constructions de courbes algébriques (1).

§ 1er. — Construction des paraboles.

69. *Méthode par intégrations successives.* — Soit $y = ax^m + bx^{m-1} \ldots + kx + l$ l'équation d'une parabole de degré m. En dérivant cette équation, nous obtenons successivement :

$$y' = max^{m-1} + (m-1)\,bx^{m-2} \ldots\ldots + k$$
$$y'' = m(m-1)\,ax^{m-2} + (m-1)(m-2)\,bx^{m-3} + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(m-1)} = m(m-2)\ldots 2\,ax + (m-1)(m-2)\ldots 1b$$
$$y^m = m(m-1)(m-2)\ldots 2.1a$$

La dernière de ces équations représente une paral lèle à l'axe des x que nous pouvons construire immédiatement ; si nous effectuons sur cette ligne une première intégration graphique en prenant comme premier point de l'intégrale :

$$\begin{cases} x = o \\ y = (m-1)(m-2)\ldots 21b \end{cases}$$

nous obtenons la ligne qui représente y^{m-1} ; si de la même manière nous effectuons une seconde, troisième intégration, etc., nous obtenons y^{m-2}, y^{m-3}, etc., et finalement la parabole demandée.

Les méthodes du livre premier ne permettent d'effectuer que quatre intégrations successives et l'on ne pourrait dès lors obtenir que les paraboles du qua-

(1) Le lecteur qui ne se proposerait que d'examiner les applications les plus usuelles pourrait passer les chapitres II, III et IV.

trième degré ; pour une parabole de degré supérieur au quatrième il faudrait opérer par approximations.

Nous allons démontrer que l'on peut aussi obtenir l'intégrale $n^{\text{ième}}$ d'une parallèle à l'axe des x de la manière suivante : l'intégrale première de la parallèle à l'axe des x AB (fig. 30) est une droite A_1B_1 qui s'obtient par une méthode connue (n° 33). L'intégrale d'un arc A_1B_1 de cette ligne droite s'obtient en remplaçant le trapèze $A_1B_1b_1a_1$ par deux rectangles de base $\frac{a_1b_1}{2}$ et dont les hauteurs sont respectivement les ordonnées des points A_1 et B_1 ; on obtient ainsi le polygone $A_2r_2B_2$ formé par les deux tangentes extrêmes de l'arc A_2B_2 de l'intégrale seconde cherchée. L'intégrale de l'arc A_2B_2 s'obtient en remplaçant le trapèze curviligne $A_2B_2b_2a_2$ par trois rectangles de base $\frac{ab}{3}$ et ayant pour hauteurs respectives les ordonnées des trois sommets du polygone $A_2r_2B_2$; on obtient ainsi un polygone $A_3r_3s_3B_3$ de trois côtés dont les extrêmes sont les tangentes aux extrémités de l'arc A_3B_3 de l'intégrale troisième cherchée. L'intégrale de l'arc A_3B_3 s'obtient en remplaçant le trapèze curviligne $A_3B_3b_3a_3$ par quatre rectangles de base $\frac{ab}{4}$ et dont les hauteurs sont les ordonnées des quatre sommets du polygone $A_3r_3s_3B_3$; on obtient ainsi un polygone $A_4r_4s_4t_4B_4$ de quatre côtés dont les extrêmes sont les tangentes aux extrémités de l'arc A_4B_4 de l'intégrale quatrième cherchée. En continuant de cette façon, on obtiendra un polygone $A_nr_ns_n\ldots.B_n$ de n côtés dont les extrêmes seront les tangentes aux extrémités de l'arc A_nB_n de l'intégrale $n^{\text{ième}}$ cherchée.

Pour justifier ce tracé graphique, soient :

y l'ordonnée de AB

y_1 y_1' les ordonnées respectives des points A_1 et B_1

y_2 y_2' y_2'' » » » A_2, r_2 et B_2

y_3 y_3' y_3'' y_3''' » » » A_3, r_3, s_3 et B_3

. . . . . .

y_n y_n' y_n'' ..... y_n^n » » » A_n, r_n, s_n ..... B_n

Nous allons démontrer que y_n^n est l'intégrale $n^{\text{ième}}$ cherchée.

D'après la construction qui vient d'être exposée, on a l'équation :

$$\frac{\frac{y'_k - y_k}{h}}{k} = y_{k-1} \text{ ou bien } \Delta y_k = \frac{h}{k} y_{k-1}$$

Cette formule va nous permettre de calculer Δy_n, $\Delta^2 y_n$, $\Delta^3 y_n$....; on trouve, en effet, en prenant les différences successives :

$$\Delta y_n = \frac{h}{n} y_{n-1}$$

$$\Delta^2 y_n = \frac{h}{n} \Delta y_{n-1} = \frac{h}{n} \frac{h}{n-1} y_{n-2}$$

$$\Delta^3 y_n = \frac{h}{n} \frac{h}{n-1} \Delta y_{n-2} = \frac{h}{n} \frac{h}{n-1} \frac{h}{n-2} y_{n-3}$$

. . . . . .

$$\Delta^n y_n = \frac{h}{n} \frac{h}{n-1} \cdots \frac{h}{1} y$$

L'ordonnée y_n^n s'exprime au moyen de ses différences successives par la formule symbolique $y_n^n = (1 + \Delta)^n y_n$ ou bien :

$$y_n^n = y_n + \frac{n}{1} \Delta y_n + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 y_n \cdot \ldots + \frac{n(n-1) \ldots 1}{12..n} \Delta^n y_n$$

ou en remplaçant Δy_n $\Delta^2 y_n$ .... $\Delta^n y_n$ par leurs valeurs ;

$$y_n^n = y_n + \frac{h}{1} y_{n-1} + \frac{h^2}{1.2} y_{n-2} + \frac{h^3}{1.2.3} y_{n-3} \cdots + \frac{h^n}{12\ldots n} y$$

Remarquons que y_{n-1}, y_{n-2}... y sont les dérivées successives de y_n; le second membre est donc le développement par la formule de Taylor de l'ordonnée de l'intégrale $n^{\text{ième}}$ cherchée; on en conclut que y_n^n est bien cette ordonnée. Remarquons enfin que les côtés extrêmes du polygone $A_n r_n s_n \ldots B_n$ sont les tangentes aux extrémités de l'arc $A_n B_n$ puisque les directions de ces côtés, de même que celles des tangentes extrêmes s'obtiennent en portant sur le diagramme les ordonnées des points A_{n-1} et B_{n-1}.

70. *Problème préliminaire. Étant donnée une courbe* $y = f(x)$ *construire la courbe* $y = xf(x)$. — Soit *AB* (fig. 31) la courbe donnée, *M* un point de cette courbe, nous nous proposons de trouver le point correspondant de la courbe cherchée. Soient $x = OP$, $y = MP$; l'ordonnée cherchée $x f(x)$ est le produit de ces deux quantités; en appliquant la règle de la multiplication (n° 67), nous sommes conduits à la construction suivante : prenons *O* comme pôle, portons $OO' = \lambda$ (base d'intégration), menons *O'Y'* parallèle à *OY*; portons *MP* en *MO'*, joignons *OM'*, cette dernière coupera l'ordonnée *MP* au point cherché M_1. On peut au moyen de cette construction, trouver très-rapidement un grand nombre de points de la courbe : on mène d'abord les parallèles *MM*, *NN'*, etc..., puis les rayons *OM'*, *ON'*, etc..., qui déterminent immédiatement les points cherchés M_1 N_1, etc.

71. *Deuxième méthode.* — Soit à construire la courbe $y = ax^m + bx^{m-1} + \ldots + kx + l$.

On peut construire facilement la courbe $y_1 = a$; si l'on effectue sur cette courbe l'opération qui fait l'objet du n° 70, on obtiendra la courbe $y_2 = ax$ et si l'on sup-

pose que l'axe des x soit transporté d'une quantité b dans le sens des y négatifs, on aura la courbe $y_3 = ax + b$, par rapport à cette nouvelle position de l'axe des x; si on effectue cette même opération sur la courbe $y_3 = ax + b$, et si ensuite on transporte l'axe des x d'une quantité c dans le sens des y négatifs, on obtient $y_4 = (ax + b)\,x + c = ax^2 bx + c$; on trouverait de même $y_5 = (ax^2 + bx + c)\,x + d = ax^3 + bx^2 + cx + d$ et en continuant de la même manière on trouverait la courbe demandée $y = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} \ldots + cx^2 + kx + l$.

§ 2. — Construction des hyperboles.

72. On entend par hyperboles du $m^{\text{ième}}$ degré, les courbes dont l'équation est de la forme

$$y = \frac{a}{x^m} + \frac{b}{x^{m-1}} + \ldots \frac{k}{x} + l.$$

Nous nous proposons de donner deux méthodes graphiques pour construire ces courbes.

73. *Problème préliminaire. Étant donnée la courbe* $y = f(x)$, *trouver la courbe* $y = \frac{f(x)}{x}$.

Soit A_1B_1 (fig. 31) la courbe donnée ; M_1 un point de cette courbe dont les ordonnées sont $x = oP$, $f(x) = M_1P$; nous nous proposons de trouver le point correspondant de la courbe cherchée AB. L'ordonnée de ce dernier point $\frac{f(x)}{x}$ est le quotient de deux quantités, quotient que l'on trouvera par la règle de la division graphique (n° 68) ; on est ainsi conduit à la construction suivante : portons sur ox, $oo' = \lambda$ (base d'intégration), menons

$o'y'$ parallélement à oy, joignons OM_1 ; nous trouverons en $M'O'$ le quotient cherché et en portant $M'O'$ en MP, on obtient le point M qu'il s'agissait de trouver. On peut de cette manière trouver autant de points de la courbe que l'on veut.

74. *Première méthode.* — Soit à construire la courbe $y = \frac{a}{x^m} + \frac{b}{x^{m-1}} + \frac{c}{x^{m-2}} + \ldots\ldots \frac{k}{x} + l$

On construit facilement la ligne $y_0 = a$. Si on effectue sur cette courbe l'opération qui fait l'objet du problème préliminaire précédent, on trouve la courbe $y_1 = \frac{a}{x}$ et si l'on suppose l'axe des x transporté d'une quantité b dans le sens des y négatifs, on aura la courbe $y_2 = \frac{a}{x} + b$ par rapport à cette nouvelle position de l'axe des x. Si on effectue cette même opération sur la courbe $y_3 = \frac{a}{x} + b$ et si ensuite on transporte l'axe des x d'une quantité dans le sens des y négatifs, on obtiendra

$$y_4 = \left(\frac{a}{x} + b\right)\frac{1}{x} + c = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c$$

On trouverait de même

$$y_5 = \left(\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c\right)\frac{1}{x} + d \text{ ou } y_5 = \frac{a}{x^3} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x} + d$$

et en continuant ainsi on trouverait la courbe demandée

$$y = \frac{a}{x^m} + \frac{b}{x^{m-1}} + \ldots\ldots + l$$

75. *Deuxième méthode.* — Si nous posons $x = \frac{1}{x'}$, il vient $y = ax'^m + bx^{m-1} + l$; on peut construire

d'abord la courbe $y = ax'^m + bx'^{m-1} + \ldots\ldots$ par la méthode des n^{os} 69 et 71 et alors construire $x = \frac{1}{x'}$ par la méthode du n° 60, on obtiendra la courbe demandée.

§ 3. — Courbes dont l'ordonnée est une fraction rationnelle de l'abscisse.

76. *Première réduction.* — Soit à construire l'expression $y = \frac{F(x)}{f(x)}$ et supposons d'abord que $F(x)$ soit de degré égal supérieur à $f(x)$; nous allons montrer que l'on peut ramener la construction de cette courbe $y = \frac{F(x)}{f(x)}$ à celle d'une autre courbe $y = \frac{\varphi(x)}{f(x)}$ dans laquelle $\varphi(x)$ sera de degré inférieur à $f(x)$. Considérons la fonction $\frac{F(x)}{f(x)} - p = \frac{F(x) - p f(x)}{f(x)}$, on pourra toujours choisir p de manière que $F(x) - p f(x)$ ne contienne plus de termes constants, on aura alors : $F(x) - p f(x) = x \varphi(x)$, et par conséquent :

$$\frac{F(x)}{f(x)} p = \frac{x \varphi(x)}{f(x)} \text{ d'où } \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{x\varphi(x)}{f(x)} + p.$$

Si on avait la courbe $y_1 = \frac{\varphi(x)}{f(x)}$ on aurait la courbe demandée $y = \frac{x \varphi(x)}{f(x)} + p$ en effectuant sur la première l'opération du n° 70 et en transportant l'axe des x d'une quantité p suivant les y négatifs.

78. *Deuxième réduction.* — Etant donnée la courbe $y_1 = \frac{f(x)}{F(x)}$, on peut trouver la courbe $y = \frac{F(x)}{f(x)}$, en effet

on a : $y = \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x)}{F(x)}} = \frac{1}{y_1}$; on est ramené au problème qui fait l'objet du n° 60.

78. *Construction générale.* — Au moyen de ces deux réductions, on pourra toujours ramener la construction de la courbe demandée à la construction d'une parallèle à l'axe de x : $y = a$. En effet, deux cas peuvent se présenter, ou bien le numérateur a un degré égal ou supérieur à celui du dénominateur, ou bien le numérateur a un degré moins élevé. Dans le premier cas on effectuera la première réduction jusqu'à ce que le degré du numérateur soit plus petit que celui du dénominateur, alors on appliquera la deuxième réduction, puis deux fois la première, ce qui diminuera encore de deux unités le degré du dénominateur devenu numérateur ; en continuant ainsi, on pourra diminuer successivement le degré de chaque terme de deux unités et l'on arrivera finalement à $y = a$. Dans le second cas, on effectuera la deuxième réduction et on sera ramené au premier.

79. *Exemple.* — Construire la courbe $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

On a $\frac{x^2 + 1}{x - 1} - p = \frac{x^2 + 1 - px + p}{x - 1}$; choisissons $p = -1$, on a :

$\frac{x^2 + 1}{x - 1} + 1 = \frac{x^2 + x}{x - 1}$, d'où $\frac{x^2 + 1}{x - 1} = x \frac{x + 1}{x - 1} - 1$;

si nous posons $y_1 = \frac{x + 1}{x - 1}$ on a :

$$y = xy_1 - 1 \qquad (1).$$

La courbe y_1 se transforme de la même manière, on a : $\frac{x + 1}{x - 1} - p = \frac{x + 1 - px + p}{x - 1}$; si on prend $p = -1$,

on a : $$\frac{x+1}{x-1} + 1 = \frac{2x}{x-1}$$

ou bien $$\frac{x+1}{x-1} = x \times \frac{2}{x-1} - 1 \ ;$$

si on pose $y_2 = \frac{2}{x-1}$, on a : $y_1 = x\,y_2 - 1$ (2).

Enfin on a : $\frac{2}{x-1} = \frac{1}{\frac{x-1}{2}}$; si nous posons $y_3 = \frac{x-1}{2}$,

on aura $y_2 = \frac{1}{y_3}$ (3).

En résumé, on construira d'abord à droite $y_3 = \frac{x-1}{2}$; puis on effectuera successivement les opérations indiquées par les équations (3) (2) (1) et on obtiendra la courbe cherchée.

80. *Simplifications.* — On peut souvent simplifier la méthode générale en s'appuyant sur les remarques suivantes :

1° Le problème du n° 70 peut s'étendre et s'énoncer comme suit : étant donnée une courbe $y = f(x)$, trouver la courbe $y_1 = (x - a) f(x)$.

Soit (fig. 32) AB la courbe donnée ayant pour équation $y = f(x)$; soit Mm une ordonnée quelconque de cette courbe. Portons $OP = a$, on a évidemment $y^1 = (x - a) f(x) = mP \times Mm$. Pour avoir ce produit prenons P comme pôle, portons $Po' = \lambda$ (base d'intégration), $M'O' = Mn$; le rayon PM' détermine le point M_1 de la courbe cherchée. On voit que la construction ne diffère de celle qui a été exposée au n° 70 que par la position du pôle du diagramme ; le pôle du diagramme est l'origine quand il s'agit de trouver la courbe $y_1 = \varphi f(x)$; c'est le point P $(x = a)$ quand il s'agit de trouver la courbe $y_1 = (x - a) f(x)$.

2° De la même manière, le problème du n° 73 peut s'étendre et s'énoncer comme suit : étant donnée une courbe $y = f(x)$, trouver la courbe $y_1 = \frac{f(x)}{x - a}$.

Cela étant, considérons la courbe

$y = \frac{\varphi(x)(x-a)(x-b)\ldots}{(x-d)(x-\beta)\ldots}$; si on trace la courbe $y_1 = \varphi(x)$,

on obtient y en multipliant y_1 par $(x - a)$, $(x - b)$, etc., puis en divisant par $(x - \alpha)(x - \beta)$, etc.

Nous pouvons appliquer ces considérations à l'exemple du n° 79. Pour construire la courbe

$$y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

nous construisons d'abord la parabole

$$y_1 = x^2 + 1$$

En divisant par $x - 1$, on obtient la courbe cherchée.

§ 4. Construction de diverses courbes.

81. *Courbes unicursales.* Soit $F(x, y) = o$ l'équation d'une courbe ; supposons que par une transformation quelconque on puisse exprimer rationnellement x et y en fonction d'une variable auxiliaire θ, on aura $x = \varphi(\theta)$, $y = t(\theta)$: les courbes dont l'équation est susceptible de subir cette transformation ont été appelées par M. Cailey courbes unicursales. On peut les construire graphiquement de la manière suivante.

Soit (fig. 33) *yox* le système d'axes coordonnés ; prenons un axe auxiliaire $o\,\theta$ sur lequel nous porterons la vaviable θ et construisons par les méthodes du para-

graphe précédent, les courbes $A'B'$, $A''B''$ ayant pour équations $x = \varphi(\theta)$ $y = t(\theta)$. Soit $\theta = OP$ une valeur de la vaviable θ; PQ, PR sont les valeurs de y et de x correspondantes; en menant QQ' RR' parallèlement à $O\theta$, on obtient les coordonnées OR' OQ' d'un point M de la courbe cherchée.

82. *Courbes dout l'équation est de la forme* $F(y) = f(x)$, *F et f étant deux fonctions rationnelles.* — Posons $F(y) = \theta$, $f(x) = \theta$; prenons un axe auxiliaire $O\theta$ et construisons les courbes $F(y) = \theta$, $f(x) = \theta$; on en déduit la courbe cherchée comme au numéro précédent.

83. *Exemples.* — $1° \; ax^m + bx^{m-1}y + \ldots = a'x^{m-1} + b'x^{m-2}y + \ldots$

En posant $y = \theta x$, on a : $x^m(a + b\theta + c\theta^2 \ldots) = x^{m-1}(a' + b'\theta + c'\theta^2 \ldots)$ d'où l'on tire

$$x = \frac{a' + b'\theta + c'\theta^2 + \ldots}{a + b\theta + c\theta^2 + \ldots}$$

et par suite $y = \dfrac{a'\theta + b'\theta^2 + c'\theta^3 + \ldots}{a + b\theta + c\theta^2 + \ldots}$

On est ramené au numéro 81.

Remarquons toutefois que l'opération peut être simplifiée comme suit : il suffit de considérer l'axe des y comme étant l'axe des θ et de construire la courbe $x = \dfrac{a' + b'\theta + \ldots}{a + b\theta + \ldots}$; on obtient $y = \theta x$ par l'opération du n° 70.

L'équation $y^2 - qx^2 = 2px$ des courbes du second degré peut se construire par ce procédé; on a :

$$x = \frac{2p}{\theta^2 - q} \qquad y = \theta x.$$

$2° \; ax^m + bx^{m-1}y + \ldots = a'x^n + b'x^{n-1}y + \ldots$

En posant $y = {}^{\theta} x$, on obtient $x^{m-n} = \frac{a' + b'\,{}^{\theta}+ \ldots}{a + b\,{}^{\theta} + \ldots}$; on est ramené au numéro 82.

CHAPITRE III.

Racines des équations.

84. Soit l'équation du m^ième^ degré $ax^m + bx^{m-1} + \ldots + l = o$; proposons nous de trouver les racines réelles de cette équation. Considérons d'abord x comme variable; l'équation $y = ax^m = bx^{m-1} + \ldots$ représente une courbe que nous savons construire; soient $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ les abscisses des points où cette courbe coupe l'axe des x, $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ seront évidemment les racines de l'équation proposée. Ce procédé permet d'obtenir les racines avec une approximation aussi grande qu'on le désire. Un premier tracé de la courbe $y = ax^m + bx^{m-1} + \ldots$ à une petite échelle permet de trouver des premières valeurs des racines; mais si l'on veut trouver l'une de ces racines avec plus d'approximation, il suffit de construire dans les environs de cette racine la courbe à telle échelle qu'on le veut.

CHAPITRE IV.

Problèmes divers.

§ 1^er^. — Construire une parabole du second degré passant par trois points donnés.

85. *Première méthode.* — Soient (fig. 34) $A_1 B_1 C_1$ les trois points donnés; nous pouvons considérer la parabole inconnue, dont l'équation est de la forme $y = ax^2$

$+ bx + c$, comme l'intégrale d'une droite AC; le problème sera résolu si nous déterminons cette droite. Pour y arriver prenons $Po' = \lambda$ (longueur arbitraire) comme base d'intégration ; menons PD', PE' parallèlement aux cordes A_1B_1, B_1C_1; en vertu de la propriété du n° 8, oD', $o'E'$ sont les ordonnées moyennes des segments AB, BC, et comme l'ordonnée moyenne d'une portion de droite est l'ordonnée du milieu de cette droite, en portant $Dd, = D'o'$ $Ee = o'E'$ sur les milieux de ab et bc, on obtiendra deux points D et E de la droite AC ; la droite AC étant déterminée par ces deux points, on en déduit, par les méthodes connues d'intégration, autant de points que l'on veut de la courbe $A_1B_1C_1$.

86. *Deuxième méthode* — Il résulte de la fig. 34 que $D'E'$ est la demi-projection de la droite AC ; on en conclut que si le point B_1 se meut sur la parabole, les points A_1 et C_1 restant fixes, la longueur $D'E'$ se déplace en restant de grandeur constante ; les directions de deux autres cordes A_1F_1, C_1F_1 complémentaires de l'arc A_1C_1, s'obtiendront donc en PD'', PE'', en déplaçant $D'E'$ en $D''E''$ d'une certaine quantité, ou ce qui revient au même, en $P'D'$, $P'E'$, en déplaçant le pôle de P en P' d'une quantité égale et de sens contraire. On peut, de cette façon, trouver autant de points que l'on veut de la parabole. Nous avons indiqué cette construction fig. 35 ; A_1 B_1 C_1 sont les points donnés ; B_1 est pris comme pôle, C_1D comme axe du diagramme ; les pôles P et P' donnent les points F_1 et G_1.

87. *Troisième méthode.* — Considérons le polygone $A_1F_1C_1$ (fig. 35) comme une ligne intégrale rapportée à la ligne A_1C_1 prise comme courbe de repère ; cette ligne intégrale est fournie par le diagramme DPC_1. Si nous transportons le pôle P en B_1, l'intégrale $A_1F_1C_1$ devient A_1FC' et on sait (n° 48) que ces deux lignes

représentent la même fonction, en les rapportant à des lignes de repère convenables; il est évident d'ailleurs que la ligne de repère $A_1 C_1$ vient en $A_1 C'$; on en conclut que $F_1 f = Ff'$. On voit ainsi que l'on peut obtenir l'ordonnée d'un point quelconque de la parabole rapportée à la droite $A_1 C_1$ de la manière suivante : mener FC' parallèlement à $B_1 C_1$, joindre $A_1 C'$; Ff' est l'ordonnée cherchée.

Nous avons indiqué (fig. 36), la construction d'une parabole $A_1 B_1 C_1$ par ce procédé : $1'$ $2'$ $3'$ $4'$ sont les longueurs des ordonnées de différents points de la parabole par rapport à la droite $A_1 C_1$.

88. *Quatrième méthode.* — Les intégrales $A_1 F_1 C_1$, $A_1 FC'$ (fig. 35), jouissent de la propriété du n° 56; on en conclut que les droites $F_1 C_1$, FC' se coupent sur la droite $A_1 a$; de là un moyen de trouver le point F_1 autrement qu'en portant $F_1 f = Ff'$; il suffit de prolonger FC' jusqu'en K, KC_1 détermine le point F_1. Nous avons indiqué (fig. 37) la construction d'une parabole par ce procédé; il suffit, après s'être donné les lignes d'ordonnées $1''$ $2''$ $3''$.... sur lesquelles on veut avoir des points, de déterminer $1'$ $2'$ $3'$.... en faisant glisser une équerre de manière que l'un de ses bords reste parallèle à BC_1 et effleure les points $1''$, $2''$, $3''$... En joignant $1'C_1$, $2'C_1$, $3'C_1$ on obtient les points cherchés. On peut se passer de tracer effectivement les lignes pointillées et se contenter de marquer les points qu'elles déterminent.

89. *Trouver la tangente en un point de la parabole.*

1° Supposons que l'on opère au moyen de la ligne dérivée; reprenons la fig. 34; on obtiendra la tangente au point B_1, en portant l'ordonnée du point B sur le diagramme en $o'B'$; PB' est la direction de la tangente cherchée.

2° Quand on ne se sert pas de la droite AC, on peut

aussi obtenir la direction PB' (fig. 34) en menant PI' parallèlement à $A_1 C_1$, et en portant $B'E' = D'I'$. Pour le démontrer, remarquons que si on retourne DE bout pour bout, le point I, où le point B vient se placer, est le milieu de AC ; on a, en effet, $AI = AD + DI$ ou $AD + BE = \frac{AC}{2}$.

Si on remarque que le point I' est la projection de I et que la relation entre B et I doit exister aussi en projection, on reconnaît que $B'E = ID'$, ce qu'il fallait démontrer.

3° Lorsqu'on applique les méthodes des n^{os} 87 et 88, on ne fait usage ni de la dérivée, ni du diagramme ; on peut obtenir la tangente comme suit : soit à chercher (fig. 38) la tangente au point F_1 de la parabole $A_1 C_1$; prolongeons les côtés $A_1 F_1$, $F_1 C_1$ jusqu'à leur rencontre avec les ordonnées des points C_1 et A_1 en C' et A' ; $C'A'$ donne la direction de la tangente cherchée.

En effet, d'après la construction précédente on obtiendrait cette tangente $F_1 T$ en menant $F_1 I$ parallèlement à $A_1 C_1$ et en portant $CT = C_1 I$. Or, on a : $C_1 I = F_1 f_1$ à cause du parallélisme des droites $A_1 C_1$ et $F_1 I$; d'après une propriété connue du trapèze on a aussi : $F_1 f_1 = F_1 f$; on en conclut que $CT = C_1 I = F_1 f_1 = F_1 f$. L'égalité $CT = F_1 f$ montre que les droites fC' et $F_1 T$ sont parallèles : c'est *c.q.f.d.*

90. *Trouver un point de la parabole connaissant la direction de la tangente.* La résolution de ce problème est facile quand on applique la méthode du n° 85 ; mais quand on ne se sert pas de la courbe dérivée et qu'on applique la méthode du n° 86, il faut opérer d'une autre manière. Soit F_1 (fig. 35) le point cherché dont on donne la direction de la tangente ; soient PD, PC_1 les directions inconnues des cordes $A_1 F_1$ et $F_1 C_1$; PT la direction de la tangente, PI la direction de la corde $A_1 C_1$.

Du triangle TPI on connaît la direction des deux côtés TP et IP ainsi que la hauteur perpendiculaire à l'autre côté ; on construit aisément ce triangle en $T'I'P_1$; il suffit alors de la placer en TPI de manière que $DT = C_1 I$ ou ce qui revient au même, de manière que le milieu de IT coïncide avec le milieu de DC_1 ; on obtient ainsi le point P et par suite le point F_1 (n° 86).

Ce problème a une certaine importance : on peut, de cette façon, trouver le sommet de la parabole qui est le point où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

§ 2. CONSTRUIRE UNE PARABOLE DU SECOND DEGRÉ CONNAISSANT DEUX POINTS ET UNE TANGENTE EN L'UN D'EUX.

91. Ce cas se ramène au précédent ; il suffit, en effet, de considérer la tangente comme une corde joignant deux points infiniment voisins. Soient (fig. 39) A, B les deux points donnés, BT la tangente ; si on emploie la méthode du n° 86, on prendra ATB comme diagramme. Nous avons indiqué sur la figure la construction d'après le n° 88.

§ 3. CONSTRUIRE UNE PARABOLE DU TROISIÈME DEGRÉ CONNAISSANT DEUX POINTS ET LES TANGENTES EN CES POINTS.

92. Soient AB (fig. 40) les deux points donnés, AT, BT les deux tangentes. Prenons PO' comme base d'intégration ; en menant PB' PA', PC' parallèlement aux tangentes BT, AT et à la corde AB, on trouve en $O'A'$, $O'B'O'C'$ les ordonnées extrêmes et l'ordonnée moyenne de l'arc $A_1 B_1$ dérivée de l'arc AB. Si nous portons ces ordonnées en $A_1 a$, $C_1 c$, $B_1 b$, nous savons (n° 19) que le point C_1 est le centre de gravité du triangle formé

par la corde $A_1 B_1$ et les tangentes en A_1 et en B_1 ; on a donc $2\, C_1 I = C_1 T_1$. Cette relation donne immédiatement le point T_1 et par suite les tangentes $A_1 T_1$ et $T_1 B_1$; l'arc $A_1 B_1$ est alors complétement déterminé, on peut en trouver autant de points qu'on le désire ; connaissant la dérivée, on en déduit la courbe cherchée par une intégration.

93. Remarquons que la construction du n° 92, ainsi que celles des deux paragraphes précédents, consistent à déterminer les dérivées des courbes que l'on veut construire. On peut aussi résoudre les mêmes problèmes en s'appuyant sur le procédé du n° 70 ; on arrive alors à une méthode générale applicable aux paraboles de degré quelconque : cette méthode va être exposée dans les paragraphes qui suivent.

§ 4. Construire une parabole du $m^{\text{ième}}$ degré passant par $m + 1$ points donnés.

94. Soient A, B, C, D... les points donnés (fig. 41) ; si nous transportons les axes coordonnés parallèlement à eux mêmes en choisissant A pour origine des coordonnées, la courbe aura une équation de la forme $y = x\,\varphi(x)$ dans laquelle $\varphi(x)$ sera une fonction entière de x de degré $m-1$. Le problème proposé serait évidemment résolu si nous connaissions la courbe $y_1 = \varphi(x)$ puisque, pour avoir la courbe demandée, il suffirait d'effectuer sur cette courbe l'opération du n° 70. L'équation $y_1 = \varphi(x)$ représente une parabole de degré $m-1$, nous allons, pour la déterminer, en chercher m points. Remarquons pour cela que l'on a $\varphi(x) = \frac{y}{x}$; or, on connaît les coordonnées des m points B, C, D... de la

courbe y ; en effectuant la division $\frac{y}{x}$ pour chacun de ces points, on trouve m points $B_1 C_1 D_1 \ldots$ de la courbe y. Le problème proposé est donc ramené à un problème plus simple ; savoir : trouver une parabole de degré moindre passant par un nombre de points suffisants. En faisant sur cette dernière parabole le même raisonnement, on sera ramené à une parabole de degré moindre encore et en continuant ainsi le problème sera ramené à la construction d'une ligne droite passant par deux points donnés.

§ 5. Construire une parabole de degré m, connaissant $m - k + 1$ points et les tangentes en k de ces points.

Avant de procéder à cette construction, il est nécessaire de résoudre quelques problèmes préliminaires.

95. *La direction de la tangente à l'origine d'une courbe ayant une équation de la forme* $y = x\ f(x)$ *correspond sur le diagramme à l'ordonnée* $f(o)$. — Soient (fig. 41) $A_1 B_1$ la courbe $y_1 = f(x)$, AB la courbe $y = x\ f(x)$; un point B_1 de la courbe y_1 fournit un point B de la courbe y par une construction connue (n° 70). Supposons que le point B_1 se rapproche indéfiniment du point A_1, le point B' vient en A' ; la tangente en A, qui est la limite de la corde AB, est donc dirigée suivant AA' : la direction AA' est d'ailleurs la direction correspondant sur le diagramme à l'ordonnée $A'o' = A_1 A = f(o)$.

Cette propriété permet de trouver la tangente AA' connaissant le point A_1 et réciproquement connaissant la tangente, à l'origine, de la courbe $y = x\ f(x)$, on en déduit un point de la courbe $y_1 = f(x)$.

96. *Connaissant une tangente de la courbe* $y_1 = f(x)$ *trouver la tangente correspondante à la courbe* $y = x f(x)$ *et réciproquement.* — Soient (fig. 41) $B_1 T_1$ la tangente donnée à la courbe $A_1 B_1$ dont l'équation est $y_1 = f(x)$. Soit $Y_1 = ax + b$ l'équation de cette tangente ; considérons la courbe $Y = Y_1 x = ax^2 + bx$; cette courbe est une parabole du second degré passant par l'origine et par le point B ; on en obtient la tangente AT à l'origine, au moyen du théorème du numéro précédent ; et, d'après une propriété connue de la parabole, en prenant $at = \frac{ab}{2}$, on en déduit la tangente TB au point B.

Or, la tangente Y ayant deux points infiniment voisins communs à la courbe y_1, les lignes $Y = Y_1 x$, et $y = y_1 x$ doivent aussi avoir deux points infiniment voisins communs en B, et avoir même tangente en ce point : BT est donc la tangente cherchée à la courbe AB.

Réciproquement, si on connaît la tangente BT, on imaginera une parabole passant par l'origine et tangente à BT au point B ; par division cette parabole donnera une droite $T_1 B_1$ qui est la tangente cherchée à la courbe $A_1 B_1$.

97. *Remarque.* — Les tangentes $B_1 T_1$ et BT sont unies par une relation géométrique qui peut aussi s'exprimer de la manière suivante : le point I_1 où la tangente $B_1 T_1$ va couper l'axe des x, est le point réciproque de l'origine par rapport au cercle décrit du point I où la tangente BT coupe l'axe des x comme centre avec la sous-tangente Ib comme rayon.

La relation qu'il s'agit de démontrer étant une relation d'abscisses, nous pouvons adopter telle échelle d'ordonnée que nous voulons, sans nuire à la généralité de la démonstration ; nous prendrons (fig. 42) pour l'axe du diagramme, la droite bB passant par le point B

de la courbe y où l'on a la tangente BT. Dans ce cas, le point B_1 coïncide avec le point B ; la tangente BT_1 s'obtient d'ailleurs comme précédemment : T point de BT dont l'abscisse est $\frac{ab}{2}$, oT donne T' et par suite T_1. Menons KK' parallèlement à l'axe des x par le point T ; on a : $KT = TK'$; si donc on joint BK, on détermine sur l'axe des x le diamètre cb du cercle de rayon Ib. Remarquons aussi que le point K est le milieu de $T_1 o$ à cause de $oT = TT'$; on en conclut que les droites BT_1, BK, BO et Bb forment un faisceau harmonique et déterminent sur l'axe des x une droite cb divisée harmoniquement par les points O et I : c'est dire que les points O et I sont réciproques par rapport au cercle Ib.

98. *Problème général.* — Soit à construire une parabole de degré m déterminée par m conditions, savoir : un certain nombre de points A, B, C... et les tangentes en plusieurs d'entre eux. Prenons l'un de ces points A comme origine des coordonnées ; la courbe cherchée aura une équation de la forme $y = x\,f(x)$; le problème serait résolu si on avait la courbe $y_1 = f(x)$ (n° 70) ; nous allons démontrer que la courbe y_1, qui est évidemment une parabole de degré $m-1$, est déterminée par m conditions. En opérant comme au n° 94, il est évident d'abord que chaque point de la courbe y, autre que l'origine, fournira un point de la courbe y_1, à cause de la relation $y_1 = \frac{y}{x}$; d'autre part (n° 96), chaque tangente à la courbe y, donnera une tangente à la courbe y_1. A chaque condition de la courbe y, correspond donc une condition de la courbe y_1, sauf le point A pris pour origine : ce point ne fournit un point de la courbe y_1 que lorsque l'on donne en même temps la tangente à la courbe y. Il résulte de là que la courbe y_1 est déterminée par m conditions. En opérant sur la

courbe y_1 comme sur la courbe y, on ramènera le problème au tracé d'une parabole de degré $m-2$, et en continuant de la même manière, on sera ramené à la construction d'une droite déterminée par deux conditions.

§ 6. Construction des hyperboles.

99. *Méthode générale.* — La méthode des deux paragraphes précédents permet aussi de construire une hyperbole de degré m, connaissant $m+1$ conditions. Les constructions à employer sont identiques à celles qui s'appliquent au tracé des paraboles, mais elles doivent s'effectuer en sens inverse. Plus généralement ces constructions s'appliquent au tracé des courbes dont l'équation est de la forme :

$$y = \frac{ax^m + bx^{m-1} + \ldots + l}{x^n}$$

et qui sont déterminées par des conditions suffisantes.

100. *Construire une section conique à branches infinies, connaissant une asymptote et* 3 *points.*

Soient (fig. 43) A, B, C les 3 points donnés, oy l'asymptote. Prenons AB comme axe des x, l'axe des y étant parallèle à l'asymptote. Joignons BC et provisoirement prenons A comme origine ; en multipliant les ordonnées de la droite BC par ses abscisses, nous obtiendrons une parabole du second degré passant par les points A et B ; et si, pour opérer cette multiplication (n° 70), nous prenons A comme pôle et l'ordonnée Cc comme axe du diagramme, le point C sera aussi un point de la parabole : cela résulte à l'évidence de l'application de la construction générale.

Cette parabole $AM'B$ étant tracée, transportons l'origine au point O, en prenant l'asymptote pour axe

des y, et divisons les ordonnées de la parabole $AM'B$ par ses abscisses ; si pour opérer cette division (n° 73), nous prenons O comme pôle et Cc comme axe du diagramme, la nouvelle courbe passera par les 3 points A, B, C.

La parabole $AM'B$ ayant une équation de la forme $y = ax^2 + bx + c$, la courbe obtenue AMB a pour équation

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{x}$$

C'est la forme de l'équation d'une hyperbole du second degré asymptote à l'axe des y ; cette courbe est donc la solution du problème proposé.

Si nous joignons un point de la parabole $AM'B$ à l'origine O, la droite obtenue détermine sur l'axe Cc l'ordonnée du point correspondant de l'hyperbole AMB; il résulte de là que l'on obtiendra l'ordonnée maximum ou minimum de l'hyperbole en menant à la parabole une tangente oM' passant par le point O ; l'ordonnée $M''c$ ou Mm de l'hyperbole correspondant au point M de la parabole est le maximum ou le minimum cherché. L'abscisse Om de l'ordonnée maximum ou minimum satisfait à la relation suivante :

$$\overline{om}^2 = \overline{oA} \times \overline{oB}.$$

En effet, considérons la parabole comme résultant de la multiplication des ordonnées de la droite BC par ses abscisses ; la droite BC est elle-même sa tangente en tous ses points ; la propriété du n° 97 se traduit par conséquent par la relation

$$\overline{om}^2 = oA \times oB$$

101. *Autre construction d'une section conique à branches infinies.*

L'hyperbole du second degré peut aussi être décrite de la manière suivante : Si on déplace une ordonnée *Mm* (fig. 44) parallèlement à elle-même et dans le sens de l'axe des x; si on fait tourner le rayon *AM* de telle manière que le point *M'* où ce rayon coupe une droite fixe *Bo'* se déplace uniformément lorsque l'ordonnée *Mm* se déplace aussi uniformément, le point *M* décrit une hyperbole du second degré passant par le point *A* et dont l'asymptote est parallèle à l'axe des y

Pour démontrer cette propriété, considérons le rayon *AM* comme rayon d'un diagramme dont l'axe serait une certaine droite $o'y'$ parallèle à l'axe des ordonnées. Soit y' l'ordonnée *O' M''* de ce diagramme relative au rayon *AM* qui détermine un point dont l'abscisse est x; on peut considérer (n° 70) *Mm* comme représentant le produit $y'x$; on a donc en appelant y l'ordonnée de la courbe engendrée par le point *M* : $y = y'x$.

D'après la construction, à une valeur de x correspond une valeur de y' et réciproquement; la relation qui unit y' et x est donc du premier degré par rapport à ces deux variables et en la résolvant par rapport à y' on aura :

$$y' = \frac{ax + b}{cx + d}$$

En remplaçant y' par sa valeur dans la valeur de y on obtient

$$y' = \frac{ax^2 + bx}{cx + d}$$

C'est l'équation d'une hyperbole du second degré dont l'asymptote est parallèle à l'axe des y. La manière la plus simple de faire glisser *M'* et *m* uniformément est de déplacer la droite *M'm* parallèlement à elle-même ; en adoptant ce mode de génération, le point *B* est un point de la courbe.

La position de l'asymptote, s'obtient facilement en cherchant le rayon AM qui donne le point M à l'infini ; cela se présente lorsque ce rayon devient en Ao' parallèle à Mm, le point m venant alors en o, point de l'asymptote cherchée.

Entre les points A et B ou y est nul, y passe par un maximum ou un minimum ; l'abscisse Om qui est ce maximum ou minimum est donnée par l'équation

$$\overline{om}^2 = oA \times oB$$

Comme les points m et M' décrivent des chemins proportionnels, on a aussi :

$$\overline{o'M'}^2 = o'A' \times o'B$$

102. *Problèmes.* — On peut, au moyen de la génération qui fait l'objet du numéro précédent construire une hyperbole du second degré, connaissant une asymptote en direction et quatre conditions. Prenons comme exemple le problème suivant : construire une hyperbole du second degré dont on connaît deux points, les tangentes en ces points et la direction d'une asymptote. Supposons que l'hyperbole demandée soit celle qu'engendre le point M de la fig. 44 ; on donne les points A et B, les tangentes en ces points et l'axe des y.

La tangente au point A est évidemment la droite AA' parallèle à mM' ; car si le point m se rapproche indéfiniment du A, le corde $A'M$ devient infiniment petite et a pour limite la tangente en A qui se confond ainsi avec AA'. Si le point M' se rapproche indéfiniment du point B, la droite MM' diffère infiniment peu d'être parallèle à l'axe des x ; on peut donc sans changer la tangente en B à la courbe décrite, remplacer $M'M$ par une parallèle MK à l'axe des x ; mais alors le triangle $kM'm$ reste semblable à lui-même et le point K décrit

une droite ; cette droite est la tangente à l'hyperbole au point B. En menant $A'R$ parallèlement à l'axe des x, on détermine le point R où cette tangente coupe l'axe Ay.

Nous pouvons maintenant résoudre le problème proposé ; on connaît les tangentes AT, TB et l'axe Ay parallèle à l'asymptote ; par le point R, intersection de la tangente BT avec l'axe Ay, menons une parallèle à l'axe des x coupant la tangente AT en A' ; on obtient la droite BA' que décrit le point M' ; la direction de $M'm$ est parallèle à la tangente AA' : le mode de génération de l'hyperbole est complétement déterminé.

CHAPITRE V

Applications à la mécanique.

§ 1er. — Moments de divers ordres des surfaces planes.

103. *Problème à résoudre.* — On appelle moment de degré n d'une surface par rapport à un axe la somme des éléments infiniment petits de cette surface multipliés par la $n^{ième}$ puissance de leur distance à cet axe. Dans cette définition sont compris les moments statiques et les moments d'inertie qui sont respectivement les moments du premier et du second degré.

Une surface quelconque $ABba$ (fig. 45) peut toujours être considérée comme engendrée par l'ordonnée mobile Mm d'une courbe AB rapportée à une autre courbe ab prise comme ligne de repère. Soit Aa une ordonnée fixe, position initiale de l'ordonnée mobile Mm ; portons, à partir d'un axe $o_n x_n$, sur la direction

de l'ordonnée Mm, une longueur $M_n m_n$ proportionnelle au moment d'ordre n, autour de l'ordonnée Mm, de la surface $AMma$; le point M_n engendrera une courbe que nous appellerons courbe des moments d'ordre n. La construction graphique des courbes de ce genre est le problème que nous nous proposons de résoudre.

104. *Théorème. La ligne des moments de degré* n *est l'intégrale de la ligne des moments d'ordre* n — 1 *multipliée par* n.

Soit M_n le moment de degré n, M_{n-1} le moment de degré n — 1 d'une surface $AMma$ comprise entre une ordonnée fixe x_0 et une ordonnée mobile x. Il s'agit de démontrer que :

$$M_n = n \int_{x_0}^{x} M_{n-1}\, dx.$$

D'après la définition des moments et en prenant pour élément infiniment petit le rectangle indiqué par des hachures sur la figure 45, on a :

$$M_n = \int_{x_0}^{x} f(x')\, dx' \,(x - x')^n ;$$

en dérivant cette intégrale d'après les règles connues, on obtient :

$$\frac{dM_n}{dx} = n \int_{x_0}^{x} f(x')\, dx' (x - x')^{n-1} = n\, M_{n-1}$$

En remarquant que M_n s'annule pour $x = x_0$, on en déduit :

$$M_n = n \int_{x_0}^{x} M_{n-1}\, dx$$

ce qu'il fallait démontrer.

105. *Tracé des lignes de moments.* — Si dans la formule

$$M_n = \int_{x_0}^{x} f(x')\,dx'\,(x - x')^n$$

on fait $n = o$, on trouve :

$$M_o = \int_{x_0}^{x} fx'\,dx',$$

c'est-à-dire, que le moment de degré 0 est identique avec l'intégrale première : la courbe M_o s'obtiendra donc par une simple intégration. Si dans la formule

$$M_n = n \int_{x^o}^{x} M_{n-1}\,dx$$

on fait successivement $n = 1, 2, 3$, etc., on obtient :

$$M_1 = \int_{x_0}^{x} M_o\,dx$$

$$M_2 = 2 \int_{x_0}^{x} M_1\,dx$$

$$M_3 = 3 \int_{x^o}^{x} M_2\,dx, \text{ etc...};$$

En prenant des bases d'intégration convenables, on obtiendra immédiatement M_1, M_2, M_3... par une série d'intégrations graphiques successives (n° 55).

106. *Des constantes d'intégration.* — Pour effectuer les intégrations dont il est question dans le numéro précédent, il faut connaître un point de chaque inté-

grale ; il est évident d'après la définition des moments que pour $x = x_0$, abscisse de l'ordonnée fixe Aa, tous ces moments sont nuls ; on a donc un point de chaque courbe des moments, ce qui permet d'effectuer toutes les intégrations.

Cependant nous avons vu (n° 65) que des intégrales quelconques pouvaient donner des intégrales particulières en les rapportant à des lignes convenablement choisies ; supposons donc que nous ayons intégré la courbe AB en prenant à chaque intégration un point arbitraire pour premier point ; (fig. 45) $A_0\,B_0$, $A_1\,B_1$, $A_2\,B_2$... les intégrales ainsi obtenues ; il s'agit de déterminer à quelles lignes de repère il faudra les rapporter, pour avoir les moments de la surface $AMma$ autour de l'ordonnée mobile Mm. Il est d'abord évident que ces lignes de repère doivent passer respectivement par les points A_0, A_1, A_2... puisqu'au point a la surface est nulle ainsi que les moments ; on conclut de là que la ligne de repère de A_0B_0 est la droite $A_0\,x_0$ menée parallèlement à l'axe des x par le point A_0 ; pour ce qui concerne $A_1\,B_1$, $A_2\,B_2$..., d'après le numéro 65, les courbes de repères sont les intégrales successives de $A_0\,x_0$; ainsi la ligne de repère de $A_1\,B_1$ est une droite $A_1\,x_1$, intégrale de $A_0\,x_0$; la ligne de repère de $A_2\,B_2$ est une parabole du second degré $A_2\,x_2$ intégrale de $A_1\,x_1$; plus généralement la ligne de repère de la courbe des moments d'ordre n est une parabole du $n^{\text{ième}}$ degré intégrale, $n^{\text{ième}}$ de $A_0\,x_0$.

Ces différentes lignes de repère jouissent de la propriété remarquable d'être osculatrices à la courbe intégrale à laquelle elles correspondent. Démontrons, par exemple, que la ligne de repère $A_n\,x_n$ relative à $A_n\,B_n$ est la parabole du $n^{\text{ième}}$ degré osculatrice à cette courbe $A_n\,B_n$; pour y arriver, il suffit de faire voir que ces deux courbes ont un contact d'ordre n

(puisque l'équation d'une parabole de degré n contient $n+1$ paramètres) ou ce qui revient au même, de faire voir qu'aux environs du point A_n, M_n est infiniment petit d'ordre $n+1$. Cette dernière propriété est évidente puisque M_n est le moment d'ordre n d'une surface infiniment petite par rapport à un axe infiniment rapproché.

107. *Moments d'une portion de surface comprise entre deux ordonnées fixes autour d'une ordonnée quelconque.* — Soient (fig. 45) Aa et Bb deux ordonnées fixes ; on veut avoir les moments de la surface $ABba$ autour d'une ordonnée quelconque Cc. Pour fixer les idées, considérons les moments du second degré ; soient $A_2 x_2$, $B_2 y_2$ les paraboles du second degré osculatrice à la courbe $A_2 B_2$ aux poînts A_2 et B_2 ; d'après le numéro précédent les moments autour de l'ordonnée Cc des surfaces $ACca$ et $BcCb$ sont représentées par $C_2 x_2$ et $C_2 y_2$; or le moment que l'on cherche est précisément la différence de ces deux moments ; il est donc représenté par $y_2 x_2$. En généralisant ce résultat on reconnaît que le moment de degré n de la surface $ABba$ autour d'une ordonnée quelconque est représenté par la portion de cette ordonnée comprise entre les paraboles de degré n osculatrices $n+1$ de la courbe AB aux points correspondants aux points A et B. Ces paraboles osculatrices s'obiennent en intégrant les lignes $A_0 x_0$ et $B_0 y_0$.

108. *Remarque.* — Il arrive que l'on demande le moment d'une surface autour d'une ordonnée fixe ; dans la formule

$$M_n = \int_{x_0}^{x} f(x')\,(x-x')^n dx'$$

x est alors une constante : c'est l'abscisse de l'ordon-

née fixe. On commencera par construire la courbe $\varphi x' = f(x')\,(x-x')^n$ par la construction du n° 80 ; le problème est alors ramené à une seule intégration

$$M_n = \int_{x_0}^{x} \varphi\,(x')\,dx' \quad (1)$$

§ 2. — Moments statiques, moments d'inertie, centres de gravité.

109. *Moments statiques.* — Les moments statiques sont les moments du premier degré ; les considérations du paragraphe précédent s'y appliquent complétement. Ainsi ces moments s'obtiendront par une double intégration ; si l'on intègre d'une manière quelconque, il faut rapporter l'intégrale $A_1 B_1$ (fig. 45) à la parabole du premier degré osculatrice à cette intégrale au point A_1 : cette dernière est précisément la tangente au point A_1. Si l'on veut avoir le moment d'une surface *ABba* comprise entre deux ordonnées autour d'une ordonnée quelconque, ce moment est représenté par la portion de cette dernière comprise entre les tangentes à l'intégrale aux points A_1 et B_1.

110. *Moments d'inertie.* — Les moments d'inertie sont les moments du second degré ; ils s'obtiennent par une triple intégration ; à cause de la formule $M_2 = 2\int M_1\,dx$, il faut effectuer la troisième l'intégration avec une base d'intégration deux fois plus petite que si on voulait trouver $\int M_1\,dx$. Lorsqu'on se propose de déterminer le moment d'inertie d'une surface

(1) L'idée de ramener à une quadrature le calcul des moments des surfaces n'est pas nouvelle ; elle se trouve exposée dans le traité de statique de M. Collignon, n° 205.

autour d'un axe connu, il est alors préférable d'employer la méthode du n° 108.

111. *Centres de gravité* — Soit (fig. 45) à chercher le centre de gravité de la surface *ABba*; soit $A_1 B_1$ l'intégrale seconde, $A_1 x_1$, $B_1 y_1$ les tangentes aux points A_1 et B_1; nous avons vu (n° 109) que le moment du premier degré de la surface *ABba* autour d'une ordonnée quelconque *Cc* était représenté par $y_1 x_1$, portion de cette ordonnée comprise entre les tangentes $A_1 x_1$ et $B_1 y_1$; il résulte de là qu'autour de l'ordonnée *Gg* qui passe par le point d'intersection de ces tangentes le moment est nul, et par suite *Gg* passe par le centre de gravité. De là le théorème suivant : la ligne d'ordonnée du centre de gravité d'une surface *ABba* passe par le point d'intersection des tangentes à l'intégrale seconde de *AB* aux points correspondants aux points *A* et *B*. Ce théorème permet de trouver la ligne d'ordonnée du centre de gravité de la surface considérée; en général, cela suffit dans les applications, mais si on voulait déterminer complétement le centre de gravité, il faudrait en chercher la ligne d'abscisse par la même méthode.

112. *Application à une surface polygonale.*

Soit (fig. 46) le polygone *ABCDdcba*; nous nous proposons d'en trouver le moment, la surface et le centre de gravité. Divisons la surface en trapèzes au moyen d'ordonnées que nous désignerons par verticales pour simplifier le langage. Nous considérons la ligne *ABCD* comme une ligne primitive rapportée à la ligne *abcd* prise comme ligne de repère; la surface cherchée s'obtiendra par une simple intégration cette intégration s'effectuera par l'un ou l'autre des procédés des n°s 35 et 36; il y a une petite modification à introduire, il faut recourir à une ligne des pôles (n° 46). Appliquons par exemple la méthode du polygone circonscrit; soit,

à cette fin, $A_1 x_1$ la ligne de repère de la première intégrale, oy l'axe du diagramme, pP la ligne des pôles ; projetons les points A, B, C, D en A', B', C', D' sur oy, les points a, b, c, d en a', b', c', d' sur pP ; les lignes $a'A'$, $b'B'$, $c'C'$, $d'D'$ donnent les directions des tangentes à l'intégrale. Les arcs AB, BC, CD de la ligne primitive ont pour abscisse moyenne, l'abscisse de leurs points milieux ; on en conclut que les verticales R_1r_1, S_1s_1, T_1t_1 des sommets du polygone circonscrit à l'intégrale cherchée sont à égale distance des ordonnées extrêmes des arcs de la courbe primitive ; ayant tracé ces verticales, on obtient aisément le polygone $A_1R_1S_1T_1D_1$ en partant du point A_1 où l'intégrale est nulle ; la surface cherchée est représentée par la droite D_1d_1. La ligne intégrale $A_1B_1C_1D_1$ permet aussi de trouver la surface comprise entre deux ordonnées quelconques ; cette surface est donnée par l'accroissement de l'intégrale entre les ordonnées dont il s'agit ; il est nécessaire alors de tracer exactement les points de l'intégrale situés sur ces ordonnées, ce qui se fait très-facilement soit en subdivisant les lignes AB, BC, CD en plusieurs segments soit en remarquant que les arcs de l'intégrale sont des arcs paraboliques complétement déterminés.

On obtient les moments par une deuxième intégration ; nous pouvons, par exemple, effectuer cette deuxième intégration par la méthode du polygone circonscrit. Soient $o'y'$ l'axe du diagramme, P_1 le pôle, A_1', B_1', C_1', D_1' les projections sur cet axe des points A_1, B_1, C_1, D_1 ; P_1A_1', P_1B_1', P_1C_1', P_1D_1' sont les directions des tangentes à l'integrale seconde ; les verticales R_2r_2, S_2s_2, T_2t_2 des sommets du polygone circonscrit cherché ont pour abscisse les abscisses moyennes des arcs A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1. Considérons par exemple l'arc C_1D_1 ; son ordonnée moyenne est l'ordonnée du centre de

gravité k du triangle $C_1T_1D_1$ (n° 19) ; en menant (n° 31) une horizontale It_2 par le milieu de la corde C_1D_1 et une parallèle à cette corde par le point K, on détermine le point t_2 qui donne l'abscisse moyenne de l'arc C_1D_1 ; ayant de cette manière trouver les ordonnées R_2r_2, S_2s_2, T_2t_2 on obtient aisément le polygone $A_2R_2S_2T_2D_2$ en partant d'un point quelconque A_2 ; ce polygone détermine complétement l'intégrale seconde cherchée qui est formée d'arcs paraboliques du troisième degré dont on connaît les extrémités et les tangentes extrêmes.

Si on veut obtenir les moments des surfaces comprises entre l'ordonnée fixe Aa et une ordonnée quelconque prise pour axe des moments, il faut adopter comme ligne de repère la tangente A_2R_2 au point A_2 ; ainsi D_2d_2 représente le moment de la surface $ABCDdcba$ autour de l'ordonnée Dd ; C_2c_2 donne le moment de la surface $ABCcba$ autour Cc.

Les moments de la surface $ABCDdcba$ comprise entre les deux ordonnées fixes Aa et Dd autour d'une verticale quelconque Mm sont donnés par les ordonnées M_2m_2 de la tangente T_2D_2 par rapport à la tangente A_2R_2 ; la verticale Gg qui passe par l'intersection de ces deux tangentes est la verticale du centre de gravité de la surface.

Enfin la verticale du centre de gravité d'un trapèze tel que $ABba$ est la verticale R_2r_2 dont l'abscisse est l'abscisse moyenne de l'arc de l'intégrale première, puisque c'est sur cette verticale que se coupent les tangentes aux points A_2 et B_2 de l'intégrale seconde.

113. *Autre construction.* — On peut construire l'intégrale seconde par un autre procédé qui repose sur le principe suivant : étant donné (fig. 47) un arc de courbe AB, la direction de la corde A_1B_1 de l'intégrale de cet arc de courbe ne dépend que de l'ordonnée moyenne de l'arc AB, ou ce qui revient au même, de la

surface *ABba*; il suit de là qu'on peut remplacer l'arc *AB* par tout autre, donnant une surface équivalente; l'arc A_1B_1 sera modifié, mais les points A_1 et B_1 ne seront pas changés. Si en particulier l'arc modifié part du point *A* pour aboutir au point *B*, les tangentes aux points A_1, B_1 de l'intégrale seconde ne seront pas changées, les directions de ces tangentes dépendant seulement des ordonnées *Aa* et *Bb*.

Appliquons ce principe général au cas d'un arc parabolique du second degré déterminé par ses tangentes extrêmes *AT* et *TB* (fig. 47). A cet effet, divisons l'espace compris entre les ordonnées *Aa*, *Bb* en trois parties égales par les ordonnées *mm'*, *nn'*; menons par les points *A*, *T*, *B* les parallèles à l'axe des *x Am*, *m'n'*, *nB*; nous allons démontrer que l'on peut remplacer l'arc *AB* par la ligne brisée *Amm'n'nB*.

Cette propriété résulte déjà de la construction générale du n° 69, mais il n'est pas inutile d'en donner ici une démonstration moins abstraite.

Soient $y_0\ y_1\ y_2$ les ordonnées respectives des points *A*, *T*, *B*; l'ordonnée moyenne de l'arc *AB* étant l'ordonnée du centre de gravité du triangle *ATB* a pour valeur

$$y_m = \frac{y_0 + y_1 + y_3}{3}$$

on en déduit que :

$$\text{surface } ABba = \frac{y_0 + y_1 + y_3}{3} \times ab.$$

La figure montre immédiatement que l'on a aussi :

$$\text{surface } A\,mm'n'n\,Bba = y_0 \frac{ab}{3} + y_1 \frac{ab}{3} + y_2 \frac{ab}{3}$$

et on en déduit que :

$$\text{surface } ABba = \text{surf. } Amm'n'nBba.$$

Nous pouvons donc énoncer la règle suivante : L'intégrale d'un arc de parabole AB (fig. 47) déterminé par ses tangentes extrêmes AT et TB s'obtient en remplaçant le trapèze curviligne $ABba$ par trois rectangles de base $\frac{ab}{3}$, et ayant pour hauteurs respectives les ordonnées des points A, T et B ; on obtient ainsi une ligne brisée de trois côtés dont les extrêmes sont les tangentes aux extrémités de l'arc de l'intégrale cherchée.

Si après ces préliminaires nous reprenons la fig. 46, en appliquant la méthode précédente aux arcs A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 on obtient le polygone $A_2\,m\,n\,p\,q\,r\,s\,D_2$; les côtés indiqués en trait plein sont tangents à l'intégrale ; les côtés indiqués en trait pointillé sont des lignes auxiliaires n'ayant aucune signification.

114. *Problème, Construire un trapèze ABba (fig. 48) à bases verticales, connaissant la surface, la verticale du centre de gravité et l'un des côtés non parallèles* ab.

Supposons le problème résolu et proposons-nous de trouver la surface et la verticale du centre de gravité du trapèze connu $ABba$. Ces éléments s'obtiendront par la construction du n° 112. L'intégrale première A_1rB_1 donnera la surface du trapèze en B_1b_1 ; la verticale du centre de gravité est la verticale qui passe par le point d'intersection des tangentes extrêmes de l'intégrale seconde, mais nous avons déjà fait remarquer que cette verticale est précisément celle qui détermine l'abscisse moyenne de l'arc A_1B_1, de sorte qu'il est inutile dans ce cas d'effectuer la deuxième intégration.

Si maintenant nous reprenons le problème qui nous occupe, nous reconnaîtrons qu'il suffit de tracer dans un autre ordre les lignes de la fig. 48. Nous connaissons la ligne B_1b_1 qui représente la surface, on en déduit la corde A_1B_1 et son point milieu I ; on connaît la verti-

cale R_2r_2, on mène Ir_2 horizontalement, r_2K parallèlement à la corde A_1B_1 et l'on obtient ainsi le point K, centre de gravité du triangle A_1rB_1. Ce triangle détermine aisément en prenant $Kr = 2IK$. Connaissant l'intégrale A_1rB_1 une simple dérivation donne la droite AB. Soient pP la ligne des pôles, oy l'axe du diagramme ; on mène par les points a' et b', projections des points connus a, b sur la ligne des pôles, $a'A'$ parallèlement à A_1r, $b'B'$ parallèlement à B_1r; les points A' et B' donnent immédiatement les points A et B.

115. *Autre construction de la verticale du centre de gravité d'un trapèze à bases verticales.* — Cette verticale peut s'obtenir par le procédé du numéro précédent ; mais on peut aussi la trouver par la construction élégante qui suit : divisons (fig. 49) le côté ab d'un trapèze à bases verticales en trois parties égales ; soient e, e' les points de division ; les droites Ae, $e'B$ se coupent en un point de la verticale cherchée.

Pour démontrer cette propriété, nous allons faire voir que $Ae\,e'B$ est l'intégrale seconde de AB ou plutôt le polygone de trois côtés, analogue au polygone $A_2m_2n_2B_2$ de la fig. 46, dont les côtés extrêmes sont les tangentes à cette intégrale Pour y arriver prenons I, milieu de ab, comme pôle de la première intégration, bB comme axe du diagramme ; IB, IA' sont les directions des tangentes extrêmes à l'intégrale première; si nous prolongeons IA' en IA_1, A_1IB sera cette intégrale première si on prend A_1 comme premier point et pour ligne de repère une parallèle à ab. Effectuons la seconde intégration par la méthode du n° 113 en prenant le point e' comme pôle et bB comme axe du diagramme ; le polygone qui détermine l'intégrale seconde a ses trois côtés parallèles à $e'A'_1$, $e'b$, $e'B$, les points A_1', b, B étant les projections parallèlement à ab des points A_1, I, B. On peut démontrer facilement que la direction

$e'A_1'$ est parallèle à Ae ; remarquons en effet que les triangles Aea et $be'A_1'$ ont deux côtés égaux et parallèles à cause de :

$$ae = e'b$$

$$Aa = A'b = A_1a = A'_1b ;$$

on en conclut que les troisièmes côtés sont aussi parallèles, c'est-à-dire que Ae est parallèle à $A_1'e'$. Si pour tracer l'intégrale seconde, nous partons du point A comme premier point, nous trouvons le polygone $Aee'B$; les cotés Ae, $e'B$ sont donc les tangentes extrêmes à l'intégrale seconde et se coupent en un point de la verticule du centre de gravité : c'est ce qu'il fallait démontrer.

116. *Remarques.* — 1° Si au lieu de prendre e' comme pôle de la seconde intégration, on prend un point quelconque de ab, $e'b$ ne changera pas de direction ; on peut donc supposer que le côté ee' de l'intégrale seconde reste invariable ; les deux autres côtés Ae, $e'B$ changeront de direction et se placeront par exemple en Ce et $e'D$ et il est évident que Ce et $e'D$ se couperont encore sur la verticale du centre de gravité du trapèze. Les deux intégrales secondes $Aee'B$ et $Cee'D$ jouissent de la propriété du n° 65 savoir : que les tangentes et cordes correspondantes se coupent sur une même ligne droite ; cette droite est évidemment la droite ab, puisque e et e' sont les points d'intersection des côtés correspondants Ae et eC, Be' et $e'D$; on en conclut que les cordes correspondantes AB et CD se coupent en un point o sur le prolongement de ab.

2° L'intégrale $Cee'D$ peut être examinée à un autre point de vue ; on peu la considérer comme l'intégrale seconde de CD et on en conclut que les trapèzes $ABba$ et $CDba$ qui ont leurs centres de gravité sur la même verticale ont les côtés non communs AB et CD qui se coupent en un même point du côté commun ab.

3° Si en particulier on prenait le point *I* comme pôle de la deuxième intégration, les tangentes extrêmes *Ce*, *De'* auraient pour direction *IB* et IA_1' ; cette dernière direction IA_1' est d'ailleurs parallèle à *AI* à cause de l'égalité des triangles *AIa* et bIA_1'. On obtient donc aussi un point de la verticale du centre de gravité en menant par les points *e*, *e'* des parallèles aux droites *AI* et *IB*.

117. *Autre construction du problème du n°* 114

Soit à chercher (fig. 49) le trapèze *ABba*, connaissant *ab*, la surface de ce trapèze et la verticale *Rr* du centre de gravité Au moyen de la surface, on obtient aisément l'ordonnée moyenne *II'* du trapèze inconnu : il suffit, pour y arriver, de diviser graphiquement cette surface par la distance des bases du trapèze ; on connaît donc déjà le point *I'* de la droite *AB*. Joignons un point quelconque *s* de la verticale donnée *Rr* aux points *e* et *e'* qui divisent *ab* en trois parties égales ; d'après la remarque précédente la droite *CD* que l'on obtient de cette façon va rencontrer *ab* au même point *O* que la droite cherchée *AB* ; cette dernière est donc déterminée par les deux points *O* et *I*.

118. *Étant donné un trapèze à bases verticales* ABba (*fig.* 50) *construire un triangle sur* AB *comme base ayant même surface et son centre de gravité sur la même verticale que le trapèze.*

Première méthode. — On cherche par les procédés connus la verticale *Rr* du centre de gravité du trapèze donné et par conséquent aussi du triangle cherché ; en prenant $Is = 3\,Ir$ on obtient en *sS* la verticale du sommet de ce triangle : cela résulte de ce que le centre de gravité de ce triangle est au 1/3 de la médiane *SI'* à partir de *I'*. En prenant $Ss = 2II'$, on obtient le sommet inconnu du triangle.

Deuxième méthode. — Par les points *e*, *e'* (fig. 50) qui

divisent *ab* en trois parties égales, menons *eR*, *e'R* parallèlement à *AI* et à *IB*; d'après la troisième remarque du n° 116, le point *R* est sur la verticale du centre de gravité du trapèze. Si nous menons aussi *aS* et *Sb* parallèlement aux directions *AI* et *IB*, les figures *Ree'* et *Sab* ainsi obtenues sont semblables et ont *I* comme centre de similitude; le rapport de similitude est 3; on en conclut que *I*, *R*, *S* sont trois points en ligne droite et que

$$1S = 3IR$$

Il en résulte que le triangle *ASB* a son centre de gravité sur la même verticale que le trapèze donné; nous allons démontrer que ce triangle est aussi équivalent au trapèze et par conséquent que c'est le triangle cherché.

Pour y arriver, remarquons que le triangle *ASB* et le trapèze *ABba* ont une partie commune *AIB* et que les parties communes sont équivalentes; on a en effet : surface *AIS* = *AIa*, à cause de *aS* parallèle à *AI*; on a aussi : surface *BIS* = surface *BIb* à cause des parallèles *bS* et *IB*.

On peut donc énoncer la règle suivante : si par les extrémités *a*, *b* d'un côté d'un trapèze *ABba* à bases verticales on mène des parallèles aux droites *AI*, *IB* qui joignent le milieu du côté *ab* aux extrémités de l'autre côté *AB*, ces parallèles se rencontrent au sommet d'un triangle *ASB* ayant même surface que le trapèze donné et son centre de gravité sur la même verticale.

119. *Problème inverse.*

Supposons que l'on donne le triangle *ABS* (fig. 50); on demande de construire le trapèze *ABba* ayant un côté commun *AB*, même surface et le centre de gravité sur la même verticale que le triangle donné. Prenons

I' milieu de AB; portons $II' = \frac{Ss}{2}$; menons Sa, Sb parallèlement aux directions AI et IB; on obtient le côté ab du trapèze cherché; comme vérification ce côté doit passer par le point I.

§ 3. Moments fléchissants et efforts tranchants.

120. *Définitions.* — Soient ab (fig. 51) une poutre droite sollicitée normalement à son axe par des forces situées dans le plan de symétrie de la poutre; nous supposons la poutre entièrement libre, les appuis, s'il y en a, étant remplacés par des réactions convenables. Soit c une section quelconque de la poutre; les forces qui sollicitent le tronçon bc peuvent se transporter au centre de figure de la section c où elles donnent une résultante égale à la somme algébrique des composantes; c'est cette résultante que l'on appelle l'effort tranchant de la section c; on le désignera par K. En transportant les forces au point c, on introduit des couples dont chacun d'eux a pour moment le moment de la force autour du point c; tous ces couples se combinent en un couple résultant dont le moment est la somme des moments des couples composants ou ce qui revient au même, la somme des moments des forces autour du point c; c'est ce moment que l'on appelle moment fléchissant; on le désigne par M. Quant aux signes de l'effort tranchant et des moments fléchissants, ils dépendent de certaines conventions; nous supposerons toujours que l'on combine les forces sollicitant le tronçon situé à droite de la section considérée; l'effort tranchant sera positif s'il agit vers le bas, le moment fléchissant s'il agit dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre. En portant en ordonnées les efforts tranchants et les moments fléchissants, on

obtient deux lieux géométriques : ce sont ces lieux que nous nous proposons de construire. Nous adopterons généralement comme axe des x l'axe de la poutre bx pris dans le sens de droite vers gauche, comme axe des y une perpendiculaire by à l'axe des x. Dans les applications la poutre est presque toujours horizontale, les forces sont verticales ; l'axe des y est pris vers le bas, parce que c'est la direction de la plupart des forces qui sont dues à la gravité.

121. *Charges continuement réparties.*

Supposons que la poutre ab soit sollicitée par des forces infiniment petites et infiniment rapprochées ; pour connaître complétement l'état de sollicitation de la poutre, il faut connaître la charge p par unité de longueur en chaque point ; si nous portons p en ordonnée, nous obtenons une courbe BA qui est la courbe des charges ; soit dx un élément de la poutre, la force qui sollicite cet élément a pour valeur pdx et est représentée par la surface indiquée sur la fig. 51 par des hachures ; il résulte de là que l'effort tranchant en un point quelconque est la surface $CBbc$, que le moment fléchissant au même point est le moment de cette surface autour de la droite Cc ; on en conclut que l'effort tranchant est l'intégrale première de la courbe des charges, que le lieu des moments fléchissants est l'intégrale seconde de la même courbe. On est donc ramené aux tracés étudiés dans les deux paragraphes précédents ; il est toutefois nécessaire d'entrer dans quelques considérations au sujet des forces isolées et de la détermination des constantes.

122. *Cas où il y a des forces isolées.* — D'une manière rigoureuse, il n'y a jamais de forces isolées en pratique ; mais il arrive que, sur une longueur assez petite pour être négligée, agit une charge tellement grande par unité de longueur que, malgré le peu

d'étendue sur laquelle elle existe, elle donne lieu à un effort de grandeur finie : telles sont les réactions des appuis, l'action des roues d'un véhicule. Si dans un cas semblable, on connaissait la courbe des charges, on opérerait comme précédemment; mais habituellement on suppose les actions de cette espèce concentrée en un point où on les remplace par une force isolée. La ligne des *K* est toujours l'intégrale de la courbe des charges, mais pour tenir compte des charges fictivement remplacées par une force isolée, l'intégrale doit subir au droit de chacune de ces forces, une augmentation brusque égale à chacune d'elles. Le lieu des *M* est toujours l'intégrale du lieu des *K;* au droit des forces isolées, il y deux efforts tranchants différents; le diagramme donne deux tangentes au lieu des *M* qui présente ainsi un jarret à chaque force isolée.

123. *Constantes d'intégration.* — Lorsqu'une poutre n'est sollicitée que par des forces connues, la détermination des constantes se fait comme pour les courbes des moments statiques des surfaces (106 et 109). A l'origine droite de la poutre où aucune action n'agit, il est évident que *K* et *M* sont nuls; les lieux des *K* et des *M* partent donc de cette origine si on rapporte ces lieux à l'axe de la poutre. On peut aussi intégrer d'une manière quelconque ; la courbe de repère relative au lieu des *K* est une parallèle à l'axe des x complètement déterminée par la condition que l'effort tranchant est nul à droite de la première force. Celle qui est relative au lieu des *M* est la tangente à l'élément de ce lieu qui précède la première force. Les moments des forces agissant sur une certaine longueur de la poutre sont représentés par les ordonnées comprises entre les tangentes aux éléments du lieu des *M* qui précèdent et qui suivent les forces dont il s'agit; le point d'intersection de ces deux tangentes est un point de la résultante de ces forces (110).

124. *Cas où il y a des réactions inconnues.* — Supposons qu'à l'extrémité droite de la poutre ou portion de poutre considérée, il y ait appui avec ou sans encastrement; en ce point on a $K = K_0$ $M = M_0$; les valeurs K_0, M_0 dépendent des conditions des appuis et ne sont pas connues à priori; dans ce cas on intègre d'une manière quelconque; les lignes de repère relatives aux intégrales que l'on obtient dépendent des valeurs K_0 et M_0 ou ce qui revient au même des conditions des appuis de la poutre. Dans certains cas la détermination de ces lignes de repère se fait avec la plus grande facilité; ainsi dans le cas d'une poutre sur deux appuis les moments fléchissants sont nuls aux extrémités de la poutre, la ligne de repère du lieu des M est la corde de ce lieu. Dans d'autres cas les lignes de repère dépendent de la déformation de la poutre et se déterminent plus difficilement.

Ces questions qui se rapportent plus spécialement à la stabilité des poutres droites seront traitées en détail dans le livre V.

125. *Exemple. Forces isolées sans charge continue.*

Soient (fig. 52) P P' P''... les forces données; prenons A_0 comme premier point de l'intégrale première ou lieu des K; à chaque force isolée la courbe présentera un saut brusque égal en grandeur et en signe à la force isolée; la charge continue étant nulle, l'effort tranchant reste constant entre deux forces isolées consécutives; le lieu des K est donc formé de lignes parallèles à l'axe des x: ce lieu A_0 A B_0 B C_0... s'obtient en portant $A_0 A = P$, $B_0 B = P'$, $C_0 C = P''$...

L'intégrale seconde se trouve par la construction du n° 34. Projetons A_0, B_0, C_0 en A', B', C', sur l'axe du diagramme $o'y'$; prenons $o'P = \lambda$, PA', PB', PC' donne les directions des côtés du polygone a, A_1 B_1 C_1 D_1 d_1 lieu des moments fléchissants.

D'après les lignes de repère que l'on choisira ces lieux pourront avoir plusieurs significations : 1° S'il s'agit d'une poutre libre on prendra $A_o\ x_o$ parallèle à l'axe de la poutre pour ligne de repère du lieu des K, la tangente $A_1\ a_1$ pour ligne de repère du lieu des M; 2° si l'on veut avoir les moments des trois forces $P\ P'\ P''$, on prendra les ordonnées de la tangente $C_1\ D_1$ par rapport à la tangente $A_1\ a_1$; le point T d'intersection de ces deux tangentes est un point de la résultante de ces trois forces.

Remarquons qu'on peut se passer de tracer le lieu des K et construire immédiatement le diagramme des inclinaisons du lieu des M ; il suffit de porter les forces bout à bout, de prendre un pôle quelconque P et de joindre ce pôle aux extrémités des forces ainsi portées (1).

126. *Deuxième exemple. Forces isolées et charges continues uniformément réparties.*

(1) Ce tracé graphique des moments fléchissants dans le cas de forces isolées est exposé dans les ouvrages de statique graphique où on le déduit du polygone funiculaire.

Depuis longtemps déjà M. Boudin, notre savant professeur, donne à l'Université de Gand, une démonstration de ce procédé qui, à l'élégance et à la simplicité, joint l'avantage très-grand de ne reposer sur aucune idée étrangère à la question. Cette démonstration remarquable a été le point de départ de nos recherches sur l'intégration graphique. Il suffisait, en effet, de remarquer que le moment fléchissant est la surface couverte par les efforts tranchants pour reconnaître que le tracé graphique des moments des forces isolées n'est autre qu'une double intégration graphique dans le cas particulier où la première intégration se réduit à une addition.

Une fois en possession de l'idée de l'intégration graphique, il était bien naturel que nous cherchions à en tirer tout le parti possible et il ne nous a pas fallu beaucoup d'efforts pour en déduire les différentes applications de ce mémoire.

Vers l'époque où nous nous occupions de ces recherches paraissait dans les *Annales des ponts et chaussées de France*, la notice bien connue de M. Collignon sur l'intégromètre de M. Deprez ; cette notice se termine par des considérations d'un ordre très-élevé sur l'importance de l'intégration et les différentes opérations qui s'y rattachent; ces considérations ont facilité beaucoup notre travail.

Soient (fig. 53) $A\ C_0\ C\ E_0\ E\ G$ la courbe des charges, P, P', P'' les forces isolées ; la première intégration qui donne le lieu des efforts tranchants s'effectue par le procédé du n° 34. Soit $P_1\ o_1\ y_1$, le diagramme relatif à cette intégration ; projetons A, C, E sur $o_1\ y_1$ en $A'\ C'\ E'$; PA', PC', PE' donnent les directions des côtés du lieu des efforts tranchants ; on obtient ce lieu $A_1\ B_o\ B_1\ C_1\ D_o\ D_1$... en menant $A_1\ B_o$ parallèlement à PA', en portant $B_o\ B_1$ égal à P, en menant $B_1\ C_1$ parallèlement à PA', en menont $C_1\ D_o$ parallèlement à PC', en portant $D_o\ D_1$ égal à P' et ainsi de suite.

La seconde intégration qui donne le lieu des M s'effectue par le procédé n° 36 ; les intégrales des côtés $A_1\ B_o$, $B_1\ C_1$, $C_1\ D_o$... sont des arcs paraboliques que l'on détermine par leurs tangentes extrêmes.

Soit $P_2\ o_2\ y_2$ le diagramme relatif à cette seconde intégration ; soient A_1', B_o', B_1', C_1'... les projetons sur $o_2\ y_2$ des points A_1, B_o, B_1, C_1... ; on obtient le lieu des moments fléchissants cherchés $A_2\ r\ B_2\ s\ C_2$... en menant : $A_2\ r$ parallèlement à PA_1', $r\ B_2$ parallèlement à PB_o', $B_2\ s$ parallèlement PB_1', etc... Les points r, s, t... étant sur les lignes d'ordonnées qui divisent ab, bc, cd... en deux parties égales. Le polygone que l'on obtient est un polygone circonscrit au lieu cherché ; pour le déterminer par un plus grand nombre de points, on peut subdiviser les arcs $A_1\ B_o$, $B_1\ C_1$... avant l'intégration en autant de parties que l'on veut.

Les deux intégrales étant tracées, on peut leur donner plusieurs significations : 1° S'il s'agit d'une poutre entièrement libre on prendra pour lignes de repère $A_1\ x_1$ parallèle à l'axe des x pour les efforts tranchants, $A_2\ x_2$ tangente à l'arc $A_2\ B_2$ pour les moments fléchissants. 2° Si l'on veut avoir les moments des forces qui agissent sur une certaine longueur be, force P comprise, on mènera les tangentes $B_2\ L'$ et

E_2 L' aux arcs qui précédent et qui suivent ce groupe de forces ; le moment de ce groupe autour d'une ligne d'ordonnée quelconque Mm est représenté en grandeur et en signe par la portion de cette ordonnée comprise entre la tangente E_2 L' et la tangente B_2 L'. Si la force P n'était pas comprise dans le groupe des forces considérées, il faudrait remplacer la tangente BL' par BL.

Le point L' intersection de deux tangentes au lieu des M est un point de la résultante des forces comprises entre les points de contact de ces deux tangentes.

127. *Connaissant le lieu des* M, *trouver le lieu des* K *et l'état de sollicitation.*

Il suffit pour résoudre ce problème, d'effectuer deux dérivations successives.

1° Si le lieu des M est un polygone a_1 A_1 B_1 C_1... (fig. 52), on trace l'axe du diagramme o' y', on prend Po' égal à une base qui dépend des échelles, on mène par le pôle P des parallèles PA', PB', PC'.. aux côtés du lieu des M; on en déduit aisément le lieu des efforts tranchants A_o A B_o B...; les forces sollicitantes sont des forces isolées représentées A' B', B' C'... La ligne de repère du lieu des K est la dérivée de celle du lieu des M ; si A_1 x_1 est la ligne de repère du lieu des M, celle du lieu des K sera A_o x_o.

2° Si le lieu des M est une courbe quelconque, il suffit de mener les rayons du diagramme parallèles aux tangentes à cette courbe; les ordonnées du diagramme relatives à ces rayons donnent les efforts tranchants ; en faisant la même opération sur le lieu des K on obtient la courbe des charges. Lorsque le lieu des M présente un point angulaire, les deux tangentes en ce point donne chacune une un effort tranchant ; la différence de ces deux efforts tranchants est la force isolée

qui agit au droit du jarret. Lorsque le lieu des M est formé d'arcs paraboliques du second degré, on n'applique la construction qu'aux tangentes extrêmes de chacun des arcs ; on obtient ainsi les extrémités de l'arc correspondant du lieu des K ; ce dernier arc étant une ligne droite est complètement déterminé par deux points. Soit (fig. 53) un lieu des M, $A_2\, r\, B_2\, s\, C_2$... formé d'arcs paraboliques $A_2\, B_2$, $B_2\, C_2$. . ; on mène PA_1' PB_0 PB_1'... parallèlement aux tangentes $A_2\, r$, $B_2\, r$, $B_2\, s$....; on en déduit aisément le lieu des K, $A_1\, B_0\, B_1\, C_1$... En menant sur un nouveau diagramme PA', PC'... parallèlement aux côtés $A_1\, B_0$, $B_1\, C_1$..., on obtient la courbe des charges ; les forces isolées sont données par les variations brusques de l'effort tranchant.

128. *Remarques*. — 1° Il résulte des considérations qui précèdent qu'en intégrant deux fois la courbe des charges, on obtient les lieux des K et des M quelles que soient les conditions des appuis, la position et la grandeur de la poutre, ces éléments n'exerçant une influence que sur les lignes de repère.

2° Les mêmes charges peuvent donner lieu à une infinité d'intégrales premières et secondes qui ont entre elles les relations étudiées aux n^{os} 12 et 64, savoir : les intégrales secondes ont leurs côtés et tangentes correspondants qui se coupent sur une droite fixe.

Pour passer d'une intégrale seconde à une autre, il suffit d'ailleurs de déplacer le pôle du diagramme et le déplacement du pôle est parallèle à la droite des points d'intersection des lignes correspondantes des deux intégrales. Par rapport à cette dernière droite, considérée comme ligne de repère, les deux intégrales secondes représentent une même fonction à des échelles différentes (55).

3° Si sur une certaine longueur de la poutre, on

remplace les forces données par un système équivalent c'est-à-dire, un système donnant la même résultante, l'effort tranchant et le moment fléchissant ne changent pas en dehors de la partie de la poutre où les modifications ont été faites ; le lieu des M et des K ne sont modifiés que sur la partie où les forces ont changé.

Réciproquement si on remplace un arc du lieu des M par un autre ayant mêmes extrémités, cet autre lieu correspond à un groupe de forces épuivalent au groupe des forces données qui agissent dans l'étendue de cet arc ; cela résulte de ce que, autour de tous les points situés en dehors de l'arc modifié, les moments de ces deux groupes sont identiques. Soit, par exemple, (fig. 54) $A_2\,B_2$ un lieu des M ; remplaçons l'arc $A_2\,B_2$ par le polygone $A_2\,C_2\,B_2$; les forces nouvelles qui donnent le lieu $A_2\,C_2\,B_2$ sont évidemment trois forces isolées ; on en obtient les grandeurs au moyen du diagramme.

Menons PA', PB' parallèlement au tangentes en A_2 et en B_2 ; $P\alpha'$, $P\gamma'$ parallèlement aux côtés $A_2\,C_2$ et $C_2\,B_2$; $A'\alpha'$, $\alpha'\gamma'$, $\gamma' B'$ sont les trois variations brusques de l'effort tranchant, c'est-à-dire, les trois forces isolées agissant en A_2, C_2, B_2 et faisant un système équivalent aux groupes des forces données qui agissent sur l'arc $A_2\,B_2$. Si les côtés $A_2\,C_2$, $C_2\,B_2$ étaient dirigés suivant les tangentes en A_2 et en B_2, les forces seraient nulles en ces points, c'est-à-dire, que les forces données seraient remplacées par une force unique.

Si on remplace l'arc $A_2\,B_2$ par sa corde, la force $\alpha'\gamma'$ est nulle, les forces données sont remplacées par deux forces passant par les extrémités de l'arc.

La modification du lieu des M entraîne une modification du lieu des K ; au lieu $A_2\,C_2\,B_2$ correspond le lieu $A_1\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,B_1$; il est à remarquer que les directions $A_2\,C_2$, $C_2\,B_2$ sont arbitraires, mais que la ligne $A_1\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,B_1$

doit satisfaire à une condition et qu'on ne pourrait pas la tracer arbitrairement. Il faut en effet, que les moments ne soient pas changés en dehors de la modification ; comme les moments sont les surfaces couvertes par les efforts tranchants, cela exige que ces surfaces ne soient pas changées ; il faut par conséquent que les surfaces hachurées situées au-dessus de l'arc A_1 B_1 soient équivalentes aux surfaces hachurées situées en dessous de cet arc.

§ 4. — Ligne des résultantes successives des forces situées dans un plan.

A. *Définitions, usages.*

129. *Définitions.* Soient (fig. 55) F_o F_1 F_2 F_3 une série de forces situées dans un plan ; si on combine les forces F_o, F_1, on obtient une première résultante partielle dirigée suivant une droite telle que AB; si on combine cette première résultante avec F_2, on obtient une seconde résultante partielle dirigée suivant une droite telle que BC ; cette seconde résultante combinée avec F_3 en donne une troisième et ainsi de suite ; la ligne $ABCD$ sera appelée ligne des résultantes successives des forces données. Cette définition s'applique également au cas de forces infiniment petites et infiniment rapprochées ; la ligne des résultantes change alors continûment de direction sauf aux points où une force isolée intervient où la courbe présente un jarret.

130. *Ligne des résultantes auxiliaires.* — Il arrive souvent que les forces sont parallèles ou à peu près ; dans ces conditions la ligne des résultantes se transporterait à l'infini ou du moins en dehors des limites du dessin ; c'est pour ce motif qu'il est souvent utile et presque toujours plus élégant d'introduire une force

auxiliaire et de construire la ligne des résultantes de cette dernière avec les forces données. On obtient alors une ligne que nous désignerons par ligne des résultantes auxiliaires des forces données. Ainsi, par exemple, dans la fig. 55, supposons que F_1, F_2, F_3... soient les forces données ; F_0 la force auxiliaire ; la ligne *ABCD* est une ligne des résultantes auxiliaires des forces données.

Connaissant la résultante auxiliaire d'un groupe de forces, on peut en déduire la résultante effective ; il suffit de combiner cette résultante auxiliaire avec la force auxiliaire prise en sens contraire ; on fait disparaître de cette façon la force auxiliaire que l'on avait introduite pour faciliter la construction.

Soit par exemple, à chercher la résultante des forces F_1, F_2, F_3, F_4 (fig. 55), *DE* est la direction de leur résultante auxiliaire ; en combinant cette dernière avec la force F_0 changée de sens on trouvera leur résultante effective qui passe évidemment par le point *G* intersection de *DE* et de F_0. Pour simplifier le langage, nous énoncerons cette propriété en disant que : la résultante effective des forces données est égale à la résultante auxiliaire diminuée de la force auxiliaire. Le mot diminué étant pris dans un sens statique et signifiant que l'on combine la première force avec l'autre changée de sens.

131. *La résultante effective d'un groupe de forces successives est égale à la résultante auxiliaire qui suit ce groupe diminuée de celle qui précède.* — Soit, par exemple, à chercher la résultante des forces F_2, F_3, F_4 ; si nous considérons la résultante dirigée suivant la ligne *AB* qui précède les forces à combiner, comme une force auxiliaire, *ABCDE* devient la ligne des résultantes auxiliaires des seules forces F_2, F_3, F_4 ; on en conclut que la résultante effective de ces forces est la

résultante *DE* diminuée de la résultante *AB* : c'est ce qu'il fallait démontrer.

132. *Usages.* — La considération des lignes de résultantes effectives ou auxiliaires est très-importante et s'applique à un grand nombre de questions qui intéressent l'art de l'ingénieur. Nous venons de voir qu'elle permet de combiner les forces dans un plan. La ligne des résultantes auxiliaires est aussi la forme d'équilibre d'un fil ou polygone funiculaire sollicité par les forces données, la force auxiliaire étant la tension du premier cordon ; il résulte en effet de la définition même de la ligne des résultantes, que chaque élément du fil dont il s'agit, sera sollicité suivant sa direction. Le polygone des pressions d'une voûte est aussi une ligne des résultantes auxiliaires dans laquelle les forces données sont les poids des voussoirs, la poussée jouant le rôle de force auxiliaire.

B. — Forces parallèles.

133. ***La ligne des résultantes auxiliaires de forces parallèles continûment réparties ou isolées est une intégrale seconde des forces données ; les ordonnées et les rayons du diagramme de la seconde intégration représentent respectivement les résultantes effectives et auxiliaires des forces données.***

Supposons par la pensée que les forces données (fig. 51) agissent sur une poutre droite perpendiculaire à leur direction ; nous représenterons les forces continûment réparties par une courbe *AB*, dite courbe des charges, dont les ordonnées représentent les forces par unité de longueur de la poutre. Effectuons une première intégration de la courbe *AB*, en tenant compte des forces isolées, comme s'il s'agissait de déterminer le lieu des efforts tranchants de la poutre

ab, supposée entièrement libre ; soit $B_1 A_1$ l'intégrale rapportée à la droite $B_1 x_1$ parallèle à *ab* ; l'ordonnée $C_1 c_1$ d'un point quelconque de cette intégrale représente la somme algébrique des forces qui agissent à droite de cette ordonnée : c'est précisément la résultante effective des forces dont il s'agit.

Effectuons une seconde intégration, en adoptant pour pôle du diagramme un point P', tel que le rayon $P'B'_1$ qui donne la direction du premier élément de l'intégrale seconde, représente en grandeur et direction la force auxiliaire X. Soit $P'C'_1$ le rayon du diagramme qui donne la direction de la tangente en un point C_2 de l'intégrale seconde ; d'après ce qui précède, $P'B'_1$ représente la force auxiliaire X, $B'_1 C'_1$ la résultante effective des forces qui agissent à droite du point c ; on en conclut en vertu de la règle du polygone des forces, que $P'C'_1$ représente en grandeur et direction, la résultante auxiliaire de ces mêmes forces.

Enfin, si l'intégrale seconde $B_2 A_2$ est tracée de manière que son premier élément soit dirigé suivant l'alignement de la force X, tous les autres éléments de cette intégrale seront dirigés suivant les résultantes auxiliaires successives des forces données ; c'est donc la ligne des résultantes auxiliaires cherchée : cela achève la démonstration du théorème énoncé (1).

134. *Propriétés diverses.* — Une ligne des résultantes auxiliaires étant une intégrale seconde des forces données, peut être aussi considérée comme une courbe de moments fléchissants et jouit par conséquent des propriétés de cette dernière ; ces propriétés se démon-

(1) Appliquée au cas de forces isolées, cette construction conduit au tracé connu du polygone funiculaire au moyen du polygone de Vavignon tracé dont il est fait grand usage dans les traités de statique graphique, pour étudier l'équilibre des forces, leur composition et décomposition.

treraient d'ailleurs directement avec la plus grande facilité ; nous nous contenterons de les énoncer :

1° Pour passer d'une ligne de résultantes auxiliaires à une autre, il suffit de déplacer le pôle : les côtés, cordes et tangentes correspondants des deux lignes se coupent sur une droite fixe parallèle au déplacement du pôle.

2° Si on remplace un arc de la ligne des résultantes auxiliaires par un autre, on obtient une ligne des résultantes relative à un système de forces équivalent au système des forces données ; réciproquement si on remplace un groupe de forces par un système équivalent, la ligne des résultantes n'est modifiée que dans l'étendue où les forces ont changé.

3° Si, en particulier, on remplace un groupe de forces par leur résultante, l'arc correspondant est remplacé par les tangentes qui précèdent et qui suivent les forces modifiées.

4° Si on remplace un groupe de forces par des forces donnant même résultante et agissant aux extrémités de l'arc où les modifications se produisent, cet arc est remplacé par sa corde.

135. *Problèmes.* Pour qu'une ligne de résultantes auxiliaires soit déterminée, il faut connaître la grandeur, la direction et la position de la force auxiliaire ou bien trois conditions qui remplacent ces éléments. On peut se donner comme condition soit la direction d'une tangente ou résultante, la direction d'une corde, la grandeur d'une résultante ; mais à ces conditions de grandeur et de direction, il faut toujours ajouter une condition de position telle qu'un point de la ligne, sinon on pourrait déplacer cette dernière parallèlement à la verticale sans modifier les autres conditions, et il y aurait indétermination. Cela étant, tous les problèmes que l'on peut poser relativement à une ligne de

résultantes se ramènent à celui-ci : connaissant deux conditions de grandeur ou direction et une condition de position, trouver la ligne des résultantes auxiliaires des forces données.

Pour résoudre ce problème, on commence par effectuer la première intégration ; on obtient de cette façon les ordonnées du diagramme de la seconde intégration ; pour déterminer complétement ce diagramme, il faudrait en connaître le pôle : les conditions de grandeur et de direction suffisent pour déterminer ce point. Si, par exemple, on donne les directions des deux résultantes PA'_1, PC_1 (fig. 51) le pôle P se trouve à l'intersection de deux droites connues ; si on donne la grandeur PA'_1 et la direction $P'C'_1$, le pôle P se trouve à l'intersection d'une droite et d'un cercle. Le diagramme étant déterminé, la condition de position détermine complétement la résultante.

136. *Exemple.* — Etant donné un système de forces parallèles isolées, construire une ligne de résultantes dont trois côtés passent par trois points donnés. Soient (fig. 56) P_1, P_2, P_3... les forces données, L, K, H les points donnés de ligne des résultantes auxiliaires cherchée. Commençons par construire une intégrale seconde quelconque ; la première intégration se réduit à une simple addition ; en portant les forces bout à bout en 01, 12, 23. . on obtient en 01, 02, 03... les ordonnées du diagramme de la seconde intégration (n° 126) ; si nous prenons un pôle quelconque P, on en déduit l'intégrale $HA'B'C'$...; il s'agit de déduire de cette intégrale une autre intégrale seconde $HABC$... passant par les 3 points H, K, L. Pour y arriver, menons sur le diagramme PI, PJ parallèlement aux cordes HK', KL' qui correspondent aux cordes connues HK, KL de l'intégrale seconde cherchée ; le pôle du diagramme relatif à cette dernière se déter-

mine en menant *PI* parallèlement à la corde *HK* et *PJ* parallèlement à *KL*; connaissant le pôle *P* on obtient aisément l'intégrale cherchée *HABC*...

Autre construction. — On peut aussi déduire l'intégrale cherchée *ABC*... de l'intégrale connue *A'B'C'*... de la manière suivante :

Les côtés correspondants *HK*, *HK'* se coupent au point *H*; les côtés correspondants *KL*, *K'L'*, au point *M*; la droite *HM* est donc le lieu des points d'intersection des cordes et tangentes correspondantes des deux intégrales. Soit à chercher le point *F* de l'intégrale inconnue; menons *F'K'* jusqu'à la rencontre *N* de la droite *HM*; en menant *NK* on aura la corde correspondant à *F'K'* et par suite le point *F*. On obtiendrait de cette façon autant de points que l'on voudrait.

137. *Equilibre et composition des forces parallèles.* — Pour que les forces parallèles données se fassent équilibre, il faut et il suffit que la résultante auxiliaire de toutes les forces données soit identique avec la force auxiliaire; en d'autres termes, les tangentes extrêmes de la ligne des résultantes se confondent et ferment en les prolongeant la ligne des résultantes auxiliaires.

Lorsque les tangentes extrêmes se coupent, les forces donnent une résultante qui passe par le point d'intersection de ces tangentes : cette résultante est donnée en grandeur par l'ordonnée du diagramme. Si enfin, les tangentes extrêmes sont parallèles sans se confondre, les forces données se ramènent à un couple savoir : la résultante auxiliaire des forces données et la force auxiliaire prise en sens contraire.

Ces considérations s'appliquent aussi à un groupe quelconque de forces successives; ainsi, par exemple, pour qu'un groupe de forces successives soit en équilibre, il faut et il suffit que les résultantes auxiliaires qui précédent et qui suivent les forces considérées

soient identiques et fassent avec l'arc de la ligne des résultantes un contour fermé.

138. *Décomposer un système de forces parallèles en trois composantes dirigées suivant trois droites connues.* — Soit $X'C'A'$ (fig. 57) la ligne des résultantes auxiliaires des forces données relative au diagramme $P'OI$; soient X, Y, Z les trois composantes cherchées dont on connaît les alignements; il faut que la résultante des forces X, Y, Z soit identique avec la résultante des forces données ou ce qui revient au même, que la résultante des forces Y, Z soit identique avec la résultante des forces données combinées avec la force $-X$; en d'autres termes, en prenant $-X$ comme force auxiliaire, la résultante auxiliaire des forces données doit passer par le point A intersection des forces Y et Z. Le problème est ramené à un cas particulier du problème du n° 135, savoir : construire une ligne des résultantes auxiliaires, connaissant un point A et un côté BX alignement de la force auxiliaire.

Menons AB, corde quelconque de la ligne cherchée; soit $A'B'$ la corde correspondante dans la ligne connue. Soit sur le diagramme $P'O$, $P'I$ les directions des côtés XB' et $B'A'$; ces côtés ont pour correspondants dans la ligne des résultantes inconnues les côtés connus XB et BA; on obtient le pôle P de l'intégrale cherchée en menant IP et OP parallèlement à AB et BX; PO est la force $-X$, OP la force X.

Soit $P'a'$ la direction de la tangente au point A'; Pa' sera la direction de la tangente en A et par conséquent la résultante des forces Y, Z, forces que l'on trouve par la règle du polygone des forces, en menant PP_1 parallèlement à Z et $a'P_1$ parallèlement à Y. En résumé on a : $-X = PO$ ou $X = OP$, $Z = PP_1$, $Y = P_1a'$.

Cas particulier. — Supposons que les forces données se réduisent à une force unique R connue, cou-

pant la force X au point D; la résultante des forces R et $-X$ doit passer par le point A; en remplaçant les forces données par leur résultante R, la ligne des résultantes auxiliaires de ces forces et de la force $-X$ se réduit au polygone XDA; soient donc $Oa' = R$, $a'P$ parallèle à AD, OP parallèle à DX; on a $PO = -X$; Pa', comme précédemment, donnerait Y et Z par une décomposition.

C. — Forces quelconques (1)

139. ***Tracé graphique pour le cas de forces isolées.*** — Soient (fig. 55) $F_0F_1F_2$.... les forces données dont on demande la ligne des résultantes; portons ces forces bout à bout, à partir d'un point quelconque P en $P0$, 01, 12, 23...; d'après la règle du polygone des forces leurs résultantes successives seront représentées en grandeur et direction par les droites $P0$, $P1$, $P2$, le point A, intersection des forces F_0, F_1, est un point de la résultante de ces deux forces; on obtiendra donc la ligne des résultantes cherchées en menant successivement AB, BC, CD... parallèlement aux directions $P0$, $P1$, $P2$... La figure $P012$... est le diagramme des résultantes; P origine commune de ces dernières est le pôle du diagramme.

Si on donne seulement les forces F_1, F_2, F_3..., la

(1) La recherche d'une ligne de résultantes de forces continûment réparties et de direction variable se rattache à l'extension de l'intégration graphique, au cas où les éléments infiniment petits qu'il s'agit d'ajouter, sont des quantités géométriques de direction variable; le cas de forces non parallèles, ne se présentant presque jamais en pratique, nous ne sommes pas entré dans ces considérations plus inutiles que complexes; nous nous sommes borné au cas où les forces sont isolées et où la première intégration est une simple addition géométrique. Nous ne faisons d'ailleurs qu'examiner des questions traitées depuis longtemps en statique graphique, tantôt par des constructions identiques (139, 140, 141), tantôt par des constructions différentes (144, 145).

force F_0 devient force auxiliaire et peut être choisie arbitrairement : on obtient alors une ligne des résultantes auxiliaires des forces données. On a donc la construction suivante : pour obtenir une ligne des résultantes auxiliaires de forces données F_1, F_2, F_3..., on porte ces forces bout à bout en 01, 12, 23... ; on joint les sommets du polygone des forces ainsi obtenu à un pôle quelconque *P* ; partant d'un point arbitraire *I*, on mène un polygone *IABCD*... dont les sommets se trouvent sur les alignements des forces données et dont les côtés soient parallèles aux directions *P*1, *P*2, *P*3 ; le polygone obtenu est la ligne des résultantes auxiliaires cherchée ; *P*0 est la force auxiliaire *P*1, *P*2, *P*3... les résultantes auxiliaires en grandeur et direction.

140. *Théorème sur le déplacemeut du pôle.* — Si on déplace le pôle du diagramme des résultantes auxiliaires, on obtient une nouvelle ligne de résultantes dont les côtés coupent les côtés correspondants en des points situés sur une droite fixe parallèle au déplacement du pôle.

Soient (fig. 55) *IABCD* la ligne des résultantes auxiliaires des forces données relative au pôle *P*, *I'A'B'C'D'* la ligne des résultantes auxiliaires relative au pôle *P'*. On peut considérer la nouvelle force auxiliaire *P'O* comme la résultante de la force auxiliaire primitive *PO* et d'une nouvelle force représentée par *P'P* en grandeur et direction et agissant suivant une droite *II'* passant par l'intersection *I* des alignements des deux forces auxiliaires ; il résulte de là que pour obtenir une résultante *B'C'* il suffit de combiner la résultante *BC* avec la force *II'* ; on en conclut que *B'C'* passe par le point d'intersection des droites *BC* et *II'* ou, ce qui revient au même, que les deux droites *BC*, *B'C'* se coupent sur la droite fixe *II'* : c'est ce qu'il fallait démontrer.

141. *Moments des forces autour d un point.*

Soit (fig. 55) à chercher la somme des moments des forces F_2, F_3, F_4 autour du point K ou, ce qui revient au même, le moment de leur résultante autour du même point. Cette résultante est représentée en grandeur et direction par 14; si par le point K on mène une droite NN' parallèle à 14, les forces $F_2F_3F_4$ donneront même moment total autour de tous les points de cette droite; nous prendrons le point N sur la ligne des résultantes auxiliaires comme centre des moments. En exprimant que la somme des moments autour du point N des composantes de la résultante DC est égale à O, on obtient l'équation :

$$M = FZ$$

formule dans laquelle M désigne le moment cherché, F la force auxiliaire AB, Z la distance du point N à la force auxiliaire AB. Il résulte de cette équation que le moment cherché est proportionnel à la distance L ou NN''; on en conclut que NN'' représente le moment cherché à une certaine échelle.

Pour calculer cette échelle, rendons homogène l'équation précédente, on obtient :

$$\frac{m}{c} = \frac{f}{b}\,\frac{z}{a}$$

formule dans laquelle a, b, c désignent respectivement les unités des échelles des longueurs, des forces et des moments, et m, f, z les longueurs qui représentent les quantités M, F, Z.

Pour que NN'' ou Z représente le moment M, on doit avoir

$$m = z$$

ce qui exige que l'on ait :

$$\frac{1}{c} = \frac{f}{ab} \text{ d'où } c = \frac{ab}{f}$$

Il résulte de cette valeur de c que l'influence de la longueur f sur l'échelle des moments est la même que si f était une base d'intégration.

142. *Substitution à un groupe de forces successives d'un système équivalent.*

Si on remplace un groupe de forces successives par un système équivalent, les résultantes auxiliaires qui précèdent et qui suivent les forces modifiées, ne sont pas changées. Réciproquement, on peut modifier à volonté une partie de la ligne des résultantes auxiliaires des forces données ; si on se donne à volonté les résultantes auxiliaires qui agissent suivant les côtés de la nouvelle ligne, cette dernière correspond à un système de forces que l'on déterminera aisément en menant les rayons du diagramme représentant les nouvelles résultantes auxiliaires. Si les résultantes auxiliaires qui précèdent et qui suivent les côtés modifiés, ne sont pas changées, le nouveau système est équivalent au système donné. Quelques exemples éclairciront ces généralités.

1° Nous pouvons remplacer le polygone *BCDE* (fig. 55) par les côtés *BC*, *DE* prolongés jusqu'à leur point d'intersection *M* ; les forces F_3, F_4 sont alors remplacées par une force unique appliquée en *M* et qui est représentée en grandeur et direction sur le diagramme par 24.

2° Nous pouvons remplacer le polygone *FCDE* par la corde *EF* ; menons *PJ* parallèle à *EF* et égale à la grandeur arbitraire de la résultante auxiliaire dirigée suivant *FE* ; les forces F_3, F_4 sont remplacées par deux forces F'_3, F'_4 passant respectivement par les points *F* et *E* et représentées en grandeur et direction par 2*J* et *J*4 ; en faisant varier la résultante auxiliaire *PJ*, on obtient une infinité de systèmes de deux forces passant par les points *F* et *E* et équivalent au système des deux

forces données F_3, F_4 ; les deux nouvelles forces F'_3, F'_4, doivent se couper sur la résultante des forces qu'elles remplacent. En résumé, en remplaçant un contour d'une ligne de résultantes auxiliaires par sa corde, on concentre les forces qui agissent sur ce contour en deux résultantes passant par les extrémités de cette corde, mais il y a une infinité de modes de concentration.

3° Si nous admettons un mode de concentration déterminé soit, par exemple, le système des forces F'_3, F'_4 remplaçant les forces qui agissent sur le contour *FCDE*, si nous conservons ce même mode de concentration pour une autre ligne des résultantes auxiliaires *A'B'C'D'E'* des mêmes forces données, les cordes *EF* et *E'F'* peuvent être considérées comme deux côtés correspondants des lignes de résultantes *ABFE* et *A'B'F'E'*, et se coupent sur la droite fixe *II'* (n° 140). Par l'absurde on démontrerait aisément que si les cordes *EF*, *E'F'* s'appuient sur deux côtés correspondants de deux lignes des résultantes auxiliaires des mêmes forces et se coupent sur la droite fixe *II'*, ces cordes correspondent à un même système de concentration d'un groupe des forces données en deux résultantes. On peut remarquer que contrairement à ce qui se passe dans le cas de forces parallèles, les cordes qui joignent des sommets correspondants telles que *AD*, *A'D'* ne se coupent généralement pas sur la droite fixe *II'* ; pour que cela arrive, il faudrait qu'il fût possible de concentrer les forces qui agissent dans l'étendue de ces cordes, en deux forces dirigées suivant *AA'* et *DD'* ou, ce qui revient au même, que la résultante du groupe des forces données dont il s'agit, passe par l'intersection des droites *AA'* et *DD'* ; cette circonstance ne se présentera que dans certains cas particuliers, notamment dans celui des forces concourantes ou parallèles.

143. *Équilibre et composition des forces.*

Nous avons vu au n° 130 que la résultante effective des forces données est égale à la résultante auxiliaire de ces forces, combinée avec la force auxiliaire changée de sens; cette résultante est donnée en grandeur et direction par la droite qui forme le polygone des forces; en position elle passe par le point d'intersection des côtés extrêmes de la ligne des résultantes auxiliaires.

Si les forces données forment un polygone fermé, la résultante auxiliaire est égale et parallèle à la force auxiliaire; les forces données se ramènent à un couple, savoir : la résultante auxiliaire et la force auxiliaire changée de sens.

Si non-seulement les forces données forment un polygone fermé, mais si en outre la résultante auxiliaire agit dans le même alignement que la ligne des résultantes, ou, ce qui revient au même, si la ligne des résultantes se ferme par la résultante auxiliaire prolongée, le couple dont il vient d'être question s'annule, les forces se font équilibre. Les réciproques de ces propriétés sont évidentes.

144. *Problèmes divers.* — Comme dans le cas de forces parallèles, les différents problèmes que l'on peut poser sur la détermination d'une ligne des résultantes auxiliaires de forces données se ramènent à celui-ci : connaissant trois conditions dont une de position, trouver la ligne des résultantes auxiliaires de forces données. L'exemple qui suit montre suffisamment la marche à suivre pour résoudre tous ces problèmes.

Exemple. — Construire une ligne des résultantes auxiliaires des forces données connaissant trois points de cette ligne. Soit *IABCDE* (fig. 55) une ligne des résultantes auxiliaires quelconque des forces données; proposons-nous d'en déduire une autre telle que les côtés correspondants aux côtés *IA*, *BC*, *ED* passent

respectivement par les trois points connus K', F', E'. En prolongeant les côtés AI, CB, ED, nous remplaçons la ligne des résultantes connue par $ILME$ relative à deux forces LR, MR dont les grandeurs et directions sont données sur le diagramme par 02 et 24: joignons le point R, intersection de ces deux forces, aux points K', F', E'; ces droites déterminent les cordes FK, FE de la ligne connue. Nous pouvons décomposer la force LR suivant les droites RK et RF, les cordes FK et $F'K'$ correspondent donc à un même mode de concentration des forces données; il en est de même des cordes EF et EF'. On en conclut que ces cordes se coupent mutuellement en des points T et S qui déterminent la droite fixe II' sur laquelle se coupent les côtés correspondants de la ligne connue et de la ligne cherchée. Au moyen de cette droite on peut obtenir successivement tous les côtés de la ligne cherchée; ainsi le côté AK coupe la droite TS au point I, en joignant IK' on obtient le côté $K'A'$ correspondant au côté AK; le côté AB coupe la droite TS au point I', en joignant $I'A'$ on obtient le côté $A'B'$ correspondant au côté AB et ainsi de suite.

On peut aussi obtenir la ligne cherchée, sans utiliser la droite TS, en déterminant le nouveau pôle P' qui fournit la ligne des résultantes auxiliaire demandée; pour y arriver, remplaçons la ligne connue $IABCDE$ par le polygone $IKFE$; nous concentrons ainsi les forces données en trois forces que nous supposerons dirigées suivant les droites KR, FR, ER; le polygone de ces trois forces s'obtient en menant par les points 0, 2, 4 respectivement les droites OH, HJ, $J4$ parallèlement aux droites KR, FR, ER; comme vérification les droites PH, PJ doivent être parallèles aux droites KF et FE. Le polygone $IK'F'E'$ correspondant aux mêmes forces, on obtiendra le nouveau pôle P' en menant HP' parallèlement à $K'F'$ et JP' parallèlement à $E'F'$. Connaissant le

pôle P' on obtient aisément la ligne des résultantes auxiliaires $IA'B'C'D'E'$ qui y correspond.

145. *Décomposer un groupe de forces en trois composantes dont on connaît les alignements.*

Soit (fig. 58) $X'ABCDE$ la ligne des résultantes auxiliaires des forces données relative à un pôle P; soient X, Y, Z les trois composantes cherchées dont on connaît les alignements. Il faut que la résultante des forces X, Y, Z soit identique avec la résultante des forces données, ou, ce qui revient au même, que la résultante des forces combinées avec la force $-X$ soit identique avec la résultante des forces Y et Z; en d'autres termes, en prenant $-X$ comme force auxiliaire, la résultante auxiliaire des forces données doit passer par le point E' intersection des forces Y et Z. Le problème est ramené à un cas particulier du problème général du numéro précédent, savoir : construire une ligne de résultantes auxiliaires des forces données, connaissant un point E' du côté correspondant au côté DE et l'alignement X de la force auxiliaire.

Pour résoudre ce problème, concentrons les forces données en deux points E et I des côtés $X'A$ et DE, de telle sorte que l'une des forces soit dirigée suivant EE'; il suffit pour cela de mener PH parallèlement à EI, et $4H$ parallèlement à EE', on obtient en OH la direction de l'autre force dont II' est l'alignement; les cordes EI et $E'I'$ correspondent au même mode de concentration des forces données. On obtiendra le pôle P' de la ligne cherchée en menant HP' parallèlement à $E'I'$ et OP' parallèlement à la force X; on obtient ainsi la force $-X$ en $P'O$, OP' représente la force X. La droite $P'4$ représente la résultante des forces Y et Z, que l'on trouve par la règle du polygone des forces, en menant $P'P''$ parallèlement à Z et $4P''$ parallèlement à Y. En résumé, on a : $X = OP$, $Z = P'P''$, $Y = P''4$.

Lorsque les forces données se ramènent à une résultante unique connue de grandeur et de position, la construction du cas particulier du n° 138 peut s'appliquer.

§ 5. — Équilibre des systèmes articulés.

146. *Définitions et conventions.* — Un système articulé est formé de barres invariables articulées à leurs extrémités ; chacune des barres, pour être en équilibre, doit être sollicitée suivant sa direction par deux efforts égaux et de sens contraire. Soit *AB* une barre quelconque (fig. 59) ; si nous coupons cette barre par une section *M*, l'action du tronçon *BM* sur le tronçon *AM* est appelée la tension de la barre *AB*, et quand nous nous proposerons de chercher cette tension, nous donnerons à la barre le sens de *A* vers *B*. Au contraire, la force qui sollicite le tronçon *BM* sera appelée tension de la barre *BA*, et quand nous nous proposerons de chercher cette tension, nous donnerons à la barre le sens de *B* vers *A*. Ces conventions étant admises, il est facile de voir qu'une barre sera étendue ou comprimée suivant que sa tension sera de même sens ou de sens contraire à elle-même, ce que l'on peut encore exprimer en disant que la tension est positive ou négative, suivant qu'elle est de même sens ou de sens contraire à la barre qu'elle sollicite.

147. *Conditions d'équilibre d'un polygone funiculaire ; tensions des barres.*

On appelle polygone funiculaire un polygone formé de barres invariables articulées l'une à l'autre à leurs extrémités, les barres étendues pouvant être remplacées par des cordons inextensibles. Soit *ABCDEF* (fig. 60) un polygone funiculaire fermé supposé en équilibre ;

coupons, par la pensée, la barre *AB* par une section *M* et remplaçons l'action de la partie enlevée *AM* par la tension *X* de la barre *BA* ; considérons une barre quelconque *DC* comme un levier mobile autour du point *D* ; cette barre est sollicitée par les forces extérieures qui agissent du point *C* au point *M*, combinées avec la force *X* ; pour l'équilibre de la barre *DC*, il faut qu'elle soit dirigée suivant la résultante de toutes ces forces ; on en conclut que le polygone *ABCD*.., est une ligne des résulantes auxiliaires des forces données, la tension *X* de la barre *BA* jouant le rôle de force auxiliaire. Si nous portons les forces bout à bout en 0, 1, 2, 3..., si nous prenons *PO* égal à *X*, les résultantes auxiliaires seront données en grandeur et direction par les droites *P*1, *P*2, *P*3... qui représentent les tensions des barres *CB*, *DC*, *ED*... Si nous parcourons tout le polygone, nous revenons à la barre *BA* dont la tension est la résultante auxiliaire de toutes les forces extérieures : cette tension doit d'ailleurs être identique avec la force auxiliaire *X*, ce qui exige que le polygone des forces soit fermé (*P*6 doit être identique à *Po*) ; cette condition, jointe à celle que la ligne des résultantes auxiliaires est fermée, exprime (n° 143) que les forces extérieures se font équilibre, indépendamment des tensions des barres, condition évidente à priori.

Réciproquement, le polygone funiculaire est en équilibre, s'il est établi suivant une ligne des résultantes auxiliaires fermée des forces données supposées former un système en équilibre. Cela résulte évidemment de ce que, si l'on suppose la barre *BA* sollicitée par la force auxiliaire *X*, toutes les autres barres seront sollicitées suivant leur direction, la dernière barre *BA* étant d'ailleurs en équilibre sous l'action de deux efforts égaux et opposés.

On peut résumer comme suit les conditions néces-

saires et suffisantes pour qu'un polygone funiculaire soit en équilibre : si on porte bout à bout les forces extérieures dans l'ordre où on les rencontre en suivant le polygone funiculaire dans un certain sens (sens de la grande flèche), le polygone des forces doit se fermer. En menant ensuite par les sommets de ce polygone des parallèles aux côtés du polygone funiculaire, de telle façon, que par l'extrémité d'une force, on mène la parallèle à la barre qui suit cette force sur le polygone funiculaire, toutes ces parallèles doivent se couper en un pôle fixe. Les longueurs de ces parallèles, en leur donnant ce pôle pour origine, représentent les tensions des barres du polygone funiculaire en donnant à ces barres un sens (celui des petites flèches) opposé à celui que l'on a suivi pour combiner les forces.

Cette règle permet de trouver avec facilité le signe des tensions des barres ; il suffit pour cela de suivre par la pensée les barres du polygone funiculaire dans le sens des petites flèches opposé à celui que l'on a suivi pour combiner les forces, de suivre en même temps les droites du diagramme qui représentent ces tensions en partant du pôle : les tensions sont positives ou négatives suivant que l'on marche dans le même sens ou en sens contraire sur le polygone funiculaire et sur le diagramme des tensions.

148. *Remarques.* — 1° Si le polygone funiculaire était ouvert et entièrement libre, il n'y aurait aucune force auxiliaire à introduire à l'origine du polygone ; le polygone devrait être établi suivant la ligne des résultantes effectives des forces données ; à l'extrémité du polygone la résultante devrait être nulle.

2° Si le polygone funiculaire était ouvert mais fixé à ses deux extrémités, la tension de la première barre jouerait encore le rôle de force auxiliaire ; le polygone

devrait être établi suivant une ligne des résultantes auxiliaires des forces extérieures ; les tensions des barres extrêmes seraient les réactions des points fixes.

149. *Polygone funiculaire avec barres supplémentaires.* — Soient *ABCDEFGHIK* (fig. 61) un polygone funiculaire fermé, *CF* une barre supplémentaire ; nous pouvons par la pensée enlever la barre *CF* et la remplacer par des efforts *Y*, — *Y*, agissant en *C* et en *F* et égaux aux tensions de la barre *CF* et de la barre *FC*. Coupons par la pensée la barre *KA*, prise comme première barre, et introduisons sa tension *X* ; considérons d'abord la partie *XABC* qui précède la barre supplémentaire ; une barre quelconque *BC* sera sollicitée par la résultante des forces qui agissent aux points *B* et *A* combinées avec la force auxiliaire *X* ; la partie *XABC* doit donc être établie suivant une ligne des résultantes auxiliaires des forces données, la tension de la première barre *AX* jouant le rôle de force auxiliaire. Soit 0 1 2 3 4 5 6 7... le polygone des forces extérieures, *Po* la force auxiliaire, *P*1, *P*2 donneront les tensions des barres *BA* et *CB*. Ce raisonnement peut aussi s'appliquer à la partie *FGHIK* qui suit la barre supplémentaire ; il faut alors introduire les deux forces *Y* et — *Y*, mais comme elles se font équilibre, il est inutile d'en tenir compte ; la partie *FGHIK* doit donc encore être établie suivant la ligne des résultantes des forces extérieures relative à la force auxiliaire *X*. En suivant cette ligne *FGHIK* on revient à la barre *AK* dont la tension est la résultante auxiliaire de toutes les forces données ; cette tension doit d'ailleurs être égale à la force auxiliaire *X*, ce qui exige que le polygone des forces soit fermé ; cette condition, jointe à celle que la ligne des résultantes auxiliaires est fermée, exprime que les forces données forment un système en équilibre.

Il nous reste à considérer la partie *CDEF*; si nous considérons, par exemple, la barre *ED*, elle est sollicitée par les forces qui agissent aux points *A*, *B*, *C*, *D* combinées avec les deux forces *Y* et *X*, ou, ce qui revient au même, combinées avec une force *X'* résultante des deux forces *Y* et *X*; en d'autres termes, la partie *CDEF* doit être établie suivant la ligne des résultantes auxiliaires des forces données relative à la force auxiliaire *X'*. Cette force *X'* s'obtient en grandeur et direction en portant *P'P* égale et parallèle à *Y*, *P'o* est la force *X'*; il résulte de là que *P'3*, *P'4*, *P'5* donnent les tensions des barres *DC*, *ED*, *FE*.

En résumé, nous pouvons dire que le contour *FGHIKABC* fait partie d'une ligne des résultantes auxiliaires des forces extérieures relative à un pôle *P*; le contour *CDEF* fait partie d'une autre ligne des résultantes auxiliaires des forces données, relative à un pôle *P'*; la droite qui joint le nouveau pôle *P'* au pôle *P* représente la tension de la barre *CF*. Si, faisant abstraction des forces *Y* et — *Y*, on prolongeait la ligne des résultantes relative au pôle *P*, on obtiendrait le polygone fermé *ABCD'E FGHIKA*; de même, en prolongeant la ligne des résultantes relative au pôle *P'*, on obtiendrait le polygone *CDEFG'H'I'K'A'B'C*; ces deux lignes ont une corde commune *CF* et comme elles satisfont à la propriété du n° 140, leurs côtés correspondants doivent se couper sur une droite fixe qui n'est autre que *CF*.

Rien n'est plus facile que d'étendre les considérations qui précèdent au cas de plusieurs barres supplémentaires; il ne sera pas même nécessaire de faire une nouvelle figure. Coupons l'une des barres extérieures prise comme première barre, et introduisons sa tension *X*, que nous considérons comme force auxiliaire; suivons les autres barres extérieures dans un certain

sens ; il est évident que si nous ne rencontrons aucune barre intérieure, les tensions des barres extérieures prises en sens contraire de la marche suivie, sont les résultantes auxiliaires des forces données combinées avec la force auxiliaire X ; lorsque nous rencontrerons une barre intérieure dont la tension est Y, les barres qui suivent seront sollicitées par les résultantes auxiliaires des forces données relatives à une nouvelle force auxiliaire X', résultante des forces X et Y ; lorsque nous rencontrerons une seconde barre intérieure dont la tension est Z, les barres qui suivent seront sollicitées par les résultantes auxiliaires des forces données relatives à une force auxiliaire X'', résultante des forces XYZ, et ainsi de suite. Il résulte de là que si on construit le polygone des forces extérieures, les tensions des barres seront représentées par des droites aboutissant à ce polygone et ayant pour origine certains pôles P, P', P''... dont les positions dépendent des forces auxiliaires X, X', X''...

Ces pôles P, P', P'' ont entre eux certaines relations ; lorsque, en suivant le polygone extérieur, nous rencontrerons une barre intérieure, le pôle des tensions subira un déplacement, et la droite qui joint le nouveau pôle à l'ancien représente l'action de cette barre intérieure sur le polygone ; un déplacement de ce genre se produira à chacune des barres intérieures ; si donc, nous considérons deux barres quelconques du polygone funiculaire, telles qu'en marchant de l'une à l'autre, on rencontre plusieurs barres intérieures, la distance du pôle de la seconde barre à celui de la première est la résultante des actions sur le polygone de toutes les barres intérieures rencontrées ; remarquons d'ailleurs que toutes les barres complètes que l'on rencontre, c'est-à-dire les barres dont on rencontre les deux extrémités, n'exercent aucune influence sur la distance des

pôles dont nous nous occupons, puisque ces barres donnent lieu à deux déplacements égaux et contraires du pôle des tensions.

Nous appellerons barres incomplètes les barres dont on ne rencontre qu'une seule extrémité en suivant un contour déterminé du polygone funiculaire, et nous donnerons à ces barres un sens partant des extrémités rencontrées.

En résumé, pour qu'un polygone funiculaire formé avec barres supplémentaires soit en équilibre, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites : on suit le contour du polygone funiculaire dans un sens déterminé que nous appelons sens de la composition des forces, et l'on porte bout-à-bout les forces extérieures que l'on rencontre : le polygone ainsi formé doit être fermé. On mène par les sommets de ce polygone des parallèles aux côtés du polygone funiculaire comme s'il s'agissait de vérifier l'équilibre d'un polygone funiculaire sans barre supplémentaire ; les tensions des barres du polygone funiculaire prises en sens contraires du sens de la composition des forces, sont représentées par ces parallèles en leur donnant pour origine certains pôles. Si, en marchant dans le sens de la composition des forces, on passe d'une barre à une autre sans rencontrer de barres supplémentaires ou en ne rencontrant que des barres complètes, les tensions de ces deux barres ont même pôle ; si, au contraire, on rencontre une barre incomplète, les tensions de ces deux barres ont deux pôles différents et la droite qui joint le pôle de la seconde barre à celui de la première, représente la tension de la barre incomplète rencontrée ; si, enfin, on rencontrait plusieurs barres incomplètes, la droite qui joint le pôle de la seconde barre à celui de la première, représenterait la résultante des tensions de ces barres incomplètes.

150. *Poutre triangulée. Recherche des tensions par la méthode du polygone des pôles.*

Soit (fig. 62) une poutre formée d'une lisse supérieure et d'une lisse inférieure réunies par des barres intérieures décomposant la poutre en triangles articulés ; les forces extérieures, qui forment un système en équilibre, sont supposées agir sur les articulations. Nous considérerons le contour extérieur formé des deux lisses comme un polygone funiculaire ; les barres intérieures seront assimilées aux barres supplémentaires et nous appliquerons la méthode du numéro précédent.

Ayant porté les forces bout-à-bout et mené par les sommets du polygone ainsi obtenu des parallèles aux barres extérieures, le problème revient à chercher les pôles des tensions de ces barres ; il est facile de reconnaître avant de faire aucun tracé que les propriétés qui font l'objet du numéro précédent suffisent pour déterminer ces pôles ; en effet, les barres *AB*, *BC* n'étant séparées par aucune barre intérieure, leurs tensions ont même pôle : ce pôle se trouve à l'intersection de deux droites connues ; en partant de la barre *AB* on peut passer à la barre *DC* en ne rencontrant qu'une barre incomplète *AC*, on déterminera le pôle de la tension de la barre *DC* en menant par le pôle de *AB* une parallèle à la barre *AC* ; de la barre *CD* on passerait à la barre *EA* et ainsi de suite. En résumé les pôles forment un polygone dont les côtés représentent les tensions des barres intérieures : c'est ce polygone que nous appelons polygone des pôles. Nous pouvons dès lors énoncer la règle suivante : désignons par les chiffres gras **0** et **1** les barres de la lisse supérieure et inférieure qui se joignent à l'extrémité droite de la poutre ; en partant de la barre **1** menons la ligne tracée en pointillé sur la figure 62 de manière à joindre les barres exté-

rieures en ne rencontrant qu'une seule barre intérieure; désignons par les chiffres gras **2, 3, 4....** les barres extérieures que nous rencontrons successivement de cette manière et par les doubles chiffres **12, 23, 34...** les barres intérieures que nous coupons en allant de **1** à **2**, de **2** à **3**, de **3** à **4**.... Suivons le polygone extérieur dans le sens des grandes flèches et portons bout-à-bout les forces que nous rencontrons; menons par les sommets du polygone ainsi obtenu des parallèles aux barres extérieures, comme s'il s'agissait de vérifier l'équilibre d'un polygone funiculaire ordinaire, c'est-à-dire que par l'extrémité de chacune des forces nous mènerons des parallèles aux barres comprises sur le polygone entre cette force et celle qui la suit; soit 1, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 9, 7, 4, 2, 0 parallèles à **1, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 9, 7, 4, 2, 0**. Les tensions des barres extérieures prises dans le sens contraire à celui que l'on a suivi pour combiner les forces, sont représentées par ces parallèles en leur donnant comme origine certains pôles que l'on détermine comme suit : les barres **0** et **1** ont un même pôle qui se trouve à l'intersection des droites 0 et 1 ; par ce pôle 1 menons un polygone 1 2 3 4.... dont les côtés 12, 23, 34... soient parallèles respectivement aux barres intérieures de la poutre **12, 23, 34....** ; le polygone 1 2 3 4.... est le polygone des pôles qui, comme vérification doit aboutir au pôle commun des barres **10** et **11**. Les tensions des barres intérieures prises dans le sens des petites flèches, c'est-à-dire dans le sens des barres incomplètes que l'on rencontre en passant successivement de **1** à **2**, de **2** à **3**.... dans le sens de la composition des forces, sont représentées par les côtés du polygone des pôles pris dans le sens de 10 à 1.

151. *Détermination directe de la tension d'une barre extérieure.*

Soit à déterminer la tension de la barre *AB* (fig. 63) ; menons une section *MN* coupant cette barre et deux autres barres *CB* et *CD* ; l'équilibre du tronçon situé à droite de cette section exige que les forces extérieures qui le sollicitent soient équilibrées par les tensions des barres *AB*, *CB* et *CD* ; en décomposant les forces extérieures dont il s'agit en trois composantes dirigées suivant les alignements de ces trois barres, on obtiendra ces tensions prises en sens contraire ; on est ramené aux problèmes des n^os^ 138 et 145.

Considérons comme application le cas de la poutre indiquée fig. 64 ; pour pouvoir appliquer à cette poutre la méthode du polygone des pôles, nous devons enlever la barre 6 et remplacer son action par une force que nous considérerons comme une force extérieure ; ce n'est qu'alors, en effet, que la poutre se réduit à un contour polygonal avec barres supplémentaires. Si nous menons une section coupant les barres 6, 4 et 5, nous voyons que la tension de la barre 6 combinée avec les forces extérieures doit faire équilibre aux deux autres tensions, c'est-à-dire qu'en prenant la tension *X* de la barre **6** comme force auxiliaire, la résultante auxiliaire des forces extérieures doit passer par le point *D* commun aux barres **4** et **5**. Soit *I'A'B'C D'* une ligne des résultantes auxiliaires, relative au pôle *P*, des forces extérieures P_1, P_2, P_3 supposées parallèles ; soit *DK* une corde quelconque de la ligne cherchée, *D'K'* la corde correspondante de la ligne connue, *PJ* la direction de *D'K'* ; en menant *oP'* parallèlement à la force auxiliaire *X*, *JP'* parallèlement à la corde *DK*, on obtient le nouveau pôle *P'*, *P'o* est la tension cherchée de la barre **6**. Connaissant la force *X*, on peut appliquer la règle du numéro précédent ; on obtient le polygone des pôles **1 2 3 4** ; les droites 4, 2, 0, 1, 3, 5 représentent tensions des barres **4, 2, 0, 1, 3, 5** ; les côtés du poly-

gone des pôles pris dans le sens 4 3 2 1 donnent les tensions des barres intérieures **34**, **23**, **12**(1).

INDICATIONS COMPLÉMENTAIRES.

152. *Assimilation du polygoae dès pôles à une ligne de résultantes.*

Reprenons la figure n° 62 et considérons les barres extérieures prises dans le sens des petites flèches comme représentant des forces fictives en grandeur et direction, les alignements de ces forces fictives étant les lignes 1, 2, 3,... du diagramme des tensions ; à ce nouveau point de vue les barres intérieures **12**, **23**, **34**.... deviennent les résultantes successives en grandeur et direction de ces forces fictives combinées dans l'ordre **0**, **1**, **2**, **3**...; le polygone des pôles est la ligne

(1) On peut aussi déterminer les tensions d'un système articulé au moyen des procédés de la statique graphique ; ces procédés, qui conduisent d'ailleurs aux mêmes figures que celles que nous venons d'établir différemment, consistent à utiliser le polygone des forces et subsidiairement le polygone funiculaire, pour exprimer : soit l'équilibre des forces et tensions autour de chaque articulation (Rankine, Taylor, Maxwell, Cremona, Maurice Levy, Favaro), soit l'équilibre d'un tronçon de poutre (Culman et Bauschinger). Le point le plus important et aussi le plus difficile est de déterminer l'ordre dans lequel il faut placer les forces pour que les différents polygones s'enchevêtrent de telle façon que la tension d'une barre ne soit représentée qu'une seule fois, condition indispensable pour arriver à une épure élégante. La statique graphique résout cette difficulté au moyen de la théorie des figures réciproques ; mais malgré les travaux de M. Maurice Lévy qui est parvenu à rendre cette théorie indépendante des considérations complexes de la géométrie supérieure, elle constitue toujours une théorie longue et difficile ; elle conduit d'ailleurs dans l'application à une méthode assez pénible, vu que pour déterminer une tension, il faut considérer un polygone fermé sur le diagramme des tensions et sur la poutre les deux polygones fermés réciproques des nœuds situés à l'extrémité de la tension à déterminer.

Nous pensons que la méthode que nous venons d'exposer ne présente pas ces inconvénients ; elle conduit à une règle que l'on peut appliquer machinalement sans aucune indécision sur l'ordre des lignes à tracer et sans qu'il en résulte aucune fatigue d'esprit.

des résultantes de ces forces fictives. Ces forces fictives se font d'ailleurs équilibre puisque la résultante finale passe par le point 10 et se réduit à zéro, le polygone de ces forces fictives étant fermé.

Nous pouvons dans cet ordre d'idées considérer le dessin de la poutre comme un diagramme des résultantes des forces fictives, mais ce diagramme diffère des diagrammes ordinaires en ce que les résultantes n'émergent pas d'un pôle fixe ; cela provient de ce que les forces fictives ne sont pas placées dans l'ordre de leur combinaison ; si on les porte bout-à-bout dans l'ordre **0**, **1**, **2**, **3**... on obtient la figure 65 dans laquelle les résultantes ou barres intérieures émergent toutes du pôle *A* ; cette nouvelle figure étant construite à une grande échelle, peut mieux que le dessin de la poutre, donner les directions nécessaires pour appliquer la méthode du polygone des pôles.

153. *Application.* — Reprenons le cas de la fig. 64 et considérons la tension 6 comme une force inconnue, Nous pouvons toujours construire le polygone des forces données et mener les alignements 6, 0, 1, 3, 5 ; mais la force 6 étant inconnue, le point *P'* n'est pas donné *à priori* et l'on ne peut tracer les alignements 2 et 4. Or remarquons que toutes les forces fictives devant se faire équilibre, en combinant les forces 0, 1, 3, 5, on doit trouver une résultante équilibrant les forces 2 et 4 et passant par conséquent par le point *P'* ; on obtient ainsi le polygone 12'3'*P'* dont les côtés sont parallèles aux droites **12**, *KC* et *KD* ; connaissant le point *P'* on peut alors procéder à la construction du polygone des pôles 1234.

154. *Systèmes articulés divers.* — On peut imaginer des systèmes articulés beaucoup plus compliqués que ceux que nous avons considérés jusqu'à présent ; l'application de la méthode du polygone des pôles peut

offrir certaines difficultés que l'on parvient à faire disparaître en décomposant le système en plusieurs autres au moyen de section conduites convenablement. L'étude de ces systèmes compliqués n'offrant qu'un intérêt spéculatif, nous nous contentons d'énoncer le principe suivant : dans un système articulé toute partie indéformable peut être remplacée par une autre s'appuyant sur les mêmes barres du reste du système, pourvu que cette autre partie indéformable soit sollicitée par un système de force équivalent au système supprimé ; les tensions des barres restantes ne sont pas changées. Comme application de ce principe, nous pouvons dans la fig. 64 enlever la partie invariable *DBK* et la remplacer par une nouvelle partie indéformable formée des barres **3**, **5**, **2'** et **4'** ; on reconnaîtra aisément que la nouvelle poutre admet comme polygone des pôles **1** *2'* *3'* *P'* ; la tension de la barre **6** n'ayant pas changé, on retombe sur la construction du numéro précédent. On pourrait aussi remplacer la poutre *DKA* par une seule barre *DL* tracée de façon que le sommet *L'* soit sur la résultante de toutes les forces extérieures ; on trouve ainsi la tension **6** d'une autre manière qui serait très-simple si elle n'exigeait au préalable de combiner les forces en une résultante unique, qui souvent sort des limites du dessin.

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION GRAPHIQUE ET SES APPLICATIONS

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION GRAPHIQUE ET SES APPLICATIONS

PAR

J. MASSAU

Ingénieur des ponts et chaussées

(Extrait des *ANNALES DE L'ASSOCIATION DES INGÉNIEURS* sortis des Écoles spéciales de Gand.)

LIÉGE

IMPRIMERIE DE CH. AUG. DESOER, LIBRAIRE

1884

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION GRAPHIQUE ET SES APPLICATIONS.

LIVRE III.

CALCUL D'UN PROJET DE ROUTE.

CHAPITRE I.

Représentation graphique des cubes de déblai et de remblai

§ 1er. Cubes limités par des surfaces quelconques.

155. Cas du déblai. — Nous supposons les surfaces du terrain et du projet définies par un profil en long et des

profils en travers suffisamment rapprochés. Prenons un point quelconque de l'axe de la route comme origine et soit ω la section, supposée de déblai, d'un profil en travers situé à une distance x de cette origine. Si nous déplaçons cette section d'une quantité infiniment petite dx, elle engendrera un élément de volume qui peut être considéré comme un prisme de section ω et de hauteur dx et qui a pour mesure ωdx. Le cube de déblai compris entre deux sections quelconques a pour valeur :

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \omega dx$$

x_0, x_1 étant les abscisses des sections extrêmes.

Prenons (fig. 66, pl. 1) deux axes coordonnés ox, oS; portons sur ox les abscisses x des profils en travers, sur oS les sections de ces mêmes profils; nous obtiendrons une courbe telle que AB. Soit Mm une section quelconque ω, le cube ωdx sera représenté par la surface élémentaire MM'$m'm$; on en conclut que le cube de déblai compris entre deux sections quelconques Aa, Bb est représenté par la surface ABba. Cette surface se calculera au moyen d'une intégration graphique.

156. Cas du remblai. — Le raisonnement du numéro précédent s'applique en tout point au cas du remblai; seulement nous considérerons les sections et les cubes de remblai comme des quantités négatives; les sections de remblai seront portées dans le sens des ω négatifs; les cubes de remblai seront représentés par des surfaces telles que CDdc situées en dessous de l'axe des x. Entre deux sections de signes contraires Bb, Cc se trouve une section nulle qui doit se réduire à une ligne; c'est la ligne qui sépare le déblai du remblai et que l'on appelle pour ce motif *ligne de passage*.

157. Profils mixtes. — Les profils mixtes sont ceux qui contiennent à la fois du déblai et du remblai; en considérant séparément le cube de déblai et le cube de remblai, on est ramené aux cas précédents. La méthode qui suit nous paraît plus élégante que celle que l'on donne habituellement.

Portons en ordonnée la surface de déblai et de remblai bout à bout dans le sens qui convient à leur signe; ainsi par exemple (fig. 66bis) M'm sera la section de déblai; M'M la section de remblai d'un profil; le point M' engendrera la courbe A'B' des surfaces de déblai, le point M engendrera la courbe A B des surfaces de remblai en prenant la courbe A'B' comme ligne de repère; enfin cette courbe A B, rapportée à l'axe ox, représente les sections totales au point de vue algébrique, c'est-à-dire la différence entre les surfaces de déblai et de remblai. Sur une longueur $mn = dx$ le cube de déblai est représenté par la surface M'N'nm, le cube de remblai par la surface M'N'NM; la partie commune à ces deux surfaces, que nous avons indiquée par des hachures, représente le déblai à effectuer en profil, c'est-à-dire par un transport perpendiculaire à l'axe de la route; la partie non commune MNnm représente le déblai à transporter hors profil, c'est-à-dire parallèlement à l'axe de la route. Dans la figure 66bis les surfaces de déblai sont plus grandes que les surfaces de remblai; dans la figure 67, au contraire, les surfaces de remblai sont supposées plus grandes que celles de déblai; dans ce dernier cas, le remblai à effectuer hors profil est représenté par la surface MNnm, le déblai à effectuer en profil par la surface M'N'nm. En résumé, si on porte bout à bout une ordonnée proportionnelle à la surface de déblai, une ordonnée proportionnelle à la surface de remblai, la partie commune à ces deux ordonnées engendrera une surface représentant le cube de déblai ou de remblai à effectuer en profil, la partie non commune engendrera une surface représentant le cube de déblai ou de remblai à effectuer hors profil; lorsqu'on ne se propose que de représenter ce dernier cube il suffit de porter en ordonnées les sections totales, c'est-à-dire les différences entre les sections de déblai et de remblai.

§ 2. Hypothèses sur la forme du terrain et du projet.

158. Hypothèse fondamentale. — Pour appliquer la méthode qui vient d'être exposée, il faudrait avoir des profils

en travers très rapprochés pour pouvoir tracer les courbes des sections de déblai et de remblai. En pratique, on prend des profils en travers assez éloignés; mais, comme on a soin de prendre ces profils en travers, là où le terrain change de direction, on peut supposer, sans erreur sensible, qu'entre deux profils en travers consécutifs, les surfaces du terrain et du projet ne présentent pas de courbure parallèlement à l'axe de la route; en d'autres termes, que ces surfaces peuvent être engendrées par le mouvement d'une droite s'appuyant sur les deux profils voisins en restant parallèle au plan vertical projetant l'axe de la route. C'est de cette hypothèse qu'on déduit la loi des sections transversales.

159. Loi des sections dans un entre-profil. — Soient (fig. 68) AB*ba* et CD*cd* deux profils en travers consécutifs; menons deux plans verticaux MN*nm* et M'N'*n'm'* parallèles à l'axe de la route et distants l'un de l'autre d'une quantité infiniment petite ε; ces plans couperont les surfaces du terrain et du projet suivant les génératrices MM', *mm'*, NN, *nn'*. Cherchons d'abord la loi des sections transversales du cube infiniment petit compris entre ces deux plans. Soit x l'abscisse d'une section quelconque EE'*e'e*; en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur, cette section peut être considérée comme un rectangle de base constante ε et de hauteur variable E*e*; cette hauteur E*e* étant comprise entre deux droites MN et *mn* est une fonction du premier degré de l'abscisse x; en multipliant cette hauteur par la constante ε, on obtiendra la section EE'*e'e* qui dès lors s'exprime aussi par une fonction du premier degré en x.

Si nous considérons deux plans verticaux parallèles à l'axe de la route et situés à une distance finie, nous pourrons décomposer le cube compris entre ces deux plans en tranches infiniment minces de la nature de celle qui vient d'être considérée; on en conclut que la section transversale du cube considéré est aussi une fonction du premier degré, somme des fonctions du premier degré qui expriment les éléments de cette section. Il est évident d'ailleurs qu'il s'agit ici d'une somme algébrique, c'est-à-dire que si la section renferme

du déblai et du remblai, c'est l'excès de la surface du déblai sur celle de remblai qui s'exprime par une fonction du premier degré.

Enfin nous pouvons étendre cette loi à la section totale du profil en travers; à la vérité, si les largeurs d'emprises sont différentes, il y aura vers les arêtes extrêmes des talus deux cubes qu'il sera impossible de comprendre entre deux plans verticaux parallèles à l'axe de la route; mais comme ces cubes sont peu importants, on peut, sans erreur sensible, supposer que la section totale d'un profil en travers est une fonction du premier degré de l'abscisse. Il résulte de ces considérations que la loi des sections totales ou des sections partielles comprises entre deux plans verticaux parallèles à l'axe de la route est représentée graphiquement par une ligne droite dans chaque entre-profil.

160. Déblais et remblais à effectuer hors profil. — Pour représenter graphiquement les cubes de déblai et de remblai à effectuer hors profil, il suffit de calculer algébriquement les sections totales des profils en travers, de porter ces sections en ordonnée et de joindre les points obtenus : les surfaces comprises entre le polygone ainsi tracé et l'axe des abscisses représentent les cubes dont il s'agit.

161. Déblais à effectuer en profil. Méthode dite expéditive. — Soient (fig. 70) trois profils mixtes a, b, c; soient I, I', I'' les points de passage de ces trois profils; menant les droites II', I'I'', la ligne brisée II'I'' divise les volumes à évaluer en deux parties que l'on considère séparément; on suppose, pour faciliter les calculs, que dans chacune de ces parties, la loi des sections transversales en deux profils en travers consécutifs est représentée par une ligne droite. Considérons d'abord la partie située à droite de la ligne II'I'' et portons en A'a, B'b, C'c les sections ω_1, ω_2, ω_3 de ce volume par les profils en travers; joignant les points A', B', C', le volume dont il s'agit sera représenté par la surface comprise entre le polygone A'B'C' et l'axe des x. Considérons ensuite la partie située à gauche de cette ligne II'I'' et portons à la suite des ordonnées précédemment tracées, c'est-à-dire en

A'A, B'B, C'C les sections ω_1', ω_2', ω_3' de cette partie de volume par les profils en travers; en joignant les points A, B, C, ce volume sera représenté par la surface comprise entre les polygones ABC et A'B'C'. Nous savons déjà que la surface comprise entre le polygone ABC et l'axe des x représente les déblais et remblais à effectuer hors profil; les autres surfaces que nous avons représentées par des hachures, c'est-à-dire les surfaces engendrées par les parties communes des ordonnées de déblai et de remblai, représentent le cube de déblai à effectuer en profil.

162. Même question. Méthode dite exacte. — Soient (fig. 71) les deux profils a et b; menons par les points de passage I, I' des plans verticaux parallèles à l'axe de la route; nous diviserons l'entre-profil en trois parties que nous désignerons par V_1, V_2, V_3.

Soient ω_1, ω'_1 les sections extrêmes du volume V_1, ω_2, ω'_2 les sections extrêmes du volume V_2, ω_3, ω'_3 les sections extrêmes du volume V_3; portons en ordonnée $aA' = \omega_1$ $A'A'' = \omega_2$, $A''A = \omega_3$; portons de même $bB' = \omega'_1$, $B'B'' = \omega'_2$, $B''B = \omega'_3$; menons les droites A'B', A''B'' et AB; le volume V_1 est représenté par la surface comprise entre la droite A'B' et l'axe des x, le volume V_2 par la surface comprise entre les droites A''B'' et A'B', le volume V_3 par la surface comprise entre les droites AB et A''B''.

Nous savons déjà que la surface comprise entre la droite AB et l'axe des x représente les déblais et remblais à effectuer hors-profil; les autres surfaces que nous avons représentées par des hachures sont les surfaces engendrées par les parties communes des ordonnées de déblai et de remblai et représentent le déblai à effectuer en profil.

163. Comparaison des deux méthodes précédentes. — Quoique la méthode du numéro précédent ait été désignée sous le nom de méthode exacte, il est facile de reconnaître que l'on commet encore une certaine erreur en l'appliquant. Le volume V_2 est, en effet, engendré par une section mixte; en supposant que sa section transversale varie comme les ordonnées comprises entre les droites A''B'' et A'B' (fig. 71)

on obtient la loi exacte des sections algébriques de ce volume ; on néglige, par conséquent, un certain volume de déblai et un volume de remblai équivalent.

Pour opérer d'une manière complètement exacte, il faudrait déterminer la loi de la variation de la section ω' de déblai et de la section ω'' de remblai du volume V_2 ; en portant la section ω' en ordonnée au-dessus de la ligne A'B', on obtiendrait une courbe A'MB'' ; en portant ensuite la section ω'' en ordonnée au-dessous de la courbe A'M''B on retomberait sur la droite A''B'', cette droite représentant la loi des sections totales du volume V_2 : la courbe A'MB'' limite la surface représentant exactement le déblai à effectuer en profil.

Pour tracer la courbe A'MB'' subdivisons le volume V_2 par des plans verticaux parallèles à l'axe de la route et très rapprochés les uns des autres ; nous obtiendrons un résultat très approché en supposant qu'entre deux plans consécutifs la section transversale reste homogène. Portons en A'1, 12, 23, 3A'' les parties de la section ω_2 ; portons de même en B'1', 1'2', 2'3', 3'B'' les parties correspondantes de la section ω'_2 ; menons les droites A'B', 11', 22', 33', A''B'' ; ces droites, par leurs intersections successives, déterminent un polygone qui s'approchera beaucoup de la courbe A'MB' ; si ces droites étaient infiniment nombreuses et infiniment rapprochées, l'erreur serait nulle ; on en conclut que les droites A'B', 11', 22', 33', A''B'' ont pour enveloppe la courbe cherchée A'MB''.

Cette méthode est tout-à-fait générale ; mais lorsque les surfaces ω_2, ω'_2 sont des triangles, on peut opérer autrement ; au moyen d'un calcul analytique qui n'est pas très compliqué, on démontre que la section ω' de déblai du volume V_2, à une distance x du profil a, est donnée par une expression de la forme

$$\omega'' = \frac{\alpha x + \beta x^2}{x - \gamma}.$$

La courbe A'MB'' est donc une hyperbole dont l'une des asymptotes est verticale ; cette hyperbole est complètement déterminée par les deux points A', B'' et les tangentes en ces points ; si nous appliquons la méthode du n° 102 nous

trouvons la construction suivante : menons A″F parallèlement à A′B″ ; menons des ordonnées divisant A′B″ en n parties égales ; divisons également B″F en n parties égales et menons les rayons joignant A′ aux points de divisions ; ces rayons détermineront sur les ordonnées tracées les points de l'hyperbole cherchée.

Nous pouvons actuellement reconnaître les erreurs que l'on commet en appliquant les méthodes des deux numéros précédents ; en appliquant la méthode expéditive on remplace la courbe AM′B″ par sa corde ; en appliquant la méthode dite exacte, on remplace la courbe par ses tangentes extrêmes. Quoique cette dernière méthode soit la plus exacte, la première est plus avantageuse parce qu'elle conduit à une évaluation trop forte des déblais en profil, tandis que la seconde donne évaluation trop faible.

Nous avons supposé que les profils consécutifs a et b étaient disposés de telle façon que les sections de déblai soient du même côté ; dans le cas contraire, on peut reconnaître, en suivant la même marche, que les deux méthodes des numéros précédents donnent toutes les deux un résultat trop faible. Ajoutons enfin que la marche que nous avons suivie permet aussi d'évaluer d'autres erreurs commises dans le cas où les profils sont homogènes, telles que les erreurs commises par suite de l'inégalité des largeurs d'emprises, erreurs qui résultent de ce que les lignes de passage ne sont pas perpendiculaires à l'axe de la route.

Dans certains cas, il est indispensable d'assimiler la surface du terrain à une surface gauche dont les génératrices sont parallèles à un plan directeur non vertical ; les lois des sections algébriques totales ou partielles sont alors représentées par des arcs de paraboles ; en prenant un profil auxiliaire dans chacun des entre-profils on détermine ces arcs de parabole par trois points et la représentation des cubes peut encore se faire.

164. Éléments à déterminer. — Les différentes opérations de calcul graphique nécessaire pour étudier un projet de route sont les suivantes :

1° Il faut calculer les surfaces de déblai et de remblai : ce sera l'objet du chapitre II et du chapitre III.

2° Il faut calculer les cubes de déblai, de remblai et évaluer la dépense à faire : ce sera l'objet du chapitre IV.

CHAPITRE II.

Calcul des surfaces de déblai et de remblai.

§ 1er. Méthodes générales.

165. Échelles. — Les surfaces de déblai et de remblai que nous nous proposons de calculer sont comprises entre deux lignes brisées, savoir : la ligne du terrain naturel et la ligne du projet ; le calcul de ces surfaces se ramène à une simple intégration graphique. En Belgique, les instructions prescrivent de dessiner les profils en travers à l'échelle de 1 centimètre par mètre ; en adoptant une base d'intégration égale à 2 centimètres, on obtiendra les surfaces à l'échelle de $^1/_2$ centimètre par mètre carré. Nous avons adopté des échelles deux fois plus petites.

166. Exemples. — 1° *Cas du déblai.* — Nous avons représenté (fig. 72) une section de déblai et les constructions qui permettent de trouver la ligne S*s* représentant la surface du profil ; nous avons indiqué par les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, les rayons du diagramme, et par les chiffres gras **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, les côtés parallèles de l'intégrale ; la méthode par ordonnée moyenne que nous avons employée est préférable à la méthode par abscisse moyenne, parce que, en général, les côtés tels que BC, CD, DE, qui limitent le terrain naturel, ne sont pas très inclinés sur l'horizon et qu'alors on peut, sans commettre une erreur sensible sur l'ordonnée moyenne, prendre à vue G, H, I, milieux de ces côtés. Pour la partie extrême DEF*d*, nous avons employé la méthode du numéro 46 ; le pôle décrit la ligne des pôles et vient en P_4 et P_5. Pour l'autre partie extrême AB*b*, nous aurions pu adopter

la même construction; mais toutes les fois que les parties extrêmes sont des triangles, on peut opérer plus simplement; remarquons en effet que l'ordonnée moyenne MN est égale à la moitié de Bb; pour avoir la direction 1, nous projetterons le point B sur l'axe du diagramme et nous joindrons le point obtenu à un pôle P' tel que P'o = 2 . Po = 2λ; en doublant l'ordonnée moyenne, nous obtenons pour le triangle ABb un résultat deux fois trop grand; en doublant la base d'intégration, nous faisons disparaître cette erreur.

2° *Cas du remblai.* — Nous avons indiqué (fig. 74) un profil de remblai; les constructions sont les mêmes que dans le cas du déblai; la seule différence c'est que l'intégrale a ses ordonnées négatives.

3° *Cas d'un profil mixte.* — Nous avons représenté (fig. 79) un profil contenant du déblai et du remblai; en appliquant encore la même construction, on obtient l'intégrale ABC; l'ordonnée extrême Cc est la surface algébrique du profil, c'est cette longueur que l'on doit porter en ordonnée sur le profil en long pour représenter les cubes de déblai et de remblai à effectuer hors-profil. Pour représenter les déblais en profil, il faut porter en ordonnée les surfaces de déblai et de remblai bout à bout comme elles sont placées en cB' et B'C.

4° *Modification de la méthode.* — Pour appliquer les méthodes précédentes, il faut prendre les milieux des côtés du polygone qui limite la surface; lorsque les côtés sont très inclinés sur l'horizon on peut faire usage du compas de réduction pour obtenir rapidement et exactement ces points milieux. Dans la figure 81 nous avons indiqué un procédé d'intégration où l'on évite cette division en deux parties égales. Elle est fondée sur la remarque que la surface d'un trapèze tel que CD dc est la moyenne arithmétique des surfaces de deux rectangles ayant cd pour base et pour hauteur respective les ordonnées extrêmes Cc et Dd du trapèze. D'après cette remarque, remplaçons chacun des trapèzes qui composent la surface à évaluer par une surface rectangulaire comprise entre les mêmes ordonnées extrêmes et dont la hauteur, soit l'ordonnée extrême de gauche du trapèze,

nous trouverons une première surface S's inexacte; remplaçons ensuite chacun de ces mêmes trapèzes par un rectangle compris entre les mêmes ordonnées extrêmes et ayant pour hauteur l'ordonnée extrême de droite de ce trapèze; nous obtiendrons une seconde surface S''s inexacte. La moyenne entre les surfaces S's et S''s donne la surface exacte; mais il est inutile de chercher cette moyenne; il suffit de doubler la base d'intégration, ce qui rend les surfaces deux fois trop petites et de porter bout à bout les longueurs S's, S''s sur le profil en long.

Il est à remarquer que les deux intégrales se tracent simultanément : les côtés portant les mêmes chiffres s'obtiennent par le même mouvement d'équerre.

167. Méthode par bande de papier. — Toute surface de déblai ou de remblai peut se décomposer par verticales équidistantes en trapèzes ou surfaces qui s'y ramènent aisément; si nous appelons y_m l'ordonnée moyenne de ces trapèzes, la surface cherchée S est donnée par la formule

$$S = \lambda \Sigma y_m ,$$

λ étant la distance des verticales; si, en particulier, λ est la base d'intégration, la surface sera représentée par Σy_m (n° 6, 3°). Il suffit donc de porter sur une bande de papier (fig. 73) les longueurs y_m à la suite les unes des autres pour obtenir la droite représentant la surface cherchée.

Lorsqu'un sommet M tombe entre deux verticales, il suffit de transformer la surface BMCcb en un trapèze équivalent BC'cC; on obtient le point C' en menant MC' parallèlement à BC. Une transformation analogue s'appliquerait au cas où il y aurait plusieurs sommets entre deux verticales voisines.

A l'extrémité du profil on trouve une surface triangulaire ou s'y ramenant aisément; soit ABb le triangle à évaluer; on transforme ce triangle en un autre triangle A'B'b, équivalent au triangle connu et dont l'une des dimensions soit λ; il suffit, pour y arriver, de mener AB' parallèlement à A'B et de joindre A'B'. Généralement ces transformations peuvent se faire à vue avec une exactitude suffisante.

§ 2. Cas d'un terrain horizontal dans la direction des profils en travers.

168. Application de la méthode générale. — Soit A B C D (fig. 69) un profil en travers ; il est facile de reconnaître que la surface de ce profil est équivalente au rectangle A'C C'A. Prenons dès lors $\lambda P = A$, base d'intégration ; menons la droite P A', on obtient en S C la surface cherchée.

169. Méthode particulière. — Pour un même projet de route, la largeur de la plate-forme des terrassements reste constante d'une part pour tous les profils de déblai ; d'autre part pour tous les profils de remblai ; il en résulte que dans le cas qui nous occupe, les surfaces des profils ne dépendent que de la hauteur de déblai ou de remblai. Les relations entre cette hauteur et la surface de déblai et de remblai peuvent être représentées par deux courbes en portant la hauteur en abscisse, et les surfaces de déblai et de remblai en ordonnée. Ces courbes étant construites, le calcul des surfaces se fait rapidement sans qu'il soit nécessaire de tracer les profils en travers ; il suffit de prendre sur le profil en long la hauteur de déblai et de remblai et de la porter en abscisse sur l'une ou l'autre courbe selon le cas ; l'ordonnée donne la surface cherchée.

Nous avons représenté, fig. 77, la construction de la courbe des surfaces de déblai pour une route de 8 mètres de largeur en couronne avec fossé de $1^m,20$ de longueur en gueule et talus à $^4/_4$. Soient ox, oy deux axes coordonnés, A B b o le demi-profil type ; la courbe cherchée est évidemment la ligne qui représente le double de l'intégrale de la droite A B ; la figure indique suffisamment la méthode d'intégration graphique employée.

Nous avons représenté, figure 78, la construction de la courbe des surfaces de remblai pour la même route ; nous aurions pu employer la même construction que pour les déblais, mais nous avons employé une autre méthode. Soient $o\,x$, oy deux axes coordonnés, A B C O le profil type

des remblais; la surface de ce profil est équivalente au rectangle B'Bbo dont la surface S est donnée par la formule $S = yx$. y, x étant les coordonnées du point B. Il suffit donc de multiplier les ordonnées de la droite A B par les abscisses (n° 70) pour obtenir la courbe des surfaces cherchées; la courbe est rapportée à l'axe Ax'.

Dans les méthodes suivantes nous ne considérons que le cas du déblai, mais le cas du remblai se traite de la même manière.

170. Cas où les côtes sont données en nombre. — Dans ce cas, il est préférable de porter, sur l'axe des S (fig. 77) ou sur un axe o'S' qui lui est parallèle, les longueurs qui représentent les surfaces relatives aux côtes successives 0, 0,1, 0,2, etc...; on obtient ainsi une échelle à divisions inégales; les chiffres de la graduation, située à droite de l'axe, indiquent la côte de déblai, mais les longueurs portées à partir des points o' représentent les surfaces de déblai; on obtient ainsi les surfaces en longueur.

Pour obtenir les surfaces en nombre, il suffit de juxtaposer à gauche de l'axe o'S' une échelle des mètres carrés.

171. Côtes en longueurs, surfaces en nombres. — On peut aussi porter sur l'axe OX des côtes de déblai ou sur un axe O'' X'', qui lui est parallèle, les côtes relatives aux surfaces 0, 1, 2, 3.... mètres carrés; on obtient une échelle à divisions inégales indiquées au-dessus de l'axe O''X''; connaissant la côte en longueur, on la porte sur O''X''; le chiffre de la graduation supérieure donne la surface en mètres carrés.

Si l'on construit une échelle des mètres à partir de O'', on pourra obtenir la surface de déblai relative à une côte donnée en nombre.

172. Côtes et surfaces en longueurs. — L'emploi des échelles o'S'', ou o'X'' ne supprime pas tous les calculs; dans le premier cas, il faut calculer les côtes de déblai ou de remblai; dans le second cas, il faut porter à l'échelle les surfaces obtenues en nombre. L'emploi des courbes des figures

77 et 78 supprime tout calcul; on prend sur une bande de papier les côtes de déblai et de remblai; on la fait glisser parallèlement à l'axe ox; sur une bande de papier que l'on place parallèlement à l'axe OS on prend immédiatement les surfaces que l'on porte ensuite sur le profil en long pour procéder à l'évaluation des cubes. Lorsque la largeur de la plate-forme de la voie varie, les mêmes courbes peuvent servir avec un changement d'origine, mais il faut une nouvelle épure si l'inclinaison des talus sur l'horizon vient à changer. Dans la méthode suivante, on transforme les courbes en lignes droites et la même épure s'applique quelles que soient la largeur du profil et l'inclinaison des talus.

Portons les côtes de déblai ou de remblai sur un axe quelconque aM (fig. 82), les surfaces sur un autre axe bN; soient aA $= h$, bB $= s$; joignons les points correspondants par des droites AB que nous supposerons suffisamment rapprochées pour pouvoir à vue mener la droite qui correspond à une côte donnée. La figure que l'on obtiendra de cette manière donne la solution du problème; car si l'on fait glisser la bande de papier portant les côtes sur aA, en plaçant une autre bande de papier suivant bB, on pourra y porter les surfaces de déblai ou de remblai. Les axes aM et bM sont quelconques; mais dans la figure 82 nous avons choisi une disposition qui permet de construire facilement les droites AB. En ajoutant une constante on peut transformer la surface déblai ABCD (fig. 76) en un triangle ODC; soit H = OI, ce qui donne la côte dans cette hypothèse, soit T l'inclinaison des talus sur l'horizon, on a :

$$S = \frac{H^2}{T}.$$

Portons OA = H, OB = S; pour obtenir la relation entre la côte h = IK et la surface s = ABCD, il suffit de déplacer l'origine de O en a et b, points que l'on obtient en prenant Oa = OK.

Pour construire les droites AB, on prend $\overline{OP} = \lambda$, $\overline{OA} = H$, on mène AB perpendiculairement à PA, on a : $\overline{OA}^2 = \overline{OB} \times \overline{OP}$

d'où $OB = \frac{H^2}{\lambda}$; OB représente la surface $S = \frac{H^2}{T}$ à une échelle qui dépend de λ. On peut démontrer par la géométrie analytique (voir n° 203) que les droites AB enveloppent une parabole et que deux ou plusieurs de ces droites telles que CN et OM sont divisées par les autres en segments proportionnels ; en d'autres termes, on a $\frac{CD}{OA} = \frac{CN}{OM} = k$. Il résulte de là que l'on peut supposer que CD représente H à une échelle k fois plus grande que o A. Plaçons-nous à ce point de vue ; supposons CD = H, OB = S, ON = S_1 ; on a $S = \frac{\overline{oA}^2}{\lambda}$, or, $o\,A = \frac{H}{k}$, donc $S = \frac{H^2}{k^2\lambda}$. Si u est la base d'intégration adoptée pour représenter la surface $\frac{H^2}{T}$ par une ligne S, on a $S\,u = \frac{H^2}{T}$ ou $S = \frac{H^2}{T\,u}$; les deux valeurs de S devant être identiques, on a : $T\,u = k^2\lambda$. Remplaçons k^2 par sa valeur $k^2 = \frac{\overline{CN}^2}{\overline{OM}^2} = \frac{\overline{MN}^2}{\overline{OM}^2} = \frac{PN \times ON}{OP \times ON} = \frac{\lambda + S_1}{\lambda}$, il vient $T\,u = \lambda + S_1$ d'où $S_1 = T\,u - \lambda$. On détermine u au moyen des échelles des longueurs et des surfaces ; on se donne λ ; on obtient S_1 qui détermine l'axe des HCN. Si T varie, S_1 varie, on obtient un autre axe des H, mais l'épure ne change pas.

§ 3. Cas où le profil du terrain est une ligne droite quelconque.

173. Cas du déblai. — Soit ABCD (fig. 75) le profil de déblai qu'il s'agit d'évaluer ; on appliquerait aisément la méthode générale à ce cas particulier ; nous nous contenterons de faire connaître une méthode particulière applicable aux profils de la nature de celui que nous considérons. Menons à cet effet la droite AF qui divise la surface en deux parties que nous évaluerons séparément. La partie AFCB est formée de deux triangles, l'ordonnée moyenne est donc

$\frac{1}{2}$ B F, en employant le procédé exposé au numéro 160 pour l'évaluation des triangles extrêmes des profils ordinaires, nous sommes conduits à la construction suivante : prenons B P = 2λ, λ étant la base d'intégration ; menons A G_1 parallèlement à B F, nous obtiendrons en G_1 C' la surface A F C B. Si en particulier nous prenons $\frac{AB}{2}$ pour base d'intégration, le point P se confond avec le point A ; il suffit alors de joindre A F, on obtient en G C' la surface A F C B. La surface D F A s'obtient de la même manière; en prenant $\frac{AB}{2}$ pour base d'intégration, cette surface est représentée par H D', le point H étant sur le prolongement de la droite B E; la surface totale est donc G C' + H D'.

La construction devient d'une simplicité remarquable, remarquons en effet que les droites B F et A E sont tracées avant de passer au calcul des surfaces ; ces droites sont nécessaires au tracé des profils du projet ; les droites G C' et H D' doivent être tracées également pour la détermination de la largeur d'emprise ; la construction se réduit donc à tracer les droites B F et A E ou plutôt, en évitant de tracer ces droites, elle se réduit à marquer les points G et H que l'on obtient en plaçant une règle suivant A F et B E ; l'addition G C' + H D' ne s'effectue que lorsque l'on représente graphiquement les cubes de déblai et de remblai ; on porte à cet effet les longueurs G C' et H D' bout à bout en ordonnée sur le profil en long.

174. Cas du remblai. — La construction précédente s'applique aux profils de remblai ; seulement la largeur de la plate-forme des terrassements étant différente pour les déblais et les remblais, on obtiendrait ainsi les surfaces à deux échelles différentes. Cette difficulté se résout facilement en employant un compas de réduction pour ramener toutes les surfaces à une même échelle. Si l et l' désignent la largeur des plates-formes de déblai et de remblai, si λ est la base d'intégration unique que l'on veut adopter, on mettra

es branches du compas de réduction dans le rapport $\frac{l}{2\lambda}$ pour prendre les surfaces de déblai, dans le rapport $\frac{l'}{2\lambda}$ pour prendre les surfaces de remblai.

175. Cas d'un profil mixte. — Soit ABCD (fig. 76) le profil mixte donné; lorsque les talus de déblai et de remblai ont la même inclinaison et qu'il ne s'agit que de chercher la section totale algébrique, on peut remarquer que cette section totale est équivalente au parallélogramme AA' BB' dont le côté A' B' passe par le milieu I' de la ligne C D. En effet, on a :

$$\text{Surface A' I' D} = \text{Surface I' C B'}$$

ou bien en appelant ω_d la surface de déblai, ω_r la surface de remblai,

$$\omega_d - \text{Surface O I' B'B} = \omega_r + \text{Surface A A' I' O}$$

d'où $\omega_d - \omega_r = \text{Surface A A' B' B.}$

Soit I' I'' la distance du point I' à la droite A B, la section algébrique cherchée a pour valeur

$$\text{A B} \times \text{I' I''}$$

et pour l'obtenir à une échelle déterminée correspondante à une base d'intégration donnée λ, il suffit de multiplier I' I'' dans le rapport $\frac{\text{A B}}{\lambda}$ au moyen des compas de réduction ou autrement.

Lorsque les talus ont une inclinaison différente ou bien lorsque l'on veut obtenir ω_d et ω_r, on emploie la méthode générale. On prend B P $= 2\lambda$, on mène O G parallèlement à P E, G C' donne la surface ω_d ; de même on prend A P' $= 2\lambda$, on mène O H parallèlement à P F, on obtient en H D' la surface ω_r.

176. — Les méthodes qui précèdent s'appliquent aussi au cas où la ligne du terrain est brisée sur l'axe ; on divise alors la surface en deux demi-profils, dont chacun se calcule séparément ; ainsi, dans la figure 82,

$$\omega = \text{AB} + \text{CD}, \quad \omega' = \text{A B} + \text{EF}.$$

CHAPITRE III

Tables graphiques pour le calcul des surfaces et des largeurs.

§ I. Méthodes de M. Lalanne (1).

177. Représentation d'une fonction de deux variables. — Soit à représenter une fonction z, de deux variables x et y, définies par l'équation

$$f(xyz) = 0.$$

Prenons deux axes rectangulaires sur lesquels nous porterons x et y, traçons les droites $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$...., $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$,....; traçons au besoin les droites intermédiaires $x = 0,1$, $x = 0,2$, etc., de telle manière que le plan de l'épure soit quadrillé et que l'on puisse immédiatement trouver un point dont on donne les coordonnées; si l'on imagine un axe oz perpendiculaire au plan des deux autres ox et oy, on peut considérer les différentes valeurs de z comme les ordonnées d'une surface dont l'équation est $f(xyz) = 0$; on représente cette surface par la méthode des plans cotés, en traçant les courbes d'égales cotes ou courbes de niveau dont on obtient les équations en faisant $z = 1$ $z = 2$, $z = 3$... et au besoin $z = 0,1$, $z = 0,2$, $z = 0,3$, etc...; ces courbes étant tracées, la table graphique est construite; si l'on donne x et y, on obtient immédiatement z de la même manière que l'on trouve l'altitude d'un point sur une carte militaire.

---

(1) M. Lalanne a publié ses méthodes à diverses reprises: Appendice à la météorologie de Kaemtz (1843); Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, t. XVII, p. 432; Annales des ponts et chaussées, 1er semestre 1846 et 1er semestre 1850.

M. Lalanne a montré que l'on peut de cette manière représenter toutes les racines d'une équation contenant deux coefficients variables; soit, par exemple, l'équation du troisième degré, mise sous la forme :

$$z^3 + pz + q = 0,$$

z est une fonction des variables p et q que l'on représente en portant $x = p$, $y = q$; la surface à représenter a pour équation $z^3 + xz + y = 0$; les lignes de niveau sont des droites dont on obtient les équations en posant $z = 0{,}1$, $z = 0{,}2$, etc.

M. Lalanne a construit ces droites au moyen de leur équation; on peut aussi les obtenir comme il suit : on prend (fig. 83) $OP = 1$, $OA = z$, on mène une perpendiculaire AB sur AP, et une perpendiculaire BC sur AB, BC est la ligne $z^3 = xz + y = 0$; un premier mouvement d'équerre donne B, un second donne BC.

On obtient ainsi le tableau fig. 83, pl. 2; on voit que les lignes de niveau enveloppent une courbe; si le point dont p et q sont les coordonnées se trouve à l'intérieur de la courbe, il y a trois racines réelles; si ce point est sur la courbe, deux racines sont égales; si le point est à l'extérieur, il n'y a qu'une seule racine réelle.

178. Principe de la graduation des coordonnées; anamorphose géométrique. — Lorsque l'on applique la méthode précédente, il arrive fréquemment que les lignes d'égale cote sont des courbes difficiles à construire; M. Lalanne a imaginé un principe très-ingénieux qui permet, dans certains cas, de transformer ces courbes en ligne droite. Soit à construire une table graphique de multiplication donnant immédiatement $z = xy$, connaissant x et y; en appliquant la méthode précédente, on obtient pour lignes d'égale cote des hyperboles équilatères difficiles à construire. Prenons les logarithmes $x' = \log x$ $y' = \log y$, $z' = \log z$, on a :

$$\log x + \log y = \log z \quad \text{ou} \quad x' + y' = z'.$$

Donnons à x, y, z les valeurs 1, 2, 3... à 10; construisons les lignes $x' = \log x$, $y' = \log y$, $x' + y' = z'$, on obtient la figure 84.

Les lignes d'égale cote sont des droites inclinées à 45° sur les axes. « Les hyperboles, dit M. Lalanne, ont été transformées en d'autres lignes, grâce à l'emploi de coordonnées graduées suivant une loi déterminée; et ce genre de transformation peut être qualifié d'anamorphose géométrique. »

On peut de la même manière représenter les valeurs de $t = \frac{x}{y}$; en posant $t' = \log t$, on a :

$$\log y - \log x = \log t \quad \text{ou} \quad y' - x' = t';$$

les lignes d'égale côte sont des droites perpendiculaires aux précédentes.

En un point de la figure 84 passent 4 lignes, et on peut lire 4 côtes x, y, z, t entre lesquelles existent les deux relations $z = xy$, $t = \frac{y}{x}$; connaissant deux de ces cotes, on trouve le point correspondant et on trouve les deux autres sur le tableau; en résolvant les deux équations par rapport à deux des variables, on trouve toutes les formules que l'on peut calculer par ce tableau graphique que M. Lalanne a appelé abaque à transversales, ou compteur universel.

Ces formules sont les suivantes: 1° On donne x et y, on trouve $z = xy$, $t = \frac{y}{x}$. 2° On donne x et t, on trouve $y = tx$, $z = tx^2$. 3° On donne y et t, on trouve $x = \frac{y}{t}$, $z = \frac{y^2}{t}$. 4° On donne x et z, on trouve $y = \frac{z}{x}$, $t = \frac{z}{x^2}$. 5° On donne y et z, on trouve $x = \frac{z}{y}$, $t = \frac{y^2}{z}$. 6° On donne z et t, on trouve $y = \sqrt{zt}$ $x = \sqrt{\frac{z}{t}}$. On peut aussi calculer les puissances $y = x^p$; on a: $\log y = p \log x$ équations d'une droite OA qui sort du cadre de l'épure, mais que l'on ramène en A'B; en lisant y sur A'B, on ajoutera 10.

L'anamorphose de M. Lalanne s'applique à un grand nombre de fonctions; la forme la plus générale permettant

la transformation des lignes d'égale cote en ligne droite, est la suivante :

$$ax' + by' + c = 0,$$

a, b, c étant trois fonctions quelconques de z, $x' = \varphi(x)$ $y' = \psi(y)$. Cette expression contient quatre fonctions arbitraires $\frac{a}{c}$ $\frac{b}{c}$ x' et y'. Cette remarque est due à Cauchy ; nous ajouterons qu'on peut éliminer les fonctions arbitraires ; en éliminant les fonctions $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ on trouve :

$$pY + qX = R \quad \text{si} \quad R = r\frac{q}{p} - 2s + t\frac{p}{q}.$$

Y et X sont des fonctions arbitraires de y et de x que l'on élimine en calculant

$$\frac{dR}{dx} \quad \frac{dR}{dy} \quad \frac{d^2R}{dx\,dy}; \text{ on trouve } \frac{X'}{X} = S \quad \frac{Y'}{Y} = T,$$

d'où les deux équations :

$$\frac{dS}{dy} = 0, \frac{dT}{dx} = 0.$$

Ces deux équations sont du cinquième ordre ; la méthode des coupes linéaires s'applique donc aux fonctions qui satisfont à deux équations, aux dérivées partielles du cinquième ordre.

179. Tables employées dans la rédaction des projets de route. — Lorsque le gabarit d'une route est donné, les surfaces de déblai et de remblai d'un demi-profil sont des fonctions de deux variables, savoir la hauteur h de déblai ou de remblai sur l'axe de la route et l'inclinaison i du terrain naturel supposé rectiligne ou brisé sur l'axe. On a donc $S = f(i, h)$; M. Lalanne a d'abord (1840) construit des tables graphiques en portant l'inclinaison i en abscisse, la hauteur h en ordonnée et en traçant des lignes d'égale superficie ; neuf systèmes de formules sont applicables ; le tableau comprend (fig. 85) 9 régions limitées par des lignes droites : 1 et 5 régions du déblai, 4 et 9 régions du remblai, 2, 3, 8, 7 régions

des profils contenant un point de passage, 6 régions des profils contenant deux points de passage. Pour qu'une pareille table soit complète, il faut tracer une série de courbes dans les régions 1 et 2, une nouvelle série dans les régions 4 et 9, deux séries de courbes dans les régions 2, 3, 8, 7, trois séries de courbes dans la région 6. M. Lalanne a construit l'anamorphose de cette figure ; mais si une anamorphose transforme une série de courbes en lignes droites, les autres lignes restent curvilignes ; on peut se borner à obtenir des droites dans les régions les plus vastes, les courbes subsistant dans les autres régions.

En 1845, l'ingénieur Davaine publia dans les mémoires de la Société des sciences de Lille un tracé graphique donnant sur le même tableau les surfaces de déblai, de remblai, les largeurs d'emprises et les longueurs des talus ; l'auteur annonçait que ses tables pouvaient servir quelles que soient la largeur de la voie et l'inclinaison des talus. M. Lalanne montra que ces tables n'avaient pas la généralité qui avait été annoncée ; il perfectionna ces tables en transformant, par l'anamorphose, les hyperboles qu'elles comportaient en droites parallèles.

180. Inconvénients des tables de M. Lalanne. — Les tables de M. Lalanne ont un inconvénient grave, c'est d'exiger beaucoup de temps pour les construire. Nous lisons ce qui suit dans un des derniers écrits de ce savant ingénieur (1) :

« M. l'ingénieur en chef Ricour ayant un gabarit à une seule voie, différent, par conséquent, de ceux qui avaient été l'objet de publications antérieures, a établi sur quatre planches de $0^m,70$ sur $0^m,30$, autant de tables qui font connaître les superficies de déblai et de remblai, les largeurs d'emprises et les longueurs des talus pour des cotes sur l'axe allant jusqu'à 20 mètres et pour des déclivités du profil trans-

(1) Exposition universelle à Paris en 1878 (France). Notices sur les modèles, cartes et dessins relatifs aux travaux des ponts et chaussées, p. 446.

versal jusqu'à 0,40.... L'établissement de chacun des tableaux a exigé quatorze heures de calcul et vingt heures de dessin. »

Ainsi les quatre tables de ce système exigent 56 heures de calcul et 112 heures de dessin, soit en tout 168 heures de travail. Si, pour des raisons quelconques, le gabarit subit une modification, il faut recommencer ce travail. Aussi M. Lalanne ajoute-t-il que si un gabarit ne s'appliquait qu'à un petit nombre de profils, il faudrait renoncer à l'exécution de ces tables; il propose alors de se servir des formules analytiques, mais en simplifiant les calculs par l'emploi de son compteur universel.

Lorsque l'on emploie nos méthodes d'intégration graphique, le calcul des cubes et des distances de transport sont remplacés par des opérations graphiques ; si donc on lit sur une table une superficie en mètres carrés, il faudra la représenter par une ligne droite ; il serait plus utile d'obtenir immédiatement cette droite sur la table graphique; on supprimera ainsi deux causes d'erreur, une erreur de lecture et une réduction à l'échelle de surfaces. Les hauteurs de déblai et de remblai sont indiquées sur le profil en long, pourquoi faut-il les calculer? il serait plus commode de pouvoir les porter en vraie grandeur sur le tableau.

Nous supposerons aussi, qu'au lieu de donner les inclinaisons du terrain en nombre, on ait tracé les profils en long du terrain à une certaine distance de l'axe de la voie; en choisissant, pour cette distance, la distance à l'axe des points nivelés transversalement, il n'y aura aucun calcul à faire pour dresser ces profils en long. Nous sommes ainsi amenés à poser le problème d'une autre manière: on parcourt le profil en long en portant sur une bande de papier les hauteurs de déblai et de remblai, et les déclivités du terrain naturel, construire une table sur laquelle on puisse prendre immédiatement, sur une autre bande de papier, les largeurs d'emprises, les longueurs des talus, les superficies de déblai ou de remblai. Avant d'exposer le moyen de construire une table de cette espèce, nous devons faire connaître quelques principes nouveaux sur la représentation des fonctions.

sentera la même fonction. Plus généralement, toute propriété basée sur l'intersection de certaines lignes de la figure A, existe encore pour les transformées de la figure B. Ainsi, par exemple, si nous traçons dans la figure A la perspective d'un angle trièdre coupé par deux plans, nous obtenons deux triangles dont les sommets se trouvent sur 3 droites convergentes et dont les côtés correspondants se coupent sur trois points en ligne droite. A toute droite de la figure A correspond une courbe de la fig. B, dépendant de deux paramètres et déterminée par deux points; la même propriété existe pour la figure curviligne; on obtient deux triangles curvilignes dont les 3 sommets se trouvent sur 3 courbes convergentes et dont les côtés correspondants se coupent sur une même courbe, toutes ces courbes étant de la famille des transformées des droites.

183. Élimination graphique. — Soient les trois équations :

$$f(u, vt) = 0, \quad f_1(utt') = 0, \quad f_2(tt'w) = 0.$$

Si on élimine t et t' entre ces trois équations, on reconnaît que w est fonction des variables u et v; on peut représenter cette fonction sans procéder à l'élimination analytique; c'est cette opération que nous appelons élimination graphique. Pour y arriver, il suffit de représenter sur le même tableau les trois relations données en prenant naturellement les mêmes systèmes de lignes pour les mêmes variables; en un point de la figure, on devra considérer 5 lignes, et l'on obtiendra 5 cotes $u\,v\,t\,t'\,w$ satisfaisant aux trois relations, donc u, v, w satisfont à la relation cherchée; l'élimination s'opère en supprimant les lignes des t et des t'. Ce principe de l'élimination graphique a été appliqué par M. Lalanne dans son compteur universel, mais il nous a paru utile de l'énoncer.

184. Cas où les variables sont des longueurs. — Supposons (fig. 86) que u soit la longueur d'une ligne droite; on pourrait trouver la ligne correspondante en mesurant cette droite, si les lignes des u sont convenablement graduées;

mais on peut aussi la trouver par le tracé d'une courbe que nous appellerons l'axe des u. D'un point o de la ligne $u = 0$, avec des rayons $u = 1$, $u = 2$, etc., traçons des circonférences coupant les lignes $u = 1$, $u = 2$, etc.; l'axe des u est le lieu de ces intersections; ayant tracé cet axe oU, on obtiendra la ligne $u = l$, en portant l en OA, la ligne demandée est celle qui passe par A. Si la ligne $u = 0$ se transportait à l'infini, on pourrait prendre un point o quelconque; quelquefois il est plus utile de porter $oA = u +$ constante. On peut aussi tracer une échelle des u en OU' et infléchir les lignes des u à l'extérieur de la partie utile du tableau vers les points correspondants de cette échelle: on peut aussi mener, par les points de division de cette échelle, des parallèles coupant les lignes des u suivant une courbe de rebroussement comme l'indique la figure; il convient que cette courbe reste en dehors de la partie utile du tableau; on peut recourir à plusieurs échelles OU' et O''U'', si la première sort des cadres de l'épure.

185. Représentation d'une fonction de trois variables. — Soit la fonction

$$w = f(t, u, v).$$

En portant sur trois axes rectangulaires $x = t$, $y = u$ et $z = v$, on obtient pour chaque valeur de x une surface d'égale cote; si ces surfaces sont des plans, on peut les représenter par la géométrie descriptive au moyen de leurs traces; on peut de cette manière représenter les racines d'une équation à trois coefficients variables:

$$w^4 + x w^3 + y w + z = 0.$$

Prenons (fig. 83) deux axes rectangulaires ox et oy dans le plan de la figure que nous considérerons comme plan horizontal; les traces des plans d'égale cote s'obtiennent en faisant $z = 0$, on trouve:

$$w^3 + x w + y = 0.$$

On obtient précisément l'abaque des racines de l'équation du 3e degré construite par M. Lalanne, seulement les lignes

tracées doivent être considérées comme les traces des plans d'égale cote. Il est inutile de représenter plus complètement ces plans. Soit à chercher les racines de l'équation du quatrième degré pour $x = 0{,}6$, $y = 0{,}4$, $z = 0{,}3$; on trouve immédiatement la projection horizontale m du point de l'espace; pour déterminer plus complètement ce point, imaginons un plan de profil EF que nous transportons en E'F' et que nous rabattons sur le plan de la figure, en portant $M'M = z = -0{,}3$, on obtient le rabattement; le plan de profil EF coupe les plans d'égale cote, suivant des lignes d'égale cote, dont on obtient immédiatement les traces; il est facile de voir que l'on obtiendra ces lignes en rabattement, en les menant perpendiculairement aux traces des plans correspondants.

En effet, la trace d'un plan d'égale cote a pour équation $w^5 + xw + y = 0$; elle fait avec ox un angle dont la tangente est w; la ligne d'égale cote dont il s'agit a pour équation $w^4 + 0{,}6\,w^3 + yw + z = 0$, elle fait avec l'axe oz un angle dont la tangente est $-\frac{1}{w}$; mais l'axe oz en rabattement est dirigé en sens contraire de ox, donc la ligne d'égale cote fait avec ox un angle dont la tangente est $\frac{1}{w}$; le produit des tangentes étant égale à -1, la propriété est démontrée. Si on trace les lignes d'égale cote, on obtient facilement les racines réelles. On voit que pour chaque racine, il faut une épure particulière, mais on peut éviter cette construction; on prend $mm' = -0{,}3$; on fait mouvoir une équerre dont le sommet décrive EF et dont l'un des côtés soit constamment dirigé suivant les traces des plans d'égale cote; on s'arrête quand l'autre bord de l'équerre passe par le point N, on obtient la racine en lisant la côte de la ligne effleurée par le premier bord de l'équerre.

186. Emploi de feuilles mobiles. — Si nous traçons : sur un plan les lignes $f_3(xyw) = 0$, sur une feuille transparente les lignes $f_1(xyw) = 0$, et sur une autre feuille transparente les lignes $f_2(xyu)$, la position de chacune des

feuilles transparentes mobiles sur le tableau des lignes des w dépend de 3 variables; on peut de cette manière représenter certaines fonctions de 8 variables.

187. Emploi de plusieurs tableaux. — Soient les équations :

$$f_1(x, y, t) = 0,\ f_2(tzt') = 0,\ f_3(t'ut'') = 0,\ f_4(t''vw) = 0$$

Si on donne x, y, z, u, v, on peut successivement calculer t, t, t'' et w; donc la variable w est fonction de 5 variables indépendantes. Comme chacune des quatre relations qui la définissent est susceptible d'être représentée graphiquement, on pourra, au moyen de quatre tableaux calculer la fonction w. Si on construit quatre tableaux séparés, on est obligé de lire successivement les cotes t, t', t''; on peut éviter ces trois lectures de deux manières. On peut d'abord représenter les quatre relations sur une même épure en prenant des courbes des t, t', t'' qui conviennent aux deux tableaux où ces variables interviennent; ce procédé conduit le plus souvent à une épure confuse et difficile à construire. Presque toujours, il sera plus avantageux de représenter chaque relation par une épure spéciale; le tableau des xyt et celui des tzt' étant placés l'un à côté de l'autre, on prolonge les deux courbes des t relatives à une même cote jusqu'à leur rencontre; on trace le lieu des points de rencontre; on peut alors considérer les deux courbes comme une seule courbe présentant un point angulaire; on passera du premier tableau au second sans lire la variable t. On passera de même du deuxième tableau au troisième et du troisième au quatrième sans lire les variables t' et t''. Le procédé que nous venons d'exposer peut être généralisé comme il suit : Si une équation entre un nombre quelconque de variables est susceptible d'être considérée comme le résultat de l'élimination de certaines variables auxiliaires entre plusieurs équations à trois variables, il est possible de remplacer la relation par un certain nombre de tableaux graphiques.

188. Applications et marche à suivre. — Dans tout problème, il y a des données et des inconnues ; en représentant les données par des lettres, on établira des formules qui donneront la solution de tous les problèmes de même espèce ; les inconnues sont donc des fonctions de certaines variables. Ainsi, par exemple, l'épaisseur à la base d'un mur de soutènement est une fonction de 6 variables : la hauteur, les fruits des deux parements, les poids spécifiques des terres et des maçonneries, le talus naturel des terres ; de même les dimensions des parties d'un pont d'un type donné, les dimensions des pièces d'une machine d'un système connu, etc., sont des fonctions de certaines données. Dans toutes ces questions il sera presque toujours possible de dresser, par les méthodes précédentes, des tables graphiques donnant immédiatement et sans calcul les inconnues du problème. Si le problème ne comporte que trois variables, une inconnue et deux connues, il n'y a aucune difficulté ; s'il comporte plus de deux variables indépendantes, il faut, s'il est possible, ramener la formule à un certain nombre d'équations à trois variables et chacune de ces dernières donnera lieu à une table graphique. Dans cette recherche, il est difficile d'énoncer des règles absolues, mais les observations suivantes conduiront souvent au résultat : 1° Lorsque l'équation finale contient un grand nombre de variables, elle provient généralement d'équations plus simples ; en remontant à la source de l'équation finale, en introduisant au besoin des variables auxiliaires, on constituera souvent les équations à trois variables que l'on cherche ; 2° dans une équation homogène par rapport à deux ou plusieurs des variables, on en diminue le nombre d'une unité en introduisant leurs rapports à l'une d'entre elles ; 3° si une équation résiste à ces procédés, on prend un cas particulier où le nombre de variables est trois ; de là on remonte au cas général en passant au besoin par des cas intermédiaires. Il ne nous serait pas possible d'aborder les innombrables questions auxquelles ces tables graphiques s'appliquent ; les observations qui précèdent et les exemples que nous traite-

rons suffisent pour tracer la voie à suivre; le nombre de variables ne doit pas rebuter le lecteur; ainsi la question des murs de soutènement comprend sept variables et cependant nous sommes parvenus à la solution.

Lorsque le problème est ramené à des relations à trois variables, chacune d'elles donne lieu à une table graphique; mais cette table graphique peut être établie d'une infinité de manières; il faut autant que possible que les lignes d'égale cote soient des droites ou des courbes faciles à construire; nous allons donner quelques principes sur l'emploi des systèmes de droites.

189. Degré d'un système de droites. — Si u est une des variables, on peut adopter, comme ligne des u, les droites ayant pour équation :

$$ax + by + c = 0,$$

x, y étant les cordonnées cartésiennes, a, b, c, trois fonctions de u.

Si ces trois fonctions sont des fonctions entières de degré n, nous dirons que le système est de degré n. Les lignes des u enveloppent une courbe de classe n, car à tout point x,y du plan correspond n racines de u, c'est-à-dire que par tout point on peut mener n tangentes à l'enveloppe. Une droite quelconque est coupée par les lignes des u suivant une échelle à divisions inégales si l'échelle des u est à divisions égales; en prenant sur cette droite une origine quelconque, la distance u' d'un point de cette échelle à l'origine est liée à la variable u par une relation de la forme :

$$u' = \frac{Mu^n + Nu^{n-1} \ldots + T}{M'u^n + N'u^{n-1} + T'}.$$

Cette formule s'obtient aisément par l'analyse en mettant les équations de la droite sous la forme $x = x_0 + ku'$, $y = y_0 + mu'$ et portant ces valeurs de x, y dans l'équation de la ligne des u; mais on y arrive aussi en remarquant que l'équation entre u et u' est algébrique, que si u est donné, on a une seule valeur de u', que si u' est donné, il y a n valeurs de u. Supposons que la sécante considérée soit la droite $u = u_0$

du système; la valeur de u' doit devenir indéterminée pour $u = u_0$, en divisant les deux termes de la fraction qui donne u' par $u - u_0$, on abaissera le degré de la variable d'une unité. Pour une tangente multiple, le degré diminuerait davantage.

190. Système du premier degré. — Lorsque la variable u est au premier degré, l'équation de la ligne des u est de la forme :

$$a'x + b'y + c' = u\,(ax + by + c) \quad \text{ou} \quad \beta = u\alpha.$$

Prenons (fig. 89) les droites $\alpha = 0, \beta = 0$ comme nouveaux axes coordonnés Cy', Cx'; on sait que les nouvelles coordonnées sont β et α multipliés par des constantes; on obtient une équation de la forme :

$$\lambda y' = ux'.$$

Ces droites passent par la nouvelle origine et pour les déterminer plus complètement faisons $x' = \lambda$, on a $y' = u$. Soit O U la droite $x' = \lambda$; en portant u sur cette droite, on obtiendra un point de la ligne u. Si sur O U on construit une échelle des u, le faisceau des droites joignant le point C aux divisions de cette échelle sont les droites des u. La droite O U est ce que nous avons appelé (184) l'axe des u.

191. Construction d'un système du premier degré. — On trace les droites Cy' ou $\alpha = 0$, Cx' ou $\beta = 0$; ce sont les lignes $u = \infty$, $u = 0$; au lieu de déterminer λ par l'analyse, on peut tracer une troisième droite CA relative à $u = u_0$; cela étant, l'axe O U est une parallèle à Cy' telle que $oM = u_0$; on trouve le point M de l'axe O U en portant $CN = u_0$, et en menant NM parallèlement à Cx'. L'axe des u étant déterminé, on opère comme précédemment.

192. Problème. — Construire le système connaissant trois lignes des u. Soient CA, CB, CD les droites u_0, u_1, u_2. Nous déterminerons la position de l'axe O U par la condition $MN = u_1 - u_0$, $PN = u_2 - u_1$; une parallèle $o'P'$ à l'axe des u satisfait à la condition :

$$\frac{M'N'}{N'P'} \quad \text{ou} \quad \frac{CQ}{QP'} = \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_1}.$$

On obtiendra cette parallèle en portant deux longueurs CQ, QP' dans le rapport $\frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_1}$, en menant QN' parallèlement à CD, et en joignant P'N'. Portons $M'K = u_1 - u_0$, et menons KN parallèlement CA, on obtient le point N de l'axe des u qui est complètement déterminé. On obtient l'origine O en portant $oM = u_0$; le système est facile à construire.

193. Théorème. — Une droite quelconque est coupée par un système du premier degré suivant une échelle homographique de l'échelle des u.

Si dans l'expression générale de u' (189) on fait $n = 1$, on a :

$$u' = \frac{Mu + N}{M'u + N'} \quad \text{ou bien} \quad Auu' + Bu + Cu' + D = 0.$$

L'échelle des u' est dite alors homographique de l'échelle des u.

Si on donne la droite $x' = x'_0 + k\,u'$, $y' = y'_0 + m\,u'$, on obtient la relation :

$$\lambda\,(y'_0 + m\,u') = u\,(x'_0 + k\,u').$$

Si on donne les paramètres A, B, C, D de la relation entre u et u', on déterminera la sécante par les équations :

$$\frac{k}{A} = \frac{x'_0}{B} = \frac{-\lambda m}{C} = \frac{-\lambda y'_0}{D}.$$

Le coefficient angulaire de la droite $\frac{m}{k}$ est $\frac{-C}{A\lambda}$; on en déduit m, k, puis x'_0 et y'_0.

Si, au lieu de donner les paramètres A, B, C, D, on donnait trois valeurs de u' relatives à trois valeurs de u, on serait conduit au même problème de géométrie que dans le numéro précédent.

194. Systèmes particuliers du premier degré. — Il peut se faire que les droites $\alpha = 0$, $\beta = 0$ soient parallèles; le centre de convergence des droites se transporte à l'infini; les lignes des u sont parallèles. Si on prend un axe des x

parallèle à ces droites et un axe des y quelconque, on a : $\beta = b'y + c'\alpha = by + c$; les lignes des u ont pour équations :

$$by + c = (b'y + c')u \text{ d'où } y = \frac{c - c'u}{b'u - b}.$$

L'axe des y, et par conséquent toute autre droite, est coupée suivant une échelle homographique de celle des u; toutes ces échelles sont proportionnelles ; il n'y a plus d'axe des u. On construira dans ce cas les valeurs de y en se servant d'un système convergent auxiliaire. Toutefois si $b' = 0$, on a $y = \frac{-c + c'u}{b}$, toute droite est un axe.

195. Fonction représentée par trois systèmes du premier degré. — Soient u, v, w les variables; par un changement d'axes coordonnés, on peut mettre l'équation des lignes des w sous la forme :

$$y - \frac{w}{\lambda}x = 0.$$

Soient

$$ay + bx = c$$
$$a'y + b'x = c'$$

les équations des lignes des u et des lignes des v. L'élimination de x et de y conduit à la relation :

$$\frac{w}{\lambda} = \frac{b'c - bc'}{ac' - a'c} \qquad (1)$$

Cette équation est de la forme :

$$w = \frac{A + Bu + Cv + Duv}{A' + B'u + C'v + D'uv} \qquad (2)$$

En chassant le dénominateur, on obtient la forme générale d'une équation du troisième degré contenant u, v, w au premier degré.

On peut poser le problème inverse : connaissant l'équation (2), construire un tableau graphique des valeurs de w au moyen de trois systèmes du premier degré. L'idée la plus naturelle est d'identifier l'équation (1) à l'équation (2); l'équation (1) contenant plus de paramètres que l'équation (2), il y a

indétermination ; les calculs montrent que le problème n'est possible que dans certains cas; mais ces calculs sont si laborieux que nous préférons arriver d'une autre manière aux résultats.

Remarquons que la valeur de w tirée de l'équation (1) devient indéterminée pour $c = 0$, $c' = 0$; il doit en être de la valeur de w tirée de l'équation (2). Donc posons :

$$A + B u + C v + D u v = 0,$$
$$A' + B' u + C' v + D' u v = 0.$$

Ces équations conduisent à une équation du second degré en u et une autre en v ; si les racines sont imaginaires, il y a impossibilité de résoudre la question ; considérons le cas où les racines sont réelles. Soient u_0, v_0 un système de valeurs; on prendra $c = u - u_0$ $c' = v - v_0$. Mais il est préférable de transformer l'équation (2) en posant $u - u_0 = u'$, $v - v_0 = v'$, alors on prendra $c = u'$, $c' = v'$; les équations (1) et (2) qu'il s'agit d'identifier deviennent :

$$\frac{w}{\lambda} = \frac{b' u' - b v'}{a v' - a' u'} \qquad (1)$$

$$w = \frac{B u' + C v' + D u' v'}{B' u' + C' v' + D' u' v'} \qquad (2)$$

L'équation (2) peut être identifiée à l'équation (1) d'une infinité de manières en la mettant sous la forme :

$$\frac{w}{\lambda} = \frac{(B + E v')\, u' + v' [C + (D - E) u']}{(B' + E' v')\, u' + v' [C' + (D' - E') u']}$$

E et E' étant des quantités quelconques ; on prendra :

$$\frac{a}{\lambda} = C' + (D' - E')\, u' \qquad -\frac{a}{\lambda} = B' + E' v'.$$

$$-b = C + (D - E)\, u' \qquad b' = B + E v'.$$

Si l'on choisit $E = 0$, $E' = 0$, $\lambda = 1$, des simplifications se produisent ; les trois systèmes sont alors :

$$y - w x,$$
$$C' y - C x + u' (D' y - D x - 1) = 0,$$
$$B' y + B x + v' = 0.$$

196. Même problème traité au moyen des coordonnées trilinéaires. — Soient (fig. 93) A, B, C les centres de convergence des lignes des u, des v et des w; soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ les équations des droites BC, CA, AB; α, β, γ étant des fonctions du 1er degré de la forme $p - x\sin\omega - y\cos\omega$; pour un point quelconque du plan, α, β, γ sont les trois coordonnées trilinéaires de ce point; le triangle A B C est le triangle de référence. On a alors :

ligne des u,	$b\beta = c\gamma$	(1)
ligne des v,	$c'\gamma = a'\alpha$	(2)
ligne des w,	$a''\alpha = b''\beta$	(3)

En éliminant $\alpha\beta\gamma$ on obtient :

$$a''c'b = a'b''c. \qquad (4)$$

Si les fonctions a'', c', b, a', b'', c restent les mêmes, et si on déforme le triangle de référence de toutes les manières possibles, l'équation (4) ne change pas; donc, pour représenter une fonction donnée, on peut prendre arbitrairement les trois points A, B, C. Soit à construire un tableau graphique représentant la relation

$$D + Au + Bv + Cw + A'vw + B'wu + C'uv + Euvw = 0. \quad (5)$$

Cette équation contient 7 paramètres; l'équation (4) en contient 9 (trois pour chaque ligne); donc on peut identifier l'équation (4) à l'équation (5) tout en se donnant arbitrairement deux conditions; on peut, par exemple, se donner le point M qui correspond à un système de valeurs u, v, w. Au lieu d'identifier l'équation (4) à l'équation (5), ce qui conduit à des calculs laborieux, nous allons faire voir que l'on peut déterminer *a priori* par l'équation (5) les valeurs de u, v, w relatives aux trois côtés du triangle de référence; on aura alors deux lignes de chaque système; le point M étant choisi, on aura une nouvelle ligne de chaque système qui sera complètement déterminé par trois lignes (192).

Supposons le problème résolu; pour les valeurs u' et v'' relatives au côté A B, w est indéterminé sur le tableau graphique; il en est de même des valeurs u'' et v' relatives aux

côtés AC et BC; on trouverait de même que deux groupes de valeurs rendent u et v indéterminés. Ces valeurs peuvent se déterminer par l'équation (5); ainsi les valeurs qui rendent w indéterminé doivent satisfaire aux équations suivantes :

$$D + Au + Bv + C'uv = 0 \qquad (6)$$
$$C + A'v + B'u + Euv = 0. \qquad (7)$$

En éliminant v, on obtient l'équation :

$$u^2(AE - B'C') + u(AA' + DE - BB' - CC') + A'D - BC = 0. \quad (8)$$

Si l'on cherchait les valeurs qui rendent v indéterminé, on trouverait les mêmes valeurs de u; en effet, il faut alors changer B, B' en C, C' et vice-versa; l'équation reste la même. On trouverait deux équations semblables à l'équation (8), en v et w, en cherchant les valeurs qui rendent les autres variables indéterminées; ces trois équations du second degré déterminent les valeurs $u'u''$, $v'v''$, $w'w''$. Mais il faut savoir grouper ces racines; on y arrive par la méthode suivante, qui a l'avantage de n'exiger que la résolution d'une seule équation du second degré. Si on résout l'équation (8), on trouve u', u''; on attribuera u' au côté AB, u'' au côté AC; l'équation (6) permet de calculer les valeurs correspondantes de v; la valeur v'' qui correspond à u' sera attribuée au côté AB; la valeur v' qui correspond à u'' sera attribuée au côté BC. Pour obtenir les valeurs w', w'', exprimons que v est indéterminé; on trouve deux équations dont l'une est :

$$D + Au + Cw + B'uw = 0. \qquad (9)$$

La valeur w' qui correspond à u'' sera attribuée au côté CA; la valeur w'' qui correspond à u' sera attribuée au côté BC. Les valeurs u, v, w, ainsi calculées, doivent satisfaire encore à trois autres équations analogues aux équations (6) (7) et (9); mais il est inutile de vérifier si ces équations sont satisfaites; nous savons déjà que les six équations analogues à (6) se ramènent à trois équations analogues à (8).

Déterminons un système de valeur satisfaisant à l'équation (5), par exemple $u = 0$, $v = o$, $w = -\frac{D}{c}$; prenons un

point M quelconque pour représenter ces trois valeurs; le système u est déterminé par les droites AM, AC, AB relatives à $u = 0$, $u = u'$, $u = u''$; les autres systèmes sont aussi déterminés par trois droites; le problème est résolu. Au lieu de se donner le point même M, on pourrait se donner les axes des u et des v, déterminer les origines de ces axes d'après les valeurs connues de u et de v; on retrouve le point M, $u = 0$, $v = 0$; on attribue à la droite CM la valeur $w = -\frac{D}{c}$ et le système w est déterminé par trois droites.

Nous remarquerons que les valeurs u'' et u' de l'équation (8) auraient pu être attribuées aux droites AB et AC; on a alors la disposition de la figure 93 bis. Nous remarquerons aussi que l'on peut déformer le triangle A, B, C comme on veut; on peut supposer que le point A s'éloigne à l'infini; les lignes des u forment un système parallèle et l'on peut choisir le point M de telle manière que toute droite soit un axe des u.

197. Systèmes du second degré. — L'équation d'une ligne des u est de la forme :

$$l\alpha u^2 + m\beta u + n\gamma = 0 \qquad (1)$$

l, m, n sont des paramètres constants, α, β, γ sont des fonctions du premier degré des coordonnées cartésiennes rectangulaires du point, fonctions que nous supposerons de la forme $p - x\cos\omega - y\sin\omega$; soient BC, CA, AB les droites $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ (fig. 95, pl. 3).

On peut aussi considérer α, β, γ comme les coordonnées trilinéaires du point en prenant comme triangle de référence le triangle ABC. L'équation (1) de la ligne des u est donc écrite en coordonnées trilinéaires ou cartésiennes selon que l'on conserve α, β, γ ou que l'on remplace α, β, γ par leurs valeurs. On remarquera que l'équation de la ligne u contient neuf paramètres arbitraires; il faut donc neuf conditions pour déterminer un système du second degré.

Les lignes des u enveloppent une courbe de seconde classe, donc du second degré; en donnant l'enveloppe, cela équi-

vaut à cinq conditions; on pourra encore se donner trois conditions; on pourra par exemple se donner les valeurs de u relatives à trois tangentes.

198. Enveloppes des lignes des u. — L'enveloppe des lignes des u est une courbe du second degré tangente en A et C aux droites AB et CB (fig. 95); les points de l'enveloppe s'obtiennent par les intersections des droites de deux systèmes du premier degré convergent en C et A. En effet, en appliquant la théorie des enveloppes à l'équation (1), c'est-à-dire en prenant la dérivée de l'équation de l'enveloppée par rapport au paramètre variable, on trouve que le point de l'enveloppe touché par la ligne u est donné par les deux équations : $l\alpha u^2 + m\beta u + n\gamma = 0$, $2l\alpha u + m\beta = 0$; en portant $l\alpha u$, tiré de la seconde équation dans le terme $l\alpha u^2$ de la première, on remplace ces équations par les deux suivantes :

$$m\beta u + 2n\gamma = 0 \qquad (2)$$

$$2l\alpha u + m\beta = 0 \qquad (3)$$

Ces deux équations représentent deux droites dont l'intersection est le point de l'enveloppe; la première représente un système du premier degré convergent en A, la seconde un système du premier degré convergent en C.

L'équation de l'enveloppe s'obtient en éliminant u des équations (2) et (3); on trouve :

$$m^2\beta^2 - 4ln\alpha\gamma = 0. \qquad (4)$$

Cette équation est du second degré; on aurait pu l'obtenir autrement en exprimant que les valeurs de u de l'équation (1) sont égales.

De l'équation de la ligne des u, on déduit que la droite $u = 0$ est $\gamma = 0$ ou AB, que la droite $u = \infty$ est $\alpha = 0$ ou BC; les équations du point de contact donnent : pour $u = 0$, $\gamma = 0$, $\beta = 0$ ou le point A; pour $u = \infty$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ ou le point C.

199. Théorème. — Toute droite $u = u_0$ du système est coupée par les autres suivant une échelle homographique de l'échelle des u dont les points se trouvent sur le système

auxiliaire du premier degré $lU\alpha + m\beta = 0$ où $U = u + u_0$; la ligne des u parallèle à $u = \infty$ est coupée suivant une échelle proportionnelle à celle des u et peut servir d'axe des u.

L'intersection des lignes u et u_0 satisfait aux deux équations :

$$lu^2\alpha + mu\beta + n\gamma = 0$$
$$lu^2{}_0\alpha + mu_0\beta + n\gamma = 0.$$

Elle satisfait aussi à l'équation que l'on obtient en soustrayant ces deux équations; on trouve en supprimant le facteur commun $u - u_0$;

$$l(u + u_0)\alpha + m\beta = 0.$$

Ce sont les droites d'un système du premier degré convergent en C; faisons $U = u + u_0$, nous obtenons

$$lU\alpha + m\beta = 0. \qquad (5)$$

Si on construit ce système du premier degré, on pourra obtenir l'intersection de la droite u_0 avec toutes les autres en faisant $U = u + u_0$, ce qui revient à déplacer l'origine des U d'une quantité u_0 pour avoir celle des u. Le système (5) est facile à construire; l'axe OU est parallèle à CB; on peut le prendre à volonté, si on laisse l'échelle des U indéterminée, si DE est la droite u_0, OI doit représenter $U = u + u_0 = u_0$; cela détermine l'échelle des U. La propriété remarquable du système (5) est de donner les intersections de deux lignes u et u_0; on peut la mettre en évidence en construisant les lignes des u pour des valeurs de u en progression arithmétique : $u = 0, \pm h \pm 2h$, etc...; ces lignes décomposeront la partie du plan extérieur à l'enveloppe en quadrilatères; les sommets de ces quadrilatères se disposeront alors sur les droites du système (5); ainsi sur la droite $U = 10h$ se couperont : $u = 10h$ et $u = 0$, $u = 9h$ et $u = h$, etc.; les lignes des U sont les diagonales des quadrilatères formés par les lignes des u.

Puisque la division d'une ligne u_0 s'obtient au moyen du système (5) qui est du premier degré, cette division formera une échelle homographique de l'échelle des u; mais le sys-

tème (5) a un axe, les droites parallèles à cet axe sont coupées proportionnellement à l'échelle des u; donc la ligne des u parallèle à cet axe, c'est-à-dire la ligne des u parallèle à la ligne $u = \infty$, est coupée par les autres suivant une échelle proportionnelle à celle des u et qui peut servir d'axe des u, en choisissant convenablement l'échelle des u; c'est ce que nous avons supposé sur la figure 95.

200. Détermination analytique d'un système du second degré. — Nous avons déjà dit qu'il faut 9 conditions pour déterminer un système du second degré; que la détermination de la conique enveloppe exige 5 conditions; on peut se poser un grand nombre de problèmes sur cette détermination; nous donnerons un seul exemple.

On donne les trois tangentes CB, AB, DE, les points de contact C et A des deux premières, les valeurs $u = \infty$, $u = 0$, $u = u_0$ relatives à ces trois tangentes; trouver le système.

Dans l'équation de la ligne des u, on connaît α, β, γ par les droites CB, CA, AB; on déterminera les paramètres l, m, n en établissant que la ligne DE est la ligne u_0; supposons que l'équation de la ligne DE soit mise sous la forme :

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0.$$

Cette équation doit être identique à l'équation de la ligne u_0 :

$$lu_0^2\alpha + mu_0\beta + n\gamma = 0.$$

On a donc $\frac{lu_0^2}{A} = \frac{mu_0}{B} = \frac{n}{C}$; on prendra $l = \frac{A}{u_0^2}$; $m = \frac{B}{u_0}$, $n = C$; l'équation d'une ligne quelconque devient

$$A\left(\frac{u}{u_0}\right)^2\alpha + B\frac{u}{u_0}\beta + C\gamma = 0.$$

On remarquera que les 5 premières conditions déterminent la conique; il en résulte qu'une conique quelconque peut être considérée comme l'enveloppe d'une infinité de systèmes du second degré; pour achever la détermination du système, on se donne la tangente $u = \infty$, cela revient à donner l'axe FI; on se donne la ligne $u = 0$, cela revient à donner l'origine

des u; on se donne la ligne $u = u_0$, cela revient à donner l'échelle des u. Si sur une tangente à une conique, on établit une échelle des u à partir d'une origine quelconque; si par les points de cette échelle on mène des tangentes à la conique, on obtient un système du second degré. Si sur une autre tangente, on établissait une échelle des v, on aurait un autre système du second degré; une tangente est alors à la fois une ligne des u et une ligne des v; quelle est la relation entre les valeurs u et v relatives à une même tangente? L'axe des v étant coupé par les lignes u suivant une échelle homographique de l'échelle des u, on a

$$Auv + Bu + Cv + D = 0.$$

On déterminerait les paramètres si on connaissait trois valeurs de v relatives à trois valeurs de u.

201. Détermination géométrique d'un système du second degré. — Pour construire le système, on donne à u des valeurs successives telles que $u = 0, 0{,}1, 0{,}2, 0{,}3$, etc.; on déterminera les lignes des u en traçant les divisions qu'elles déterminent sur deux droites quelconques du système, au moyen du système auxiliaire (5). Le système (5) ne permet pas de trouver la division de la droite BC par les autres droites; mais on l'obtient directement en faisant $\alpha = 0$ dans l'équation (1); on trouve

$$mu\beta + n\gamma = 0, \qquad (6)$$

Si l'on cherche la division de la droite BA, on fera $u_0 = o$, $U = u + u_0 = u$; le système (5) devient :

$$lu\alpha + m\beta = 0. \qquad (7)$$

Soit DE la ligne u; les rayons CE, DE ont pour équation les équations (7) et (6); les rayons CM et AM ont pour équation les équations (2) et (3); or, ces dernières se déduisent des équations (6) et (7) en faisant dans la première $u = \frac{u}{2}$, et dans la seconde $u = 2u$; on voit, qu'à part un changement dans la graduation, les systèmes qui déterminent les points de l'enveloppe, déterminent les points O et E des enveloppées. De là résultent des propriétés géométriques faciles à énoncer.

Problème I. — Construire une conique connaissant 3 tangentes CB, AB, DE et les points de contact des deux premières ; construire un système du second degré enveloppant cette conique, en attribuant aux tangentes CB, DE, BA les valeurs $u = \infty$, $u = u_0$, $u = 0$.

Les systèmes du premier degré qui déterminent les divisions des droites CB, DE, BA par les autres lignes des u sont déterminées par 3 droites ; de là trois méthodes. On peut aussi déterminer l'axe OU qui satisfait à la condition $OI = o H$; on est ramené à un problème de géométrie élémentaire facile à résoudre : la solution est indiquée en pointillé sur la figure.

Problème II. — Construire une conique connaissant 5 tangentes ; si 3 tangentes sont graduées $u = a$, $u = b$, $u = c$, construire le système du second degré.

Les tangentes non graduées sont coupées par les trois autres suivant deux échelles homographiques des u déterminées par trois points.

202. Sur un nouveau système de coordonnées. — Puisque u détermine une droite, deux valeurs u et u' déterminent un point ; une équation $f(u, u')$ détermine une courbe ; l'équation $u = u'$ représente l'enveloppe. Les coordonnées u et u' sont unies aux coordonnées trilinéaires par les équations :

$$u + u' = -\frac{m\beta}{l\alpha} \qquad uu' = \frac{n\gamma}{l\alpha}.$$

L'équation d'une droite quelconque peut s'écrire :

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0.$$

ou bien

$$\frac{A}{l} - \frac{B}{m}(u + u') + \frac{C}{n}uu' = 0. \qquad (8)$$

Les coordonnées u et u' sont portées sur l'axe des u ; on obtient les lignes u et u' en menant des tangentes à la conique. On peut énoncer le théorème suivant : si sur une tangente à une conique on porte, à partir d'une origine, des distances u et u' satisfaisant à l'équation (8) (ou si l'on porte deux systèmes de points en involution) le lieu des intersec-

tions des tangentes menées à la conique par les points conjugués est une ligne droite.

On peut remarquer aussi que les équations $u+u'=U$, $uu'=U'$ représentent des droites des systèmes (6) et (7).

203. Systèmes particuliers du second degré. — On peut supposer que l'une des expressions α, β, γ soit constante.

1° α constant. La droite $\alpha = 0$ ou CB se transporte à l'infini; l'équation de l'enveloppe $m^2\beta^2 = 4\,l\,n\,\alpha\,\gamma$ indique que c'est une parabole dont la droite CB est un diamètre. Le système auxiliaire du premier degré $l\,U\,\alpha + m\,\beta = 0$ représente un système de droites parallèles dont toute sécante est un axe; en effet en prenant $\beta = 0$ comme axe des x, l'équation devient $y = -\frac{l\alpha}{m}U$. Il résulte de là que toute ligne des u est coupée par les autres suivant une échelle proportionnelle à celle des u et peut servir d'axe des u. On construit le système en traçant deux lignes des u et le système auxiliaire.

2° β constant. L'enveloppe $m^2\,\beta^2 - 4\,n\,l\,\alpha\,\gamma = 0$ est une hyperbole dont les droites $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, sont les asymptotes, ce que l'on pourrait prévoir *a priori*, puisque les points de contact A et C se transportent à l'infini. Le système auxiliaire $l\,U\alpha + m\,\beta = 0$ représente des droites parallèles à α; en prenant α comme axe des x, on a $y = -\frac{m\beta}{l\,U}$; l'axe des y et toute autre sécante est coupée suivant une échelle des $\frac{1}{U}$; il n'y a pas d'axe des U et, par conséquent, il n'y a pas d'axe des u.

3° γ constant. On retombe sur le premier cas en remplaçant u par $\frac{1}{u}$; donc toutes les lignes des u sont coupées suivant les échelles des valeurs de $\frac{1}{u}$; aucune n'est axe des u.

204. Fonctions représentées par trois systèmes du second degré. — Nous avons vu (181) qu'au moyen de trois systèmes de droites on peut représenter une relation de la forme :

$$(ab'c'') = 0.$$

Ces quantités $a, a', a' \ldots$ représentent ici des fonctions du second degré des variables u, v, w; cette relation est une équation du sixième degré contenant au premier degré u, v, w, u^2, v^2, w^2. Si l'un des systèmes était du premier degré, le degré de la variable correspondante descendrait aussi au premier degré. On peut se proposer le problème inverse : donner entre u, v, w une équation de cette forme et construire le tableau graphique qui la représente. La méthode générale qui consiste à identifier la relation donnée avec l'équation $(ab'c'') = 0$ conduit à des calculs laborieux; nous nous contenterons de traiter autrement les exemples suivants.

205. 1er Exemple. — Représenter la fonction :

$$w = \frac{a + bu + cv + duv}{a' + b'u + c'v + d'uv} \qquad (1)$$

Nous avons vu (195) que, dans certains cas, on peut représenter cette fonction par trois systèmes du premier degré; la solution suivante convient toujours.

Prenons deux axes rectangulaires et posons :

$$x = bu + cv + duv \qquad (2)$$

$$y = b'u + c'v + d'uv \qquad (3)$$

L'équation (1) devient :

$$w(y + a') = x + a \qquad (4)$$

La ligne des w forment un système du premier degré. Des équations (2) et (3) éliminons v, puis u; nous obtenons les lignes des u et les lignes des v :

$$\frac{x - bu}{c + du} = \frac{y - b'u}{c' + d'u} \qquad (5)$$

$$\frac{x - cv}{b \quad dv} = \frac{y - c'v}{b' + d'v}. \qquad (6)$$

La première représente un système du second degré en u, la seconde un système du second degré en v; la représentation de la fonction s'opère aisément.

Toutefois une anomalie se présente; si entre les équations (4) (5) et (6) on élimine x et y, on trouve une équation con-

tenant u et v au second degré ; donc on a introduit une solution étrangère, et cette solution contient u et v au premier degré ; elle est de la forme :

$$Auv + Bu + Cv + D = 0 \qquad (7)$$

Le tableau graphique, qui est la traduction géométrique des équations (4) (5) (6), devra donner cette solution étrangère ; c'est-à-dire que si u et v satisfont à l'équation (7), le tableau indiquera que w est indéterminé ; mais cela n'est possible que si les lignes u et v coïncident ; nous arrivons donc ainsi à cette propriété inattendue ; les lignes des u et des v enveloppent la même conique ; pour une même tangente les valeurs de u et de v satisfont à une équation de la forme (7). Rien n'est plus facile que de faire disparaître la solution étrangère du tableau ; si on donne les valeurs de u et v, et si elles satisfont précisément à la relation (8) le tableau donnera une seule ligne pour u et v ; il faut rejeter la valeur $w = \frac{0}{0}$; la vraie valeur de w est celle qui correspond au point de contact, on s'en aperçoit en prenant provisoirement des lignes des u et des v très voisines l'une de l'autre et en les faisant rapprocher indéfiniment.

Ces inductions peuvent être vérifiées par le calcul, et l'on peut déterminer la solution étrangère introduite. Si en effet des équations (5) et (6) on calcule x et y, on ne retrouve pas les valeurs (2) et (3) ; il y a un dénominateur ; ce dénominateur est la solution étrangère ; c'est :

$$(c' + d'u)(b + dv) - (b' + d'v)(c + du) = 0$$

ou $$(bc' - b'c) + u(bd' - b'd) + v(c'd - cd') = 0. \quad (7^{bis})$$

L'équation (5) des lignes des u peut se mettre sous la forme :

$$-u^2(bd' - b'd) + u[xd' - yd - (bc' - b'c)] + xc - yc = 0.$$

On se trouve dans le cas α constant (203) ; l'enveloppe est une parabole ; l'équation de cette enveloppe est :

$$[xd' - yd - (bc' - b'c)]^2 + 4(bd' - b'd)(xc' - yc) = 0$$

ou bien en faisant quelques calculs :

$$(xd' - yd)^2 + (bc' - b'c)^2 + 2(bc' + b'c)(xd' + yd) - 4b'c'xd - 4bcyd' = 0$$

Pour obtenir l'enveloppe des lignes des v, il faut changer b en c et réciproquement; on reconnaît que l'équation reste la même.

206. Deuxième exemple. — Représenter une équation contenant w au second degré, u et v au premier.

Soit l'équation : $$w^2 + w\frac{N}{M} + \frac{P}{M} = 0 \qquad (1)$$

M, N, P sont des fonctions du premier degré des quantités u, v, uv.

Posons : $$x = \frac{N}{M} \qquad (2)$$

$$y = \frac{P}{M} \qquad (3)$$

On a : $$w^2 + wx + y = 0 \qquad (4)$$

L'équation (4) montre que les lignes des w forment un système du second degré très facile à construire; on se trouve dans le cas α constant (203); les lignes enveloppent une parabole; le système auxiliaire est $w + x = 0$, l'axe des x est la droite $w = 0$, et peut servir d'axe des w; pour $w = 1$ on a : $1 + x + y = 0$; ces deux droites sont coupées par le système auxiliaire en des points qu'il suffit de joindre pour obtenir les lignes de w.

Des équations (2) et (3), nous déduirons les lignes des u et des v, en éliminant v ou u; pour éliminer v, écrivons les équations (2) et (3) plus explicitement :

$$x = \frac{a + bv}{a'' + b''v} \qquad y = \frac{a' + b'v}{a'' + b''v}.$$

On trouve :

$$x(a''b' - a'b'') + y(ab'' - a''b) + (a'b - ab') = 0 \qquad (5)$$

Ces lignes forment un système du second degré, car a, b, a', b', a'', b'' contiennent u au premier degré; on trouverait de même que les lignes de v forment aussi un système du second degré.

Il se présente ici la même anomalie que dans l'exemple précédent; si entre les équations des lignes des u, des v, des w, on élimine x et y, on obtient, au lieu de l'équation (1), une équation contenant u, v, w au second degré; donc on a introduit une solution étrangère de la forme :

$$Auv + Bu + Cv + D = 0 \qquad (7)$$

En raisonnant comme au numéro précédent, on démontrera que les lignes des u et des v enveloppent la même conique, mais que les valeurs de u et v relatives à une même tangente satisfont à l'équation (7). On obtiendra la relation (7) en remarquant que si de l'équation (5) et de l'équation correspondante en v, on tire x et y, on obtient un dénominateur du second degré; en le divisant par M on obtiendra la solution étrangère. En identifiant les équations des lignes des u et des lignes des v, on trouverait aussi la relation (7); enfin, en cherchant l'équation de l'enveloppe, on vérifierait qu'elle est la même pour les deux systèmes. Les calculs ne deviennent simples qu'en se servant des déterminants.

207. Même question par les déterminants. — En écrivant plus explicitement les valeurs de M, N, P, les équations (2) et (3) peuvent être remplacées par :

$$\begin{aligned} M &= a + bu + cv + duv \\ Mx &= a' + b'u + c'v + d'uv \\ My &= a'' + b''u + c''v + d''uv. \end{aligned}$$

En éliminant M et v, on trouve l'équation des lignes des u :

$$\begin{vmatrix} 1 & a + bu & c + du \\ x & a' + b'u & c' + d'u \\ y & a'' + b''u & c'' + d''u \end{vmatrix} = 0 \qquad (5^{bis})$$

En éliminant M et u, on trouve l'équation des lignes des v :

$$\begin{vmatrix} 1 & a + cv & b + dv \\ x & a' + c'v & b' + dv \\ y & a'' + c''v & b'' + d''v \end{vmatrix} = 0 \qquad (6^{bis})$$

On peut aussi mettre ces équations sous forme de déterminant de 5e éléments ; on peut écrire :

$$\begin{aligned} M &= x + bu + cv + duv \\ Mx &= a' + b'u + c'v + d'uv \\ My &= a'' + b''u + c''v + d''uv \\ 0 &= u - u + 0 + 0 \\ 0 &= 0 + 0 + uv - uv. \end{aligned}$$

En éliminant $M u, v, uv$ on obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c & d \\ x & a' & b' & c' & d' \\ y & a'' & b'' & c'' & d'' \\ 0 & u & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5^{ter})$$

On trouverait de même pour la ligne des v :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c & d \\ x & a' & b' & c' & d' \\ y & a'' & b'' & c'' & d'' \\ 0 & v & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6^{ter})$$

Pour chercher la solution étrangère, nous nous servirons des équations (5^{bis}) et (6^{bis}) ; ces équations sont des conséquences des équations (2) et (3) ; la solution étrangère est une solution qui satisfait aux équations (5^{bis}) et (6^{bis}) sans satisfaire aux équations (2) et (3). En multipliant la 3e colonne du déterminant 5^{bis} par v, en ajoutant alors la seconde colonne à la troisième ; en opérant de même sur l'équation (6^{bis}) on obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & a + bu & M \\ x & a' + b'u & N \\ y & a'' + b''u & P \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & a + cv & M \\ x & a' + c'v & N \\ y & a'' + c''v & P \end{vmatrix} = 0$$

ou bien :

$$\left.\begin{array}{l} A(a + bu) + A'(a' + b'u) + A''(a'' + b''u) = 0 \\ A(a + cv) + A'(a' + c'v) + A''(a'' + c''v) = 0 \\ \text{on a aussi :} \\ A \quad M \quad + A' \quad N \quad + A'' \quad P \quad = 0 \end{array}\right| \quad (8)$$

Ces équations sont satisfaites par $A = 0$, $A' = 0$, $A'' = 0$ et il est facile de voir que cela donne les équations (2) et (3); mais on peut aussi satisfaire à ces équations d'une autre manière si l'on a :

$$\frac{1}{uv}\begin{vmatrix} a+bu & a'+b'u & a''+b''u \\ a+cv & a'+c'v & a''+c''v \\ \mathrm{M} & \mathrm{N} & \mathrm{P} \end{vmatrix} = 0 \qquad (7^{bis})$$

Cette relation est la solution étrangère;

Nous avons divisé par uv pour faire disparaître les nouvelles solutions introduites dans le calcul; on peut aussi mettre l'équation (7^{bis}) sous la forme :

$$\begin{vmatrix} uv & a & a' & a'' \\ -v & b & b' & b'' \\ -u & c & c' & c'' \\ 1 & d & d' & d'' \end{vmatrix} = 0 \qquad (7^{ter})$$

Les transformations à faire pour arriver à cette nouvelle forme sont basées sur les propriétés des déterminants; mais on peut aussi y arriver en éliminant d'une autre manière A, A', A'' des équations (8); en introduisant une inconnue auxiliaire A''', ces équations s'écrivent :

$$\begin{aligned} Aa + A'a' + A''a'' + A'''uv &= 0 \\ Ab + A'b' + A''b'' - A'''v &= 0 \\ Ac + A'c' + A''c'' - A'''u &= 0 \\ Ad + A'd' + A''d'' + A''' &= 0 \end{aligned}$$

En éliminant A A' A'' A''' on obtient l'équation (7^{ter}).

Dans ces calculs nous avons supprimé et introduit des solutions $u = 0$, $v = 0$ parce que ce ne sont pas celles-là qui nous préoccupent.

§ 3. Construction et usage d'une nouvelle table donnant les surfaces de déblai, de remblai, les largeurs d'emprises et les longueurs des talus.

208. Réduction des neuf systèmes de formules à un système unique. — Considérons (fig. 90) l'un des cas les

plus compliqués; le gabarit est formé de quatre lignes : 1 ou ab, 2 ou bc, 3 ou cd, 4 ou de; la ligne du terrain naturel coupe les lignes 1, 2, 4 en B, C, E. On pourrait sans doute calculer les trois surfaces partielles ABa, BCb, CEdc, mais si on avait ces surfaces, il faudrait les porter bout à bout en ordonnée pour le calcul des cubes; on prendrait S1 = ABa, 12 = BCb, 24 = CEdc. Il résulte de là, qu'au lieu de calculer les surfaces partielles, on peut aussi calculer les surfaces algébriques comptées à partir de l'axe du profil, c'est-à-dire les surfaces :

$S_1 = AB a$, $S_2 = AB a - BC b$, $S_4 = AB a - BC a + CE ed$.

Il peut se faire que la ligne du terrain rencontre le côté cd, c'est ce qui arriverait si le fossé avait une largeur cd'; dans ce cas, on devrait calculer $S_3 = AB a - BC b + CD c$. Ajoutons à S_2 une constante $-C_2 = -baO_2$, à S_3 une constante $C_3 = abcO_3$, à S_4 une constante $C_4 = abcdO_4$, on trouve :

$S_1 = AB a$, $S_2 - C_2 = -ACO_2$, $S_3 + C_3 = ADO_3$, $S_4 + C_4 = AEO_4$

Toutes les surfaces à calculer ABa, ACO_2, ADO_3, AEO_4 rentrent dans un type unique, c'est la surface comprise entre l'axe du profil en travers, une droite fixe du gabarit, 1, 2, 3, 4 prolongée, et la ligne variable du terrain naturel. Soient (fig. 91) ABO l'une de ces surfaces; OA = H la hauteur du terrain au-dessus d'un point fixe du gabarit ou la côte de déblai ou de remblai modifiée d'une hauteur constante; I la différence en valeur absolue des inclinaisons des lignes OB et AB, c'est-à-dire la longueur CD de la verticale menée à l'unité de distance du point B et limitée par les lignes OB et AB prolongées; S la surface ABO, l la distance BF du point B à l'axe du profil. Les figures ABO et BCD étant semblables, on a : $\frac{H}{l} = \frac{I}{1}$ d'où $l = \frac{H}{I}$; on a d'ailleurs $S = \frac{Hl}{2}$. Ainsi le système unique de formules

$$l = \frac{H}{I} \qquad S = \frac{lH}{2}$$

permet de calculer les largeurs l_1, l_2, l_3, l_4 utiles au tracé

complet du plan terrier, à la détermination des emprises et des surfaces de talus et les surfaces S_1, S_2, S_3, S_4.

Il nous reste à montrer que ces formules s'appliquent à tous les cas possibles.

209. Déblai partiel contre l'axe. — La surface $S_1 = AB\alpha$ (fig. 90) est une surface de cette nature; on calcule ses éléments par la formule générale; soient h la côte de déblai, i l'inclinaison de la ligne du terrain sur l'horizon, inclinaison $i = -\operatorname{tg} XAB$ que nous considérons comme négative dans le cas où le terrain est en pente en s'éloignant de l'axe; on fera dans les formules générales $H = h$, $I = -i$.

210. Remblai partiel contre l'axe. — Si la ligne du terrain était située en A'B (fig. 90), il y aurait à calculer une surface partielle de remblai $S' = A'B\alpha$. Soient h' la côte de remblai, i l'inclinaison du terrain qui, dans ce cas, doit être positive; on calculera les éléments de cette surface en faisant les formules générales $H = h'$, $I = i$.

211. Profil de remblai. — Reprenons la formule

$$S_2 - C_2 = -ACO_2 \text{ ou } S_2 = -ACO_2 + C_2.$$

Il est facile de voir que cette formule donne la valeur algébrique de toute surface limitée au talus de remblai; supposons, par exemple, que la ligne du terrain soit en A'C', la surface de remblai est $A'C'O_2 - C_2$, et si on considère la surface de remblai comme négative, on a $S_2 = -A'C'O_2 + C_2$, formule identique à la précédente. Dans la plupart des cas où l'on doit calculer S_2, S_2 est négatif; dès lors posons $S_2 = -S'_2$, on a :

$$S'_2 = A'C'O_2 - C_2.$$

Lorsque S'_2 est positif, il s'agit d'une surface de remblai; quand S'_2 est négatif, il y a excès de déblai sur le remblai.

On calculera la surface $A'C'O_2$ par la formule générale; soient h' la côte de remblai, h' étant négatif dans le cas du déblai; i l'inclinaison du terrain; T' l'inclinaison en valeur absolue du talus de remblai; k_2 la hauteur $O_2\alpha$; on fera dans les formules générales : $H = k_2 + h'$, $I = T' + i$.

212. Profil de remblai. — On reconnaît facilement que la formule $S_4 - C_4 = AEO_4$ convient à toute surface limitée au talus de déblai, que AE ait la position de la figure 90, ou vienne se placer en AE' ou A'E'. On calculera AEO_4 par la formule générale; soient : h la côte de déblai, h étant négatif dans le cas du remblai; $k_4 = aO_4$; i l'inclinaison du terrain, T celle des talus de déblai; on fera : $H = h + k_4$, $I = T - i$.

213. Profil intermédiaire. — Lorsque la ligne du terrain coupe le plafond du fossé, on a un profil intermédiaire entre les deux précédents; deux cas peuvent se présenter.

1er *cas. L'inclinaison du terrain est négative.* — Soit AD la ligne du terrain; nous avons déjà établi la formule $S_3 + C_3 = ADO_3$ ou $S_3 = ADO_3 - C_3$. On reconnaît facilement que cette formule convient dès que AD est au-dessus de O_3D. La surface ADO_3 se calcule par la formule générale; soient h la cote du déblai, i l'inclinaison du terrain, $k_3 = O_3a$, on fera ; $H = h + k_3$, $I = i$. La cote h doit être plus grande que $-k_3$.

2e *cas. L'inclinaison du terrain est positive.* — Soit AD la ligne du terrain; on reconnaîtrait facilement qu'en employant la méthode précédente, on obtiendrait encore la surface du remblai affectée du signe moins; mais alors on devrait donner à H une valeur négative, ainsi qu'à la surface $A'DO_3$. Mais comme la surface à calculer est une surface de remblai, il vaut mieux calculer sa valeur absolue S'_3; on trouve :

$$S'_3 = A'DO_3 + C_3.$$

La surface $A'DO_3$ se calcule par la formule générale; soient h' la cote de remblai, i l'inclinaison du terrain, $k_3 = Oa_3$, on fera :

$$H = h' - k_3, \quad I = i.$$

214. Détermination des constantes. — Pour pouvoir appliquer la méthode précédente, il faut au préalable calculer les constantes k_2, k_3, k_4, C_2, C_3, C_4; ces constantes se déterminent aussi par la formule générale. Soient L_1', L_2, L_3 les

distances à l'axe du profil des points b, c, d. Les constantes sont nulles pour le calcul de S_1. Pour le calcul de S_2, les constantes k_2 et C_2 sont précisément les valeurs de h et de S_1 pour $l_1 = L_1$, $i_1 = T'$; on a donc $L_1 = \frac{k_2}{T}$, $C_2 = \frac{1}{2} k_2 L_1$. Pour le calcul de S_3, les constantes k_3 et C_3 sont les valeurs de h' et de S_2 pour $l_2 = L_2$, $i = 0$. Enfin, pour le calcul de S_4, les constantes k_4 et C_4 sont les valeurs de h' et de S'_3 pour $l_3 = L_3$, $i = T$.

215. Table graphique générale. — Puisque les calculs se ramènent au calcul des formules $l = \frac{H}{I}$ et $S = \frac{lH}{2}$, des éléments des profils en travers, largeurs et superficies, on construira une table générale en représentant les fonctions l et S. Pour représenter la fonction l, nous choisirons deux axes coordonnés rectangulaires, et nous poserons $y = H$, $x = l$, on a alors, pour les lignes de I, $y = Ix$. La figure 88 est la réduction à une petite échelle d'une table construite d'après ces principes. Les H se portent sur l'axe Oy; les lignes des H sont parallèles à l'axe des x; les lignes des I sont des droites passant par l'origine; l'axe des I dépend de l'échelle des droites qui représentent ces inclinaisons. Supposons que pour chaque profil en travers, le profil en long renseigne les dénivellations entre l'axe de la route et les points situés à une distance λ de l'axe; pour un demi-profil, cette dénivellation sera λi; on conviendra alors de représenter les inclinaisons I par les longueurs λI. Soit OA une droite des I, $OC = \lambda$, l'ordonnée CA est précisément λI, donc l'axe Cy' est l'axe des I. Pour obtenir la longueur l, on porte $OB = H$, et on place une bande de papier en BD, on porte $CA = I\lambda$, on suit la ligne I jusqu'en D, on marque les deux points B et D; BD est la longueur cherchée. Nous remarquerons qu'une pareille table se construit très rapidement; en la construisant sur un papier millimétrique, les lignes des H et des l sont toutes tracées; il suffit de tracer par l'origine des lignes couvrant toute l'étendue de la table. Lorsque les inclinaisons sont données en nombre, il faut graduer les lignes des I,

cette graduation se fait très facilement ; si on choisit OC = 10^{m}, CA = 10 I en portant CA = 1, 2, 3... on aura des points des lignes I=0,1 , 0,2 , 0,3 , etc.

Il nous reste à faire voir que le même tableau permet de calculer la surface S. Il s'agit de présenter la fonction $S = \frac{lH}{2}$; si l'unité de longueur représente u mètres carrés, la surface S sera représentée par une longueur $\frac{S}{u}$. Posons $y = H$, $x = \frac{S}{u}$, on trouve, pour les lignes des l, $x = \frac{l}{2u}\, y$. Les lignes des H sont encore des parallèles à l'axe des x, les H étant portés sur l'axe Oy ; les surfaces sont les abscisses des points du tableau ; les lignes des l sont des lignes droites émergeant de l'origine O. Ainsi le même tableau peut servir, mais les lignes I deviennent des lignes des l ; il s'agit de construire l'axe des l.

Remarquons que si dans l'équation d'une ligne des l on fait $Y = 2u$, on trouve $x = l$, donc portons OR = $2u$, l'axe Rx' est l'axe des l. La surface s'obtiendra, du reste, par la même opération que la largeur l ; nous avons vu comment on traçait BD = l sur une bande de papier ; il suffit de suivre une verticale DE, puis une ligne EO, pour marquer le point S, BS est la surface cherchée.

Il faut remarquer que l'on n'obtient pas directement les surfaces et les largeurs au moyen des cotes de déblai et des inclinaisons ; il faut augmenter ou diminuer ces éléments de certaines constantes ; ces constantes sont des longueurs que l'on détermine une fois pour toute pour chaque gabarit ; d'après le numéro précédent, ces constantes se détermineront par la table elle-même. Les additions ou soustractions de ces constantes se font graphiquement ; pour ce qui concerne les surfaces, il est inutile de faire la correction ; on pourra tenir compte des constantes C_2 C_3 C_4 en portant dans le calcul graphique des cubes, les surfaces S à partir de certaines lignes $y = -C_2$, $y = \pm C_3$, $y = -C_4$ parallèles à l'axe des longueurs. Toutefois toutes ces petites opérations peuvent

être supprimées en appropriant la table au gabarit spécial dont on a besoin.

216. Appropriation d'une table à un gabarit donné. — Les éléments de la table générale H, I, S diffèrent des éléments du profil h ou h', $\pm i$, S de quantités constantes; il suffit dès lors, pour pouvoir porter directement h, i et obtenir S, de déplacer les origines des axes, de ces quantités constantes; comme ces constantes dépendent du gabarit, on obtient alors une table particulière à ce gabarit. Nous avons représenté cette table fig. 101, pl. 4.

Pour ce qui concerne les i, il y a trois origines différentes; pour le calcul de s_1 ou s_3, on doit prendre $I = \pm i$, donc C_{13} ou C'_{13} est l'origine des ii; pour le calcul de s'_2, on doit prendre $I = T' + i$, on portera les i à partir de l'origine C_2 que l'on obtient en portant $C_{13}C_2 = T'$; pour le calcul de s_4 on doit prendre $I = T - i$, donc on portera les i à partir de l'origine C_4 que l'on obtient en prenant $C_{13}C_4 = T$. Sur la figure, C_2 et C_4 coïncident parce que nous supposons $T = T'$. Lorsque les inclinaisons sont données numériquement, il faut 2 ou 3 graduations différentes pour les lignes des i; nous les avons indiquées sur la figure, mais elles sont inutiles quand les inclinaisons sont données en longueur.

Pour ce qui concerne les h ou h' et les s, il faut cinq origines différentes: O pour les h ou h', les s_1 ou s'_1, O'_2 pour les h' et les s_2, O_3 pour les h et les s_3 quand $i < 0$, O'_3 pour les h' et les s_3 quand $i > 0$, O_4 pour les h et les s_4; ces origines se déterminent avec la plus grande facilité.

L'origine des s_1 est connue; c'est l'origine des axes coordonnés. Calculons par la table h et s_1 pour $l_1 = L_1$, $i = -T$; portons $y = h$, $x = s_1$, nous aurons le point O_2: la table de s'_2 sera construite. Calculons par la table des s'_2, h' et s'_2 pour $l_2 = L_2$, $i = 0$, prenons $y = h'$, $x = s'_2$ nous aurons l'origine O_3; prenons $y = -h'$, $x = -s'_2$ nous aurons l'origine O'_3: la table des s_3 et des s'_3 sera construite. Calculons par la table des s'_3, h' et s'_3 pour $l_3 = L_3$, $i = T$, prenons $y = h'$, $x = s'_3$ on obtient l'origine O_4: la table s'_4 est construite.

217. Détermination de la nature du profil. — La table de la fig. 101 doit être employée de cinq manières différentes; il faut donc pouvoir déterminer la nature d'un profil donné. Il est d'abord évident que dans la plupart des cas il sera manifeste qu'il y a déblai ou remblai; mais si la ligne du terrain se dirige vers le fossé, il peut y avoir indécision; dans ce cas on calcule l_1, l_2, l_3, l_4 et d'après les longueurs que l'on obtient on saura quelles sont les surfaces à calculer. On calculera s_1 si $l_1 < L_1$, s_2 si $l_2 > L_1$, s_3 si $l_3 \begin{matrix} < L_3 \\ > L_2 \end{matrix}$, s_4 si $l_4 > L_4$; c'est pour faciliter ces vérifications que nous avons tracé les droites $x = L_1$, $x = L_2$, $x = L_3$, $x = L_4$ sur la table graphique; généralement, dès que l'on aura déterminé l_4, toute indécision sera disparue. Voici, au surplus, tous les cas qui peuvent se présenter : 1er cas, $i > 0$. Si $h > 0$, il y a déblai; si $h < 0$, il peut y avoir déblai et remblai. On calcule l_4, si $l_4 > L_3$, s_4 est la surface totale; mais il y a passage, il faut calculer une surface partielle qui est s_1, S_2 ou s_3; si $l_1 < L_1$, c'est s_1, si $l_1 > L_1$ $l_2 < L_2$, c'est s_2, si $l_1 > L_1$, $l_2 > L_2$, c'est s_3. 2e cas, $i < 0$. Si $h > -k_3$, il peut avoir un ou deux passages. Si $l_4 > L_3$, s_4 est la surface totale; il peut avoir deux points de passage, si $h > 0$, $l_1 < L_1$, on calculera s_1 et s_2. Si $l_4 < L_3$, $l_3 > L_2$ le profil est intermédiaire; il peut y avoir deux points de passage, si $h > 0$, $l_1 < L_1$, on calculera s_1 et s_2. Si $l_4 < L_3$, $l_3 < L_2$, on a un profil de déblai; il y a un point de passage si $h < 0$, on calcule l_1 et s_1. Enfin si $h < -k_3$, le profil est tout entier en remblai.

218. Emprises, surfaces de talus. — Les longueurs l_1, l_2, l_3, l_4, L_1, L_2, L_3, L_4 permettent de construire un plan terrier complet; une intégration graphique donnera les surfaces d'emprises et les surfaces de talus. Les surfaces de talus sont déterminées par leurs projections horizontales; soit A une surface de talus de déblai, cette surface fait avec l'horizon un angle dont la tangente est T, et le cosinus $\frac{1}{\sqrt{1+T^2}}$, donc la projection horizontale B est $B = \frac{A}{\sqrt{1+T^2}}$,

d'où $$A = B\sqrt{1+T^2}.$$

Ainsi la projection horizontale du talus doit être multipliée par une constante; on tiendra compte de cette constante dans le choix de la base d'intégration. Pour le talus de remblai on aura : $A' = B'\sqrt{1+T'^2}$, la base d'intégration sera différente.

Si l'on voulait connaître la longueur du talus en vraie grandeur, on pourrait l'obtenir très facilement sur le tableau de la fig. 101 ; si par la pensée on prolonge les longueurs des talus jusqu'à l'axe du profil en travers considéré, les longueurs des talus ont pour projections horizontales l_2 ou l_4 selon qu'il s'agit d'un talus de déblai ou de remblai ; on obtiendra ces longueurs sur les droites T' et T ; on tient comptes des constantes en plaçant convenablement les origines T' et T.

§ 4. Tables diverses utiles aux calculs de terrassements.

219. Il peut être utile d'exposer d'une manière sommaire les différents systèmes auxquels la méthode des coordonnées générales (181) nous a conduit d'une manière toute naturelle; c'est après la comparaison de tous ces systèmes que nous avons choisi le système du paragraphe précédent. Nous avons d'abord suivi les anciens errements et construit des tables pour les diverses surfaces partielles et totales que l'on rencontre ; il faut une table spéciale pour chaque cas lorsque l'on s'impose la condition de n'employer que des droites d'égales cotes ; pour chaque table il faut, lorsque l'on donne le gabarit, tracer une courbe qui en limite l'emploi, ou bien établir le tableau de M. Lalanne (fig. 85) qui permet de déterminer *a priori* la nature du profil. Plus tard nous sommes parvenus à ramener les calculs à un système unique de formules, nous nous occuperons exclusivement de ce système qui est :

$$l = \frac{H}{I} \qquad S = \frac{lH}{2} = \frac{H^2}{2I}.$$

220. Table des surfaces. — Il s'agit de représenter la fonction $S = \frac{H^2}{2I}$, il faut, pour y arriver, trois systèmes de lignes, dont deux peuvent être choisis à volonté; on peut employer les trois systèmes de lignes droites qui suivent :

$$1.\quad x = I,\quad y = \frac{H^2}{2},\quad y = Sx$$

$$2.\quad x = S,\quad y = \frac{H^2}{2},\quad y = Ix$$

$$3.\quad x = \frac{1}{I},\quad y = S,\qquad \frac{H^2}{2}x.$$

Nous avons représenté le système 2 (fig. 92); on reconnaît aisément que l'axe des H est une circonférence; en effet : soit la droite $y = \frac{H^2}{2} = OH'$; portons $OH = H$; menons HE perpendiculairement à OH; on a : $(OH)^2 = OH' \times OE$, d'où $OE = \frac{OH^2}{OH'} = 2$. Le nombre 2 est un nombre conventionnel qui dépend des échelles; en rétablissant l'homogénéité, on a

$$OH = H,\quad OH' = \frac{H^2}{2a},\quad OH = 2a.$$

Il résulte de là que le lieu des points H est une demi-circonférence sur OE comme diamètre ; on prend $OE = 2a$ égal à la plus grande hauteur que l'on pourra rencontrer, telle que $OE = 25^m$.

Si, par exemple, on veut approprier cette table à une surface de déblai, on doit faire : $H = h + k_4$, $I = T - i$, $S_4 = S - C_4$. Traçons une circonférence de rayon $OK = k_4$, on porte h en KH, on prendra S_4 à partir de l'axe $x = C_4$; on portera $-i$ à partir du point C_4 tel que $CC_4 = T$.

On peut mettre l'équation $S = \frac{H^2}{2I}$ sous d'autres formes : $\sqrt{S} = \frac{H}{\sqrt{2I}}$, log. 2S = log. H. + log. I; chacune de ces formes conduit à trois systèmes de tables ; si, par exemple, on pose $x = \log I$, $y = \log H$, d'où $2y + x = \log 2S$, on obtient le système des tables que M. Lalanne a construit en 1843.

221. Tables des largeurs. — La formule $l = \frac{H}{I}$ se représente de la même manière, mais plus facilement que la précédente :

$$(1) \quad x = I, \quad y = H, \quad y = lx,$$
$$(2) \quad x = l, \quad y = H, \quad y = Ix,$$
$$(3) \quad x = \frac{1}{I}, \quad y = l, \quad y = Hx.$$

La forme $\log l = \log H - \log I$ conduit aussi à trois systèmes de tables.

222. Tables des largeurs et des surfaces. — Pour obtenir une table donnant les largeurs et les surfaces, on peut utiliser les principes de l'élimination graphique. Dans les formules $S = Hl$, $l = \frac{H}{I}$ il y a quatre variables H, I, l, S; on en choisit deux comme variables indépendantes, les deux autres sont des fonctions à représenter; on obtient ainsi quatre systèmes de lignes : lignes des H, des I, des l, des S; connaissant deux variables, on trouvera les deux autres par la table.

Si nous prenons une table des surfaces quelconques, il suffira de tracer un système de ligne des l pour compléter la table; ainsi pour le système 2 du numéro 220, on a :

$$l = \frac{H}{I}, \quad I = \frac{y}{x}, \quad H = \sqrt{2y}, \quad \text{d'où} \quad l = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{y}},$$

les lignes des l sont des paraboles. De même si nous prenons une table des largeurs, il suffira de tracer les lignes des S pour la compléter; prenons, par exemple, le système 2 (221):

$$x = l, \quad y = H, \quad y = Ix; \quad \text{on a } S = \frac{lH}{2} = \frac{xy}{2};$$

donc les lignes des S sont des hyperboles $xy = 2S$; nous avons choisi cet exemple parce qu'on retrouve ainsi le système des tables de Davaine légèrement modifié par M. Lalanne. Les tables de Davaine s'appliquent aux surfaces de déblai et de remblai; supposons, par exemple, une surface de remblai;

on fera $I = T + i$; prenons pour ligne des I, $y = ix$, nous retrouverons les tables de Davaine d'une manière bien différente de celle qui a été employée par l'auteur. On a alors : $x = l$, $y = ix$, la formule $l = \frac{H}{T + i}$ donne les lignes des H, $y = H - Tx$, ce sont des droites parallèles. On trouve, pour les lignes des S, $S = x(y + Tx)$; ce sont des hyperboles.

Lorsque les formules sont laissées sous la forme $S = \frac{Hl}{2}$, $l = \frac{H}{I}$, il est impossible de représenter, d'après le système qui nous occupe, les fonctions S et l sans faire usage d'un système de courbes difficiles à construire ; on ne peut éviter ces courbes qu'en utilisant la transformation logarithmique. On a alors :

$$\log 2S = \log H + \log l \qquad \log l = \log H - \log I.$$

En prenant au hasard deux logarithmes comme x, y, on obtiendra un système de tables ; il y a donc 6 systèmes principaux de tables de ce système. Deux de ces systèmes ont été trouvés par M. Lalanne, en amorphosant les tables de Davaine ; on les obtient aussi comme il suit :

1° $x = \log l \quad y = \log H \quad x + y = \log 2S \quad y - x = \log l.$
2° $x = \log 2S \quad y = \log I \quad y + y = 2 \log H \quad y - x = 2 \log l.$

223. Deuxième système de tables des largeurs des surfaces. — Si on représente les largeurs par l'un des systèmes du n° 221, on obtient une table qui se compose de lignes émergeant de l'origine ; or les tables des surfaces ont aussi cette disposition, donc une même table suffit pourvu que l'on change la graduation si l'on opère par nombres, ou les axes si l'on opère par lignes. Ainsi, par exemple, pour les systèmes :

$$x = S \qquad y = \frac{H^2}{2} \qquad y = Ix$$
$$x = l \qquad y = H \qquad y = Ix$$

les lignes convergentes restent les mêmes (fig. 91), les I, les S, les l se prennent ou se lisent de la même manière ;

mais il y a deux axes pour porter les H, un axe circulaire pour le calcul des surfaces, un axe rectiligne pour le calcul des largeurs; c'est-à-dire que dans la fig. 91, on obtient les largeurs en H''B' (si OH'' = H) les surfaces en H'B (si OH = H).

Au lieu de représenter les fonctions $S = \frac{H^2}{2I}$, $l = \frac{H}{I}$, on peut aussi représenter les formules $l = \frac{H}{I}$, $S = \frac{Hl}{2}$; il en résulte une nouvelle série de tables; c'est dans cette série que nous avons trouvé la table du paragraphe précédent; dans les deux calculs $y = H$, la hauteur ne se porte qu'une seule fois; c'est un avantage de cette disposition.

224. Résumé. — La méthode des coordonnées générales permet de trouver très naturellement un nombre très grand de tables de surfaces et de largeurs; les unes sont nouvelles, d'autres sont connues. Les tables les plus élégantes, les plus ingénieuses sont celles que M. Lalanne a établies au moyen de l'anamorphose logarithmique; elles ont cependant pour le but que nous promenons trois inconvénients graves:

1° Pour chaque nouveau gabarit, elles exigent un travail de 168 heures; 2° elles supposent des côtes de déblai et de remblais calculées; 3° elles donnent les surfaces en nombre. Les autres systèmes n'ont pas ces inconvénients; le système que nous proposons a les avantages suivants:

1° La table peut être construite très rapidement; 2° une seule table suffit; 3° les cotes rouges ne doivent pas être calculées; 4° les largeurs et les surfaces sont représentées par des lignes; 5° on peut faire lithographier les tables générales, on les appropriera à un gabarit donné en très peu de temps.

CHAPITRE IV

Calcul des cubes et évaluation de la dépense.

§ 1er. Calcul des cubes.

225. Compensation des déblais et remblais. — Soit ABICKDEFG (fig. 100) la ligne obtenue en portant en ordonnées les sections totales algébriques des profils en travers; les cubes de déblai et de remblai à effectuer hors profil sont représentés par les surfaces comprises entre cette ligne et l'axe des abscisses : ces surfaces s'évalueront au moyen d'une intégration graphique. Soit $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ l'intégrale obtenue en prenant $A_1x'_1$ comme ligne de repère; pour qu'il y ait compensation des déblais et des remblais, il faut que l'intégrale totale des cubes soit égale à zéro, en d'autres termes que le point G_1, extrémité de la ligne intégrale, tombe sur l'axe A_1x_1. Il est à remarquerque cette compensation ne doit pas être rigoureuse, car si on la réalisait exactement dans les calculs, en fait elle n'existerait pas, à cause de l'inexactitude des hypothèses admises. Dans la figure 97, il y a excès du déblai sur le remblai et cet excès est représenté par l'ordonnée G_1g_1; menons la droite A_1G_1 et supposons que la ligne intégrale soit rapportée à cette droite A_1G_1 prise comme ligne de repère; cette hypothèse revient à relever l'axe ax d'une quantité constante égale à la dérivée de la ligne A_1G_1; si cette quantité constante est plus petite que les erreurs que l'on peut commettre dans l'évaluation des surfaces de déblai et de remblai, il n'y aura aucun inconvénients à admettre cette hypothèse dont le résultat sera de réaliser une compensation mathématique.

Lorsque la différence entre les cubes de déblai et de remblai est trop considérable, il faut modifier le projet. Soit ABC (fig. 96) la partie du profil en long que l'on se propose de modifier de manière à augmenter l'excès du déblai sur le remblai d'un cube représenté par la droite C'C''. Pour y

arriver on remplace la ligne ABC du projet par la ligne AB'C; l'augmentation du déblai est le cube compris entre les surfaces ABC et AB'C; c'est ce cube qui doit être représenté par C'C''. Joignons A'C''; la dérivée MN de la droite A'C'' donne la section moyenne du cube ABCB'A; nous pouvons sans erreur sensible supposer que les sections transversales de ce cube aient une largeur constante, moyenne des longueurs effectives, que l'on déterminera aisément par aperçu; dans cette hypothèse, MN représente la moitié de la section BB'; de là on déduit la construction suivante: prenons M'N = 2MN, portons NP égal à la largeur moyenne du volume ABCB', joignons PM' la dérivée nm de la droite PM' donne la hauteur inconnue BB', ce qui détermine le profil AB'C qu'il faut adopter pour réaliser la compensation. Remarquons que dans la figure 96, A'N est la base d'intégration adoptée pour la recherche des cubes, tandis que Pn est la base d'intégration adoptée pour le calcul des surfaces des profils en travers, PN étant porté à l'échelle de ces profils en travers.

Ayant déterminé le nouveau profil en long, il faut recommencer les calculs des profils modifiés; mais il est facile de voir qu'il ne faut pas refaire entièrement ces calculs. Soit Ss (fig. 72) la surface du profil ACFdb; on veut obtenir la surface du profil A'CF'$d'b'$; il suffit évidemment d'ajouter à la surface connue, la surface comprise entre les deux lignes AbdF et A'$b'd'$F'; cette surface est équivalente à un rectangle de hauteur bb' et de base IK facile à déterminer; en projetant la hauteur de ce rectangle en OH, et en menant IK' parallèlement à PH on obtient en KK' la surface qu'il faut ajouter à Ss pour avoir la surface cherchée SS'.

226. Mouvement des terres.—Reprenons la figure 100; la courbe intégrale $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1$ donne le cube de déblai ou le cube de remblai compris entre deux sections transversales quelconques; mais il est facile de reconnaître que cette courbe fournit également des données complètes sur le mouvement des terres. Aux points I_1, K_1, L_1, M_1 où cette courbe coupe l'axe A_1G_1, il y a compensation partielle,

de telle sorte que ces points divisent la route en plusieurs tronçons que l'on peut établir séparément sans devoir transporter des terres de l'un d'eux dans un autre. Considérons, par exemple, le premier tronçon $A_1 I_1$; la distribution des terres la plus rationnelle est la suivante: on commencera par effectuer les terrassements aux environs du point de passage B; menons NN' parallèlement à l'axe $A_1 G_1$; entre les deux points N et N' il existe un cube de remblai, et un cube de déblai équivalent qui servira à l'effectuer; menons PP' parallèlement à NN'; le cube de déblai compris entre les deux points N'P' viendra se placer sur le cube de remblai équivalent compris entre les deux points N et P; si on divise le déblai I en tranches d'une manière quelconque, on pourra, de cette façon, déterminer l'emplacement que prendra chacune de ses tranches lorsque le remblai I sera effectué. Ces considérations s'appliquent également au tronçon $I_1 K_1$ dans lequel le déblai II servira à effectuer le remblai II' et ainsi de suite. Dans la figure 100, il y a un point de compensation partielle dans chaque déblai et chaque remblai, de telle sorte que dans chaque tronçon, il y a un seul cube de déblai séparé par un seul point de passage du cube de remblai équivalent; cette disposition doit être réalisée autant que possible afin de diminuer les distances de transport.

Dans la figure 99, nous avons représenté une disposition différente; le tronçon IM comprend deux volumes de déblai et deux volumes de remblai séparés entre eux par trois points de passage; dans ce cas, le mouvement des terres peut être effectué de plusieurs manières. Menons arbitrairement la droite $N_1 R_1$, parallèlement à l'axe $I_1 M_1$ et rapportons les points d'intersections N_1 P_1 Q_1 R_1 de cette droite avec l'intégrale, sur les points correspondants N P Q R de la ligne des surfaces. On pourra effectuer les terrassements dans l'ordre suivant: II en II, III en III, IV en IV, puis après V en V. En déplaçant la ligne $N_1 R_1$, on obtient une infinité de solutions; si cette ligne se déplace depuis la tangente en D_1 jusqu'à la tangente en E_1, le volume III varie de zéro à sa valeur maxima; le volume IV diminue depuis sa valeur

maxima jusqu'à zéro. Au point de vue du coût des transports, la solution la plus économique est celle pour laquelle le volume III est nul. En effet, le volume III est transporté de droite vers gauche; plus tard, le volume V est transporté de gauche vers droite en passant par le même point D; il y a là un transport inutile que l'on peut supprimer. Dans le tronçon ID, il y a un excès de déblai représenté par l'ordonnée $D_1 d_1$; on peut se borner à faire passer ce volume par la section D, au lieu de faire passer III en sens contraire par le point D, pour faire passer ensuite par le même point $III + D_1 d_1$. Toutefois, si le transport est rendu ainsi le plus économique, nous verrons plus tard qu'en tenant compte des temps d'arrêt des appareils, il peut être moins coûteux de donner au volume III une certaine importance.

227. Tracé graphique de l'intégrale des cubes. — Soit 0 1 2 3 4.... (fig. 102, pl. 5) le polygone qui représente la loi de variation des sections totales y compris les sections des fossés lorsqu'ils existent; nous avons représenté (fig. 103) les opérations graphiques à faire pour obtenir la courbe intégrale des cubes; la figure suffit pour montrer la méthode employée qui est la méthode du polygone circonscrit (36). Pour rendre l'épure plus claire, on adopte plusieurs diagrammes. La courbe intégrale est formée d'arcs paraboliques déterminés par leurs tangentes extrêmes; il est, en général, inutile de tracer ces arcs de parabole, sauf toutefois pour trouver les points I_1, K_1, où il y a compensation partielle. Pour déterminer l'un de ces points, on trace l'arc parabolique à vue, l'abscisse du point d'intersection que l'on trouve est inexacte; on cherche le point de la courbe intégrale ayant cette abscisse; si ce point est très rapproché de l'axe de repère, on mène la tangente en ce point et l'on détermine le point cherché en remplaçant la courbe par cette tangente; si l'erreur est plus forte, on trace la courbe aux environs du point cherché, on obtient un nouveau point plus rapproché, puis on applique la méthode précédente.

228. Foisonnement et tassement. — Lorsque l'on effectue un déblai, il arrive presque toujours que les terres, après

l'ameublissement, ont un volume plus grand que dans leur position primitive : ce phénomène est le foisonnement. Si D est le volume de déblai à effectuer, on devra transporter un volume plus grand mD. Inversement quand les terres sont déposées en remblai, elles se tassent, leur volume diminue; et pour effectuer un remblai R, il faut transporter un volume nR. La compensation des déblais et des remblais s'exprime par $m\,\mathrm{D} = n\,\mathrm{R}$. On tiendra compte des coefficients m et n, en remplaçant la base d'intégration λ calculée pour $m = n = 1$, par $\frac{\lambda}{m}$ pour les déblais, par $\frac{\lambda}{n}$ pour les remblais.

§ 2. Évaluation du coût des terrassements.

A. Tronçon où les terres se déplacent dans le même sens, au moyen d'un même appareil.

229. Prix du transport. — Le prix du transport d'un mètre cube de terres, abstraction faite de la fouille, du chargement et des temps d'arrêt de l'appareil, est donné par la formule connue

$$p = \frac{2a\mathrm{D}}{c\mathrm{L}},$$

a étant le prix de la journée de l'appareil, y compris moteur et conducteur,

D, la distance de transport,

c, la capacité de l'appareil,

L, le chemin décrit en une journée par l'appareil marchant continuellement.

Cette formule peut aussi se mettre sous la forme

$$p = \pi\mathrm{D},$$

π désignant le prix du mètre cube transporté à un mètre de distance.

Soit (fig. 100) un volume de déblai représenté par la surface IiB, à transporter sur le volume de remblai A Ba; soit dv un élément du volume de déblai, $-dv$ le volume de remblai exécuté par ce déblai. Nous supposons que tous les

transports se font horizontalement, la pente étant presque toujours négligeable. Soit x la distance horizontale des éléments dv et $-dv$; le transport de l'élément dv coûte

$$\pi\, dv\, x.$$

Attribuons à l'élément dv un coefficient π ou si nous voulons un poids spécifique π (en francs); à ce point de vue et en considérant les déblais comme positifs et les remblais comme négatifs, les poids des éléments M et M' constituent un couple dont le moment $\pi\, dv\, x$ est précisément le prix du transport du petit volume considéré; comme le prix du transport est toujours positif, le moment $\pi\, dv\, x$ sera toujours affecté du signe plus, quel que soit le sens du couple; on obtiendra le coût de tous les transports effectués sur une route, en faisant la somme des valeurs absolues des moments des couples élémentaires.

Dans le tronçon AI les terres se déplacent toutes de droite vers gauche, tous les couples élémentaires ont même sens, donc le prix des transports, qui est égal à la somme des valeurs absolues des moments de ces couples élémentaires, est aussi égal à la valeur absolue du moment du couple résultant; les poids πdv se composent en un poids résultant πV appliqué au centre de gravité de la surface aAB; les poids $-\pi dv$ se composent en un poids $-\pi$V appliqué au centre de gravité de la surface BIi; le coût du transport du volume V est le moment du couple formé par ces deux poids, c'est πVX, X étant la distance horizontale des centres de gravité de ces deux surfaces. Il résulte de là que la dépense est la même que si le volume V avait été transporté à une distance constante X; cette distance est appelée pour ce motif la distance moyenne de transport. Soit $A_2B_2I_2C_2$... l'intégrale seconde de la ligne ABIC...; on sait (111) que les tangentes en A_2 et B_2 se coupent sur la verticale du centre de gravité de la surface ABa, que les tangentes en B_2I_2 se coupent sur la verticale du centre de gravité de la surface BIi; la distance entre ces deux verticales est la distance cherchée de X. On pourrait calculer le coût du transport au moyen de cette distance X, mais nous allons montrer que ce calcul est inutile et que

l'intégrale seconde $I_2 i_2$ représente ce coût à une certaine échelle.

Le prix du transport du volume V est $P = \int \pi dvx$; soient x', x'' les distances des éléments dv et $-dv$ à la droite Ii; on a : $\pm x = x' - x''$ (on prendra le signe plus quand les terres se déplaceront de gauche vers droite, le signe moins dans le cas contraire); on en déduit :

$$\pm \int dvx = \int dvx' + \int (-dv)x''.$$

Le second nombre de cette équation est précisément le moment du premier ordre des surfaces ABa et BIi, par rapport à la droite Ii; on sait (109) que l'intégrale seconde est aussi la ligne des moments du premier degré, donc

$$\int dvx' + \int (-dv)x'' = \pm I_2 i_2,$$

l'équation précédente devient $\pm \int dvx = \pm I_2 i_2$, d'où $\int dvx = I_2 i_2$; on a donc :

$$P = \pi I_2 i_2.$$

En prenant une base d'intégration convenable, $I_2 i_2$ représentera le prix P à une échelle déterminée. On a aussi $I_2 i_2$ = Surface $A_1 B_1 I_1 = S$, donc $P = \pi S$.

Les trois valeurs de P: $P = \pi VX = \pi S = \pi I_2 i_2$, supposent que les transports s'effectuent au moyen d'un même véhicule, mais la distribution des terres est quelconque et peut différer de celle que nous avons décrite au n° 226. Ainsi une partie des terres voisines du point de passage pourraient être transportées en a; si d'autres terres viennent se placer près du point de passage, le coût du transport sera toujours le même. Lorsque l'on adopte la distribution la plus rationnelle (226), on peut vérifier très simplement la formule P πS; en effet, les terres comprises entre les points P et N viennent se placer en P'N'; le volume dv de ces terres est représenté par la distance entre les droites NN' et PP', le prix du trans-

port est $\pi d v x = \pi$ surface N N' P' N; donc le coût total est πS.

On peut remarquer que les formules précédentes sont encore applicables au cas d'un tronçon où il y a plusieurs points de passage, tel que le tronçon IM (fig. 99), pourvu que les terres soient transportées dans le même sens, le volume III (226) étant réduit à zéro; en effet, tous les couples élémentaires ont même sens et la somme des valeurs absolues des moments de ces couples peut s'obtenir en prenant la valeur absolue du moment du couple résultant : les démonstrations précédentes sont encore applicables. Il faut remarquer toutefois que pour composer les poids $+ \pi dv$, il faut chercher le centre de gravité des volumes de déblai réunis et que pour composer le poids $- \pi dv$, il faut chercher le centre de gravité des volumes de remblai réunis. On obtient aussi le coût du transport par une seconde intégration; mais l'intégrale seconde ne donne directement la distance moyenne de transport que si on intègre ensemble les parties de l'intégrale seconde qui correspondent au déblai et au remblai; cette précaution est inutile, lorsque l'on calcule la dépense sans se servir de la distance moyenne de transport en multipliant l'intégrale seconde par π. Lorsque les terres se déplacent dans deux sens différents, les formules précédentes ne sont plus applicables; car, dans ce cas, les couples élémentaires ont des sens différents et le moment du couple résultant que l'on obtiendrait par les formules précédentes n'est plus égal au prix total, mais à la somme algébrique des prix élémentaires, en considérant les transports qui s'effectuent dans un sens comme ayant un coût positif et les autres comme ayant un coût négatif. Ainsi dans le cas de la fig. 99, on ferait en mulipliant l'intégrale seconde par π, une erreur égale au double du prix du transport du volume III; la formule $P = \pi S$ est sujette à la même erreur, les transports des volumes II, III, IV et V coûtent respectivement

π Surface $N_1C_1P_1$, π Surface $P_1D_1Q_1$, π Surface $Q_1E_1R_1$, π Surface $I_1N_1R_1M_1$; on trouve $P = \pi(S + 2P_1D_1Q_1)$.

230. Temps perdus. — En établissant la formule $p = \pi D$, on n'évalue que le coût du transport proprement dit ; il faut encore tenir compte des temps perdus au chargement et au déchargement et appelant α la dépense qui en résulte par mètre cube, on a : $p = \alpha + \pi D$, formule que l'on peut mettre aussi sous la forme $p = \pi (D + d)$; d est la distance qu'il faut ajouter à la distance de transport pour tenir compte des temps perdus. On peut représenter cette formule en portant D en abscisse, p en ordonnée ; on obtient une ligne droite pour chaque appareil ; α et $-d$ sont les coordonnées à l'origine.

Nous avons représenté (fig. 97) les valeurs suivantes de p (1) :

---

(1) Les éléments qui ont servi à établir ces formules sont les suivantes : 1° Brouette, $c = \frac{1}{27}$, $L = 30000$, $a = 2^f,50$, $p = \frac{2aD}{CL} = 0,0045\,D$, les temps perdus sont négligeables ; 2° camion, $c = 0,20$, $L = 30000$, a (3 hommes) $= 7^f,50$, $\pi = \frac{2a}{CL} = 0,0025$, pendant le déchargement et la mise en train, le camion parcourrait 80^m, cela équivaut à une augmentation de 40^m dans la distance de transport, d'où $p = 0,0025\ (D + 40)$; 3° tombereau, $c = 0,50$, $L = 3000$, $a = 9^f$, $\pi = \frac{2a}{CL} = 0,0012$. Le temps perdu au déchargement est $0^{heure},033$; pendant ce temps l'appareil parcourrait $0,033 \times 3000 = 100^m$, ce qui équivaut à augmenter la distance de transport de 50^m. Un chargeur charge 15^{m^3} en un jour sur une brouette ; sur un tombereau, il charge seulement 12^{m^3} ; comme 3 chargeurs peuvent travailler simultanément, la durée du chargement est $\frac{0,50}{3 \times 12}$; il faut pour ce motif ajouter une distance de transport égale à $\frac{1}{2} \cdot \frac{0,50}{3 \times 12} \times 30000 = 208^m$. Comme le conducteur travaille avec les chargeurs, on charge par journée 3 fois $12^{m^3} = 36$, soit 6^{m^3} de plus ; il en résulte un bénéfice qui conduit à retrancher 12^m à la distance de transport. On a donc $d = 50 + 208 - 12$, soit environ $d = 250^m$; 4° wagons, 9 wagons de 2^{m^3} sont traînés par 3 chevaux et un conducteur ; le wagon dure deux ans, coûte 750 fr., circule pendant 250 journées, le wagon coûte par journée 3 fr. ; il fait majorer ce prix de 20 pour cent pour tenir compte des wagons

Brouette	$p = 0{,}0045\,D$	$d = 0$	ligne OA
Camion	$p = 0{,}10 + 0{,}0025\,D$	$d = 40^m$	ligne AB
Tombereau	$p = 0{,}30 + 0{,}0012\,D$	$d = 250^m$	ligne BC
Wagons	$p = 0{,}39 + 0{,}0016\,D + \frac{12D}{V}$		lignes DE, DE'...

Dans la dernière formule, on a tenu compte de la dépense due à l'établissement de la voie provisoire, qui s'exprime par 4 L, L étant la longueur totale des voies ; si on admet $L = 3D$, si V est le volume à transporter, on obtient par mètre cube une dépense supplémentaire égale à $\frac{12D}{V}$; la valeur de p est, dans ce cas, une fonction de deux variables, que l'on représente par un système de droites, chaque droite correspondant à une valeur du volume V. L'axe des V est parallèle à la droite DE_0 qui correspondant à $V = \infty$, car si l'on fait $\frac{12D}{V}$ = une constante, soit 0,12, on a $D = \frac{V}{100}$, on obtient très facilement un point de chaque droite sur l'axe OV. Cette représentation graphique permet de déterminer l'appareil le plus économique ; pour les petits volumes le polygone OABC donne le prix minimum pour chaque distance ; le wagon ne devient économique que pour un volume considérable.

Nous avons trouvé que le coût du transport d'un volume V (fig. 100) était donné par les formules

$$P = \pi VX = \pi S = \pi I_2 i_2.$$

---

en réparation, on trouve fr. 3-60 ; on fera donc $a = 20^f + 9$ fois 3-60 ; on adopte $L = 36000$, $C = 18^{m3}$, d'où $\pi = \frac{2a}{CL} = 0{,}00016$. Le déchargement coûte fr. 0 08 par mètre cube ; le chargement coûte 0-22 de plus que par tout autre appareil : cunette 0-04, transport en brouette 0-04, les chargeurs ne chargent que 10^{m3} au lieu de 15, soit 0-10 de dépense supplémentaire ; l'arrêt des wagons coûte $\frac{2^{m3}}{4 \times 10^{m3}} \times \frac{3{,}60}{2^{m3}} = 0{,}09$; on trouve

$$\beta = 0{,}08 + 0{,}22 + 0{,}04 + 0{,}04 + 0{,}09 = 0{,}39.$$

Pour tenir compte des temps perdus, on ajoutera une distance supplémentaire d, et l'on aura :

$$Q = \pi V (X + d) = \pi (S + V d) = \pi (I_2 i_2 + V d).$$

Lorsqu'on se sert de la surface S, on voit qu'il y faut ajouter un rectangle $B_1 b_1 u_1 U_1$ de hauteur V, de base d; si on se sert de l'intégrale seconde, on doit ajouter l'intégrale relative au rectangle dont il s'agit qui est $U_2 u_2$ et l'on a :

$$Q = \pi (I_2 i_2 + U_2 u_2).$$

Quand le transport se fera au wagon, on donnera à π la valeur $\pi = 0{,}00016$, mais on ajoutera la dépense due à l'établissement de la voie qui $4L = 12D$.

B. Coût total des transports. — Évaluation approchée.

231. Première méthode. — On trace (fig. 100) l'intégrale seconde $A_2 B_2 C_2$... de la ligne des surfaces ABIK...; pour chacun des tronçons AI, IK... on fait choix d'un appareil. Nous savons que le véhicule qui correspond à la dépense minimum dépend de la distance de transport; si on s'impose comme règle d'employer pour chaque distance le véhicule le plus économique, on est conduit à employer plusieurs appareils pour le transport d'un même volume de déblai; le calcul exact du prix des terrassements dans cette hypothèse est un calcul assez laborieux que nous exposerons plus loin; d'habitude, on effectue les calculs en admettant un appareil unique choisi d'après la distance moyenne de transport, laissant à l'entrepreneur le soin d'effectuer sur cette évaluation certaines économies par un choix rationnel des véhicules. L'appareil étant choisi pour chaque tronçon, on évaluera la dépense pour chaque tronçon en appliquant la méthode précédente; ainsi pour le tronçon AI, la dépense est $\pi (I_2 i_2 + U_2 u_2) = \pi (I_3 i_2)$. La multiplication par π s'opère graphiquement comme il est indiqué sur la figure.

232. Deuxième méthode. — Cette multiplication peut être évitée de la manière suivante. Par l'inspection des surfaces qui représentent les cubes à transporter, ou mieux

encore par l'inspection de l'intégrale de ces surfaces, on peut déterminer la distance de transport X ou $\frac{S}{V}$ assez exactement pour faire choix d'un appareil; alors on adopte une base d'intégration (55) telle que l'on obtienne immédiatement la dépense πS; si pour chaque tronçon, on emploie la base d'intégration qui correspond au véhicule employé, les ordonnées $I_1 i_1$, $M_1 m_1$,... représenteront les prix des transports, abstraction faite des temps perdus. L'ordonnée extrême ne représente cependant pas le coût total des transports, parce que cette ordonnée n'est pas la somme arithmétique des longueurs $I_1 i_1$, $M_1 m_1$,... mais leur somme algébrique; pour que l'ordonnée extrême de l'intégrale seconde représente le coût total des transports, il suffit de changer le signe de l'intégrale seconde pour chaque tronçon où cette intégrale est négative; ce changement de signe s'obtient en changeant le sens de la base d'intégration : ainsi O H donne l'inclinaison en B_1, O'H donne l'inclinaison au même point de l'intégrale changée de signe. Pour tenir compte des temps perdus, il suffit d'introduire dans l'intégration un rectangle supplémentaire $V d$ pour chaque tronçon.

233. Traces graphiques. — Nous avons appliqué cette méthode à la figure 102; la figure 103 donne l'intégrale première; elle se compose d'arcs paraboliques déterminés par leurs tangentes extrêmes; pour effectuer une seconde intégration, on applique la méthode du numéro 113; on obtient un polygone circonscrit à l'intégrale seconde. Avant d'effectuer cette intégration, on reconnaît que les points I_1, K_1 divisent la route en trois tronçons, le premier s'exécutant au tombereau, les deux autres au camion. Les bases d'intégration sont déterminées graphiquement de la manière suivante : on trace un rectangle ABCD représentant un transport dont le prix soit facile à évaluer : $V = AB = 500^{ms}$, $D = AD = 800^{m}$; au tombereau πVD est égal à $0{,}0012 \times 500 \times 800 = 48$ francs; on porte $DE = 48$ francs, AE doit être l'intégrale de BC, on mène CP parallèlement à AE, PD est la base d'intégration relative au transport par tombereau.

On trouve de même la base d'intégration P'D relative au transport par camion. Ces bases d'intégration sont portées dans un sens convenable pour que les prix des transports s'ajoutent ; chaque fois que le prix augmente de 100 francs, on abaisse l'intégrale seconde de la hauteur qui représente cette somme, de cette manière l'épure reste comprise dans des limites convenables. La figure indique suffisamment les constructions employées ainsi que la manière dont il a été tenu compte des temps perdus.

C. Méthode exacte.

234. Tronçon à un seul point de passage. — Soit (fig. 94) à transporter le volume de déblai représenté par aAI sur le déblai représenté par IBb ; imposons-nous la condition d'employer pour chaque distance de transport le véhicule le plus économique, c'est-à-dire la brouette pour les distances variant de o à oa (fig. 97), le camion pour les distances comprises entre oa et ob, le tombereau pour les distances plus grandes que ob, le wagon pour les grands volumes. Menons dans l'intégrale première $A_1 I_1 B_1$, les horizontales $P_1 Q_1$, $R_1 S_1$ égales aux longueurs limites oa et ob de la figure 97 ; si on rapporte les points P_1, Q_1, R_1, S_1, en P, Q, R, S, on voit que les volumes 1, 2, 3 seront respectivement transportés à la brouette, au camion, au tombereau. La surface $A_1 I_1 B_1$ est alors décomposée en trois surfaces partielles que l'on évaluera chacune avec la base d'intégration qui correspond au véhicule employé et en tenant compte des temps perdus par la méthode ordinaire.

Nous avons déjà fait remarquer (229) que la distribution des terres que nous venons d'admettre n'est pas la seule possible ; on peut démontrer comme il suit que c'est la plus économique. Si $p = f(x)$ désigne le prix du transport d'un mètre cube à la distance x, le prix du transport du volume V

$$\text{est} \int_0^v p\,dv = \int_0^v dv \int_0^x \frac{dp}{dx}\,dx = \iint \frac{dp}{dx}\,dx\,.\,dv.$$

Or $\iint dx\,dv = \int x\,dv = \omega$, constante que l'on peut considérer comme surface dont l'élément est $d\omega = dx\,dv$; la dépense s'exprime par $\iint d\omega \frac{dp}{dx}$, on peut donc la considérer comme le poids de la surface ω dont le poids spécifique serait $\frac{dp}{dx}$; la fonction p est représentée par O A B C (fig. 96), $\frac{dp}{dx}$ décroît quand x croit, donc, on obtiendra le prix minimum en plaçant les éléments $d\omega$ à la plus grande distance possible de l'axe des V. Si on modifie d'une manière quelconque la distribution que nous avons adoptée, on reconnaît aisément que la surface $\omega = \iint dx\,dv = A_1 V B_1 = A_1 I_1 B_1$ sera transformée en une autre, dans lesquelles les éléments seront plus rapprochés de l'axe $A_1 V$, et par conséquent auront une importance $\frac{dp}{dx}$ plus grande; donc la solution adoptée est la plus économique.

235. Tronçon à trois points de passage. — Reprenons le cas du tronçon I M (fig. 99); un volume voisin de N_1 peut être transporté en deux endroits différents. Si on le considère comme faisant partie du volume V, on le transporte en R_1 à la distance $N_1 R_1 = \lambda$, et un volume équivalent sera transporté de Q_1 en P_1 à la distance $P_1 Q = \lambda''$; le prix moyen par mètre cube sera $\frac{p+p''}{2}$. Si on le considère comme faisant partie du volume II, on le transporte en P_1 à la distance $N_1 P_1 = \lambda'$, et un volume équivalent sera transporté de Q_1 en R_1 à la distance $Q_1 R_1 = \lambda'''$; le prix moyen par mètre cube sera $\frac{p' + p'''}{2}$. La première solution sera la plus économique si:

$$\frac{p+p''}{2} < \frac{p' + p'''}{2}.$$

On vérifie aisément cette inégalité au moyen de la figure

97, on porte en abscisse $\lambda = o\,n$, $\lambda'' = o\,m$, $\lambda' = o\,q$, $\lambda''' = o\,p$, on prend les milieux K et I des droites Q P et M N, l'inégalité peut s'écrire aussi :

$$\mathrm{I}\,i < \mathrm{K}\,k.$$

Si on suppose $\lambda'' = \mathrm{P}_1\,\mathrm{Q}_1$, très petit, alors on reconnait que l'inégalité est toujours vérifiée ; on obtiendra donc une solution plus économique en augmentant le volume III ; on est conduit ainsi à élever la droite $\mathrm{N}_1\,\mathrm{R}_1$ jusqu'à ce que l'on ait :

$$\frac{p + p''}{2} = \frac{p' + p'''}{2} \text{ ou bien } \mathrm{I}\,i = \mathrm{K}\,k,$$

On pourra trouver la solution la plus économique par tâtonnements, en augmentant λ'' jusqu'à ce que cette égalité soit vérifiée ; mais dans certains cas particuliers, on peut trouver cette solution sans tâtonnements.

236. Cas d'un seul appareil pour les grandes distances λ, λ', λ'''. — On a alors $p = \alpha + \beta\,\lambda$, $p' = \alpha + \beta\,\lambda'$, $p''' = \alpha + \beta\,\lambda'''$, $p'' = \alpha'' + \beta''\,\lambda''$; l'égalité devient :

$$\alpha + \beta\lambda + \alpha'' + \beta''\lambda'' = 2\,\alpha + \beta\,(\lambda'' + \lambda''').$$

Or $\lambda = \lambda' + \lambda''' + \lambda''$, l'équation donne :

$$\lambda'' = \frac{\alpha - \alpha''}{\beta'' + \beta}.$$

Si le grand appareil est le camion, le transport du volume III se fera à la brouette, et on trouve : $\lambda'' = 14^{\mathrm{m}}$; si le grand appareil est le tombereau, le transport du volume III se fera à la brouette, et l'on trouve $\lambda'' = 54^{\mathrm{m}}$; si le grand appareil est le wagon, on trouve, en employant la brouette pour le volume III, une distance λ'' plus grande encore ; il convient d'employer le camion pour transporter une partie du volume III, on trouve alors, en admettant pour le wagon la formule $p = 0{,}39 + 0{,}00016\,\mathrm{D}$, $\lambda'' = 109^{\mathrm{m}}$.

237. Cas d'un véhicule pour les distances λ, λ', **d'un véhicule plus petit pour les distances** λ'' **et** λ'''. — On a alors :

$$\alpha + \beta\lambda + \alpha'' + \beta''\,\lambda'' = \alpha + \beta\lambda' + \alpha'' + \beta''\,\lambda'''$$

ou bien $\beta(\lambda - \lambda') + \beta''\lambda'' - \beta''\lambda''' = 0.$

Or, $\lambda = \lambda' + \lambda'' + \lambda'''$, on trouve entre λ'' et λ''' la relation :

$$\frac{\lambda''}{\lambda'''} = \frac{\beta'' - \beta}{\beta'' + \beta'''}.$$

On trouve : camion et brouette : $\frac{\lambda''}{\lambda'''} = \frac{2}{7}$; tombereau et brouette $\frac{\lambda''}{\lambda'''} = \frac{11}{19}$; tombereau et camion : $\frac{\lambda''}{\lambda'''} = \frac{13}{37}$; wagon et brouette $\frac{\lambda''}{\lambda'''} = \frac{434}{466}$; wagon et camion $\frac{\lambda''}{\lambda'''} = \frac{234}{266}$; wagon et tombereau $\frac{\lambda''}{\lambda'''} = \frac{104}{136}$.

238. Cas de trois appareils. — Si on emploie un appareil pour la distance λ, un autre appareil pour les distances λ' et λ''', un troisième pour la distance λ'', on a :

$$\alpha + \beta\lambda + \alpha'' + \beta''\lambda'' = 2\alpha' + \beta'(\lambda' + \lambda''').$$

Or, $\lambda' + \lambda''' = \lambda - \lambda''$, on trouve :

$$\lambda''(\beta'' + \beta') = 2\alpha' - \alpha - \alpha'' + \lambda(\beta' - \beta).$$

On trouvera λ'' et λ par tâtonnements.

239. Cas d'un tronçon à 5 points de passage ou plus. — Dans ce cas (fig. 99 bis) l'intégrale première présente plusieurs minimas ; on subdivise la surface limitée par cette courbe au moyen d'horizontales que l'on détermine par les considérations qui précèdent ; ainsi on tracera C C' de manière que le segment B B' satisfasse aux équations précédentes ; on tracera de même D D' ; on trouve alors aisément la distribution des terres.

240. Résumé. — Pour obtenir exactement le coût des transports pour la distribution la plus économique, on est encore amené à tracer l'intégrale seconde de la ligne représentant les surfaces transversales ; mais il faut subdiviser l'intégrale seconde d'après certaines règles que nous venons d'exposer et intégrer les différentes parties avec une base d'intégration qui convient à l'appareil employé et en tenant

compte des temps perdus. On pourra très facilement effectuer ces intégrations partielles, de telle sorte que les prix des transports s'ajoutent naturellement.

§ 3. Dépenses diverses.

241. Fouille et chargement. — Un ouvrier charge 15^{ms} en un jour, le chargement d'un mètre cube coûte $\frac{a}{15}$, si a est le prix de la journée d'ouvrier terrassier; soit T le temps employé à piocher un volume déterminé, t le temps employé à le charger, on dit que la terre est à $\frac{T}{t} + 1$ homme, et chaque mètre cube coûte $\frac{T+t}{t}\frac{a}{15}$; c'est par cette quantité qu'il faudra multiplier le volume de déblai, pour obtenir le coût de la fouille et du chargement. Cette multiplication s'effectue graphiquement sans la moindre difficulté.

242. Emprises. — On exécute le plan terrier (fig. 98), soit au moyen des profils en travers, soit au moyen des tableaux graphiques; pour évaluer les emprises, il suffit d'effectuer une intégration graphique; on emploie une ligne des pôles (46); on obtient un système d'arcs paraboliques déterminés par leurs tangentes extrêmes. Pour obtenir les parcelles, il faut intégrer également les lignes qui séparent les propriétés; ainsi AB, CD, EF, ED ont pour intégrales $A_1B_1C_1D_1E_1F_1E_1D'$; on obtient les surfaces des parcelles 1, 2, 3, 4, en B_1b_1, D_1d_1, E_1e_1, F_1f_1. En choisissant une base d'intégration convenable, on obtient directement le prix des parcelles. Les constructions deviennent un peu plus faciles lorsque l'on divise le plan terrier en deux parties par l'axe de la route.

243. Talutages, gazonnages. — On doit, pour évaluer ces dépenses, calculer les surfaces des talus; ces surfaces sont représentées en projection horizontale sur le plan terrier. Pour évaluer ces projections, il suffit de retrancher

de la surface totale des emprises, l'intégrale oX, relative à la plate-forme de la voie. Il faut multiplier la différence par le prix du mètre carré de talus divisé par le cosinus de l'angle du talus avec l'horizon. Lorsque les talus de déblai et de remblai sont inégalement inclinés sur l'horizon, il faut subdiviser le plan terrier en deux parties séparées par l'axe de la voie, sinon dans les profils qui ont à la fois un talus de déblai et un talus de remblai, on ajouterait des surfaces qui doivent être multipliées par des quantités différentes. Le multiplicateur diffère selon qu'il s'agit d'un talus de déblai ou de remblai.

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION GRAPHIQUE ET SES APPLICATIONS,

PAR

J. MASSAU,

Ingénieur des ponts et chaussées, à Gand.

LIVRE IV

APPLICATION A LA STABILITÉ DES CONSTRUCTIONS EN MAÇONNERIES.

(Extrait des *ANNALES DE L'ASSOCIATION DES INGÉNIEURS* sortis des Écoles spéciales de Gand.)

CHAPITRE I.

Généralités.

§ 1. Joints rectangulaires.

Rappelons brièvement les conditions d'équilibre d'un massif de maçonnerie; soit (fig. 105) AB un joint quelconque, il faut, pour que *l'équilibre statique* soit établi, que la résultante des forces qui sollicitent le bloc reposant sur la base AB,

tombe à l'intérieur de cette base, et forme avec la normale au joint un angle plus petit que l'angle du frottement (37°); il faut, pour satisfaire à *l'équilibre élastique*, que la pression maximum par centimètre carré ne dépasse pas une certaine limite.

244. Méthode du coefficient de stabilité. — Les petites constructions ne périssent pas par écrasement de la matière, mais par renversement; aussi calcule-t-on leurs dimensions en exprimant que ce renversement ne peut pas se produire. Un bloc de maçonnerie tel que celui qui repose sur le joint AB (fig. 105), est soumis à deux espèces d'action; certaines forces (poussée des terres, de l'eau, etc.) tendent à le faire tourner autour d'une arête A: leur moment autour de cette arête est le moment sollicitant; d'autres forces s'opposent à cette rotation; leur moment est le moment résistant; on s'impose la condition que le moment résistant soit égal à m fois le moment sollicitant dans le joint dangereux, c'est-à-dire dans celui pour lequel le rapport entre le moment résistant et le moment sollicitant est le plus petit; ce coefficient m s'appelle coefficient de stabilité; sa valeur résulte de l'appréciation des circonstances non prévues dans les calculs; elle est ordinairement égale à 2; dans les phares et cheminées, on la prend beaucoup plus élevée.

On peut, dans l'application de cette méthode, suivre deux procédés graphiques. En général on pourra considérer une partie de la construction (mur ou voûte) d'une longueur égale à l'unité, le plan de la figure étant le plan de symétrie de la partie considérée; les forces sollicitantes et résistantes seront représentées par les poids de certaines surfaces; elles s'obtiendront directement par une première intégration, si on tient compte des poids spécifiques dans la détermination des bases d'intégration (55); une seconde intégration donnera le moment sollicitant et le moment résistant (109). On peut aussi construire une ligne des résultantes auxiliaires ou effectives des forces qui sollicitent le bloc dont on vérifie la stabilité; on en déduira aisément (131) la force sollicitante totale S, la résistance totale R, la résultante T de toutes

ces actions. Par l'arête A autour de laquelle la rotation est à craindre, menons une droite Ax parallèle à S et qui sera coupée par R et T aux points r, t; nous allons montrer que le rapport entre le moment résistant et le moment sollicitant est égal à $\frac{Ar}{tr}$. En effet, prenons deux axes rectangulaires Ax et Ay; transportons les forces R et T en r et t et décomposons-les parallèlement aux axes Ax et Ay; les composantes R_x et T_x dirigées suivant l'axe des x ne donnent pas de moment autour du point A; les deux composantes R_y, T_y parallèles à l'axe des y sont égales, car T étant la résultante des forces R et S, on a $T_y = R_y + S_y$; or $S_y = o$, donc $T_y = R_y$. Le moment résistant est $R_y \times Ar$, le moment total est $T_y \times At = R_y \times At$; or le moment total est la somme algébrique du moment résistant et du moment sollicitant; le moment sollicitant est donc la différence des autres moments, il est égal à $R_y \times At - R_y \times Ar = -R_y \times tr$; sa valeur absolue est $R_y \times tr$; le rapport entre le moment résistant et le moment sollicitant est donc :

$$\frac{R_y \,.\, Ar}{R_y \,.\, tr} = \frac{Ar}{tr}.$$

Il faut en général que ce rapport soit égal à 2 dans la section dangereuse; il faut pour cela que le point t divise Ar en deux parties égales. Si l'on mène par le point A un axe quelconque coupant les forces S, R, T aux points S', R', T', on peut démontrer, en suivant la même marche que précédemment, que le rapport du moment résistant au moment sollicitant est égal à :

$$\frac{AR'}{AS'} : \frac{T'R'}{T'S'};$$

quand la sécante est parallèle à l'une des trois forces, ce rapport se ramène à celui de deux lignes; les deux autres, en devenant infinies, ont un rapport égal à 1. On peut aussi remarquer que R, S, T forment un faisceau de trois droites;

si on en trace une quatrième passant par A, on a un faisceau anharmonique ; le rapport anharmonique de ce faisceau

$$\frac{AR'}{AS'} : -\frac{T'R'}{T'S'}$$

est le rapport entre le moment sollicitant et le moment résistant pris avec le signe moins.

245. Méthode basée sur la stabilité élastique. — La résultante T (fig. 105) des forces qui sollicitent le bloc ABDE, peut se décomposer en une force N normale au joint et une force tangentielle ; la force normale N engendre des pressions sur le joint AB ; le point où elle est appliquée sur le joint AB est le centre des pressions ; si l'on représente par ordonnées les pressions par unité de surface, on admet que ces pressions aboutissent (fig. 106) à un plan tel que A'B' ; sur un élément de largeur mm' et de longueur 1, la pression totale sera $Mm \times mm' \times 1$ et se trouve dans le plan de symétrie ; elle peut être considérée comme le poids de la surface couverte de hachure ; il résulte de là que la force N peut être considérée comme le poids du trapèze AA'B'B, la direction de la verticale conventionnelle étant choisie perpendiculairement au joint AB. Connaissant la force N, on connaît la surface du trapèze AA'B'B qui est N et la verticale du centre de gravité, on trouvera A'B' par une construction connue 117) ; on obtient l'ordonnée moyenne II' par une division graphique $II' = \frac{N}{AB}$; on joint un point quelconque de N aux points e, e' qui divisent AB en trois parties égales, on détermine ainsi les points A'', B'' ; la droite A''B'' coupe AB au point O ; on obtient la loi des pressions A'B' en joignant le point O au point I' ; il faut pour que l'écrasement soit impossible, que la pression maxima AA' ne dépasse pas une certaine limite. On remarquera que les ordonnées de la droite A''B'' sont proportionnelles à celles de A'B', de sorte que l'on peut dire que la droite A''B'' représente aussi les pressions, mais à une échelle inconnue. Si le centre de pression se rapproche indéfiniment du point e, on peut, en conservant A''e, voir

aisément que le point B'' vient en B ; les pressions suivent la loi du triangle A''BA. Si le centre de pression passe au-delà du point e, la ligne A''B'' vient en A''B''', les pressions changent de signe au point O', mais comme on suppose que les maçonneries ne résistent pas à l'extension, on aura la loi du triangle sur une partie du joint. Dans le cas de la loi du triangle (fig. 107), on triple la longueur AC, on obtient la longueur AD sur laquelle la pression se répartit ; on divise la pression N par AD, on obtient la pression moyenne II' ; en joignant OI', on obtient toutes les pressions.

Lorsque l'on a calculé les dimensions d'une construction par la méthode du coefficient de stabilité, il est utile de vérifier si dans la section la plus fatiguée, la pression maxima ne dépasse pas la limite admise ; dans les petites constructions, les pressions sont insignifiantes ; dans les constructions importantes, au contraire, on peut être amené à augmenter les dimensions pour satisfaire à l'équilibre élastique. Les deux problèmes suivants peuvent donc être utiles à résoudre : 1° déterminer la pression maxima ; 2° déterminer les dimensions d'un joint pour que la pression maxima atteigne une limite donnée.

246. Pression maxima. — Dans le cas de la loi du triangle, on obtient la pression moyenne $II' = \frac{N}{AD}$ par une simple division graphique ; la pression maxima est 2II'. Dans le cas de la loi du trapèze, la construction que nous avons indiquée se complique lorsque l'axe neutre O sort des limites de l'épure. On arrive à une construction plus simple et qui n'a pas cet inconvénient en appliquant le théorème suivant : *si on joint les points* e, e' *qui divisent la largeur AB du joint en trois parties égales, à l'extrémité* Γ *de la pression moyenne, les droites* e'Γ *et* eΓ *déterminent sur la pression résultante CN des droites CH et CF, qui représentent la pression maxima et la pression minima.*

Pour démontrer que CF = BB', décomposons le trapèze ABB'A' en un rectangle ABB'R et un triangle RB'A' ; les poids de ces deux surfaces tombent en I et en e ; ces poids

sont représentés par les droites Ix et xI'; si on prend eI comme force auxiliaire, on trouve $yexB'$ comme ligne de résultantes; donc (130) les droites xB', eI' et N se coupent en un même point qui est F; donc aussi $FC = BB'$. Pour démontrer que $CH = AA'$ on décompose le trapèze $A.BB'A'$ en un rectangle $A'SBA$ et un triangle négatif $A'B'S$; on prend $e'I$ comme force auxiliaire, on trouve $y'e'x'A'$ comme ligne de résultantes, les droites $A'x'$, $e'I'$ et N se coupent en un même point qui est H; donc $HC = AA'$.

247. Autre construction. Formules. — Cherchons sur quelle longueur l' la pression maxima p devrait être appliquée uniformément pour produire la même pression totale N. On doit avoir :

$$p\,l' = N.$$

En joignant un point de N aux points ee', on obtient la loi des pressions $A''B''$ à une échelle indéterminée; donc la relation précédente devient :

$$AA'' \times l' = \text{Surf. } AA''B''B.$$

Prenons B comme pôle, BA comme base d'intégration, la surface du trapèze est représentée par II''; nous diviserons cette surface par AA'', en menant $I''K$ parallèlement à BA''; on a alors :

$$l' = IK.$$

On obtient alors la pression p à une échelle déterminée par une division graphique :

$$p = \frac{N}{l'}.$$

On peut aussi calculer la pression maxima; on trouve comme suit une formule plus simple que la formule généralement employée : prenons e' comme centre des moments et exprimons, que le moment de N est le moment du trapèze ou des deux triangles $A'B'B$ et $A'BA$ qui le composent; le premier triangle ayant un moment nul, on obtient :

$N\alpha' = \frac{pl}{2}\frac{l}{3}$, formule dans laquelle $\alpha' = Ce'$, $l = AB$; on en déduit :

$$p = \frac{6N\alpha'}{l^2}.$$

En prenant e comme centre des moments, on trouverait la pression minima :

$$p' = \frac{6N\alpha}{l^2},$$

formule dans laquelle $\alpha = Ce$. On reconnaît que les longueurs $\alpha = Ce$, $\alpha' = Ce'$ représentant à une certaine échelle les pressions aux extrémités B et A du joint. On peut aussi déduire de ces formules la construction du numéro précédent; ainsi, par exemple, de la valeur de p on déduit :

$$p : \frac{N}{l} = \alpha' : \frac{l}{6}$$

ou $$p : II'' = e'C : IC,$$

il résulte de là que $p = CH$.

248. Détermination de la largeur d'un joint. — On connaît la pression totale N, l'extrémité B, déterminer l'autre extrémité A du joint de manière que la pression maxima soit égale à une limite donnée R'.

Premier cas. Loi du triangle (fig. 107). — La pression N est le poids du triangle AA'D; prenons comme inconnue $a = AC$, on a :

$$N = \frac{AA' \times AD}{2} = \frac{R' \times 3a}{2} \quad \text{d'où} \quad a = \frac{2}{3}\frac{N}{R'}.$$

La longueur a s'obtient par une simple division graphique; mais si cette opération doit se reproduire souvent, on peut choisir l'échelle des forces de telle manière que $a = N$. Pour déterminer l'échelle des forces, on choisit une certaine longueur $a = 20^{ms}$ que l'on porte à l'échelle des longueurs; on a ainsi la droite qui représente une force connue $N = 30R'$; si, par exemple, R' représente une pression de 13 kil. par centimètre carré, on fera $R' = 130.000$, d'où $N = 3900$ tonnes;

sachant que la longueur $a = 20^{ms}$ représente 3900 tonnes, l'échelle des forces est déterminée. Si N est représenté à cette échelle particulière, on trouvera le point A en portant AC = N; en portant CD = 2N, on obtient l'axe neutre D; la partie DB du joint ne travaille pas; si CD est plus grand que CB, la loi du triangle ne convient pas; on emploie la méthode suivante.

Deuxième cas. Loi du trapèze. — Nous avons démontré la formule $p = \frac{6N\alpha'}{l^2}$, on a donc, en exprimant que $p = R'$:

$$R' = \frac{6N\alpha'}{l^2}.$$

Éliminons N en introduisant la longueur a calculée dans l'hypothèse de la loi du triangle, on a $N = \frac{R' \cdot 3a}{2}$; il vient :

$$l^2 = 9\,a\alpha'.$$

Prenons (fig 108) comme inconnue $z = \frac{AB}{3} = \frac{l}{3}$; on connaît $b = CB$; on a $\alpha' = b - z$; on a donc l'équation :

$$z^2 = a(b - z) \qquad \text{ou} \qquad z(a + z) = ab.$$

On déduit de là la construction suivante : portons $BK = a$, décrivons sur CK comme corde une circonférence de diamètre a, menons le diamètre BLM; $BL = z$. En effet, on a :

$$BL \times BM = BK \times BC \qquad \text{ou} \qquad BL \times (a + BL) = ab.$$

On reconnaîtrait que — BM est une solution négative qu'il faut rejeter.

Autre construction. — En résolvant l'équation en z, on obtient :

$$z + \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{a}{2}\left(2b + \frac{a}{2}\right)}.$$

Portons $BG = \frac{a}{2}$, construisons la moyenne proportionnelle $BF = \sqrt{\frac{a}{2}\left(2b + \frac{a}{2}\right)}$ en décrivant l'arc de cercle GF

du point C comme centre ; on aura $Ge' = BE$, cela détermine le point e' ; on porte ensuite $AB = 3Be'$.

249. Table graphique. — L'équation qui détermine la valeur de z peut se mettre sous la forme :

$$\frac{z}{a}\left(\frac{z}{a}+1\right)=\frac{b}{a}.$$

On connaît $\frac{b}{a}$, il faut trouver $\frac{z}{a}$; la valeur de $\frac{z}{a}$ peut s'obtenir immédiatement au moyen d'une table numérique ou graphique à une seule entrée ; donnons à $\frac{z}{a}$ les valeurs successives 0,5 0,6 ... 1,0 ; on trouve très facilement l'échelle des valeurs de $\frac{b}{a}$ portées sur l'axe OB (fig. 109) ; on obtient ainsi les longueurs $\frac{b}{a}$ relatives aux valeurs de $\frac{z}{a}$ indiquées sur chacun des points de division ; une échelle à divisions égales placée à gauche de l'axe OB permet de lire la valeur de $\frac{b}{a}$; ces deux échelles constituent la table graphique. Soit par exemple $\frac{b}{a} = 1{,}3$, on lit $\frac{z}{a} = 0{,}74$; en augmentant les dimensions et les divisions de cette échelle, on peut obtenir autant d'approximation que l'on veut. Il faut cependant remarquer que l'on ne supprime pas ainsi tout calcul, car il faut mesurer a et b, calculer $\frac{a}{b}$, calculer z. Pour supprimer tout calcul, il faut construire une table graphique donnant la longueur z, connaissant les longueurs a et b ; pour y arriver, portons l'échelle des $\frac{b}{a}$ en O'B' et sur la même droite l'échelle des $\frac{z}{a}$ en O''Z, O''O' étant deux points à une distance quelconque ; menons sur O'O'' deux perpendiculaires O'P et O''Q égales à l'unité et joignons les points P et Q aux points de division des échelles ; les droites correspondantes

de ces deux faisceaux se coupent sur une courbe facile à tracer. Cette figure construite sur un papier quadrillé constitue la table graphique.

Portons $PA = QA' = a$, $AM = b$; en suivant la droite PM, on trouve le point N; en suivant la droite QN, on trouve le point K; on a $z = KA'$.

Pour le démontrer, on remarquera que les faisceaux de droites qui convergent en P et Q constituent des tables de multiplication et de division (67, 68); on a : $O'B' = \frac{AM}{PA} = \frac{b}{a}$; la droite PN ayant pour correspondante QN, on a $O''H = \frac{z}{a}$; pour obtenir z, il faut multiplier $O''H$ par a, donc $z = A'K$

Autre table graphique. — L'équation en z peut être mise sous la forme :

$$z^2 + az = ab,$$

c'est un cas particulier de l'équation du numéro 206; on posera : $x = a$

$$y = ab \quad \text{ou} \quad y = bx$$

on aura $z^2 + xz = y$.

Les lignes des a, des b, des z sont des droites; l'axe des x est l'axe des a et celui des z, l'axe des b est parallèle à l'axe des y. Nous laissons au lecteur le soin de la construction qui ne présente aucune difficulté.

250. Courbe des plus grandes pressions totales que peut supporter un joint. — Soit (fig. 110) le joint AB; supposons en A une pression AA' égale à la pression limite R'; supposons différentes lois de pression A'1, A'2..., on obtient immédiatement les pressions moyennes sur l'axe IN, et les centres de pression en joignant A'e, et 1e', 2e', 3e', etc...; les pressions totales sont proportionnelles aux pressions moyennes et peuvent être représentées par les mêmes droites; si l'on porte ces droites en ordonnées sur les centres de pression correspondants, on obtient la courbe NM. Le point M correspond à la loi du triangle sur toute l'étendue du

joint; si l'on suppose la loi du triangle sur une partie du joint, la pression totale est donnée par la formule $N = R' \frac{3a}{2}$, a étant la distance du centre de pression au point A; en prenant a comme abscisse, N comme ordonnée, cette équation représente une ligne droite que l'on obtient en joignant AM. La ligne AMN donne les pressions maxima pour toutes les positions du centre de pression situées entre le milieu I et l'extrémité A; pour les positions situées entre le milieu I et l'autre extrémité B, on trouverait une ligne symétrique de la première et qu'il est inutile de tracer puisqu'en regardant le joint d'un côté convenable, on peut toujours supposer que le centre de pression est à gauche du milieu du joint.

La figure 110 s'applique à un joint rectangulaire de largeur quelconque et a une résistance quelconque des matériaux; car quels que soient ces éléments, on peut toujours représenter la largeur par AB et la pression maxima par AA': l'échelle des pressions et celle des longueurs se détermineront dans chaque cas, la première par la condition que AB représente une longueur connue, la seconde par la condition que la droite IN représente la pression totale $R' \times AB$ qui se produit dans le cas de la loi du rectangle. On peut aussi graduer les abscisses en prenant AB comme unité, les ordonnées en prenant IN comme unité; il faut retenir alors que l'unité d'abscisse vaut l, la largeur du joint, et que l'unité d'ordonnée vaut $R'l$. Soient par exemple: $l = 10^m$, $R' = 70.000$, AG (abscisse du centre de pression) $= 3^m$. On portera comme abscisse $\frac{3}{10} = 0{,}3$; si on lit $N = 0{,}44$, cela représente

$$N = 0{,}44 \times R' \times 10 = 308.000 \text{ kil.}$$

Ces multiplications et ces divisions peuvent être évitées au moyen de faisceaux de droites établis comme précédemment. On obtient le premier faisceau en joignant un point fixe aux divisions de AB; on porte en $a\,c\,b$ par une bande de papier, la largeur $a\,b$ du joint et le centre de pression c; la droite cC du faisceau détermine le point C; on obtient l'or-

donnée C R ou O Q. Le second faisceau s'obtient en portant les pressions sur l'axe O F et en prenant P O égal à l'unité de forces : P O = A A'; si on porte P D = R' l, on obtient N = R' l × O Q = D E. Le produit R' l lui-même peut s'obtenir par une table graphique. On peut aussi, au moyen de la figure 110, résoudre le problème suivant inverse de celui que nous venons de résoudre : connaissant la pression totale et le centre de pression, trouver la pression maxima R'; on obtient, en effet, comme précédemment N = R' l × O Q = D E; connaissant D E et O Q, on peut lire R' l = P D, d'où l'on trouve R'. Enfin on pourrait établir une table graphique analogue à celle de la figure 109; de la courbe A M N, on peut déduire l'échelle des valeurs de $\frac{N}{R' l}$ correspondantes aux valeurs de $\frac{a}{l}$ et on opérerait sur ces échelles comme nous avons opéré sur celles des $\frac{z}{a}$ et des $\frac{b}{a}$.

§ 2. Sections diverses. Cas où il y a un plan de symétrie.

Lorsque le massif de maçonnerie a une section quelconque, on admet encore que la pression normale se répartit suivant une loi plane, c'est-à-dire que les pressions par unité de surface représentées graphiquement aboutissent à un plan; ce plan coupe le plan de la section suivant une droite qui est l'axe neutre. Dans le cas d'un plan de symétrie, le centre de pression tombe sur l'axe de symétrie, l'axe neutre est perpendiculaire à cet axe; c'est ce cas que nous examinons tout d'abord.

251. Connaissant l'axe neutre, trouver le centre de pression. — Soit (fig. 111) la section A B représentée en élévation par une droite, représentée en plan en vraie grandeur. Soient : $o y$ l'axe neutre, x la distance à cet axe d'un élément $d\omega$, $p = m x$ la pression sur cet élément par

unité de surface, x_1 x_2 les distances à l'axe neutre du centre de gravité et du centre de pression; on obtient en prenant les moments par rapport à l'axe neutre les deux équations :

$$x_1 \int d\omega = \int x\, d\omega \qquad \text{d'où } x_1 = \frac{M}{\omega}$$

$$x_2 \int m x\, d\omega = \int m x^2 d\omega \qquad \text{d'où } x_2 = \frac{I}{M}$$

Nous désignons respectivement par ω, M, I, la surface de la section, le moment statique et le moment d'inertie de cette surface autour de l'axe neutre. De ces deux équations, en éliminant M et en remplaçant $\frac{I}{\omega}$ par R^2 le carré du rayon de gyration, on déduit :

$$x_1 x_2 = R^2.$$

Soient a, a' les distances au centre de gravité de l'axe neutre et du centre de pression, k le rayon de gyration autour d'un axe passant par le centre de gravité et mené parallèlement à l'axe neutre, l'équation précédente devient en remplaçant x_1 par a', x_2 par $a + a'$, R^2 par $a^2 + k^2$:

$$a\, a' = k^2.$$

Si on détermine le centre de gravité et le rayon de gyration k, le problème proposé revient à la construction d'une troisième proportionnelle ; mais il peut être préférable de trouver directement x_1, x_2 par les méthodes suivantes.

959. Tracés graphiques. Première méthode. — Prenons l'axe de symétrie $x\,o$ comme axes d'abscisses et effectuons trois intégrations successives de la section ; on prendra seulement la moitié supérieure de la section; on doublera les résultats en prenant une base d'intégration deux fois plus petite. On sait que la première intégration donne ω, la seconde M, la troisième $\frac{1}{2}$ I (104) ; ces trois lignes intégrales $a\,b\,d$, $a'\,b'\,d'$, $a''\,b''\,d''$ sont indéfinies vers la

droite, mais au-delà du point B, elles deviennent respectivement une parallèle $b\,d$ à l'axe des x, une droite inclinée $b'\,d'$, une parabole du second degré $b''\,d''$. Menons la tangente $d''\,\mathrm{R}$ à l'intégrale troisième au point qui correspond à l'axe neutre, portons $\mathrm{NI} = 2\,\mathrm{NR}$, le point C est le centre de pression. En effet $d''\,\mathrm{R}$ est l'intégrale de $y = \mathrm{M}$, donc $\overline{d''\mathrm{N}} = \mathrm{M} \times \overline{\mathrm{RN}}$, d'où $\overline{\mathrm{RN}} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{M}}$, d'où enfin :

$$x_2 = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{M}} = 2\,\overline{\mathrm{RN}} = \overline{\mathrm{NC}}.$$

La direction de la tangente $d''\mathrm{R}$ est donnée par le diagramme des inclinaisons de l'intégrale troisième; en doublant la base d'intégration, on obtiendrait directement la direction de la droite NC (1). Cette méthode est d'une grande généralité; ayant tracé les trois intégrales, on peut choisir à volonté différents axes neutres et trouver très rapidement le centre de pression correspondant. Lorsque l'axe neutre divise la section en deux parties, deux cas peuvent se présenter : 1° la matière ne résiste qu'à la compression; 2° la matière résiste à l'extension et à la compression. Dans le premier cas, les quantités M et $\frac{1}{2}$I se rapportent à la partie de la section qui est soumise à la compression; ce sont les ordonnées des intégrales deuxième et troisième situées sur l'axe neutre; la construction générale est applicable sans

---

(1) On remarquera que ces deux constructions reviennent à une division graphique : $\frac{\overline{d''\,\mathrm{N}}}{\mathrm{M}}$ ou $2\,\frac{\overline{d''\,\mathrm{N}}}{\mathrm{M}}$. On remarquera aussi que le point R détermine l'abscisse du centre de gravité de la surface ω' couverte par les ordonnées de l'intégrale première (111); on peut déduire de là une nouvelle démonstration de la relation $\overline{\mathrm{RN}} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{M}}$; en effet, si M' est le moment de la surface ω', on a :

$$\overline{\mathrm{RN}} = \frac{\mathrm{M}'}{\omega'} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{M}}$$

aucune modification. Dans le second cas, les quantités M et $\frac{1}{2}$ I se rapportent à toute la section : ce sont les ordonnées, situées sur l'axe neutre, des intégrales deuxième et troisième de la droite $y = \omega$.

Deuxième méthode. — Nous avons montré (108) que l'on peut calculer les moments de divers ordres des surfaces par une seule intégration ; appliquons cette méthode à la détermination de M et I. Soient x, y, les coordonnées d'un point du contour de la section ; construisons (70) les courbes :

$$y_1 = yx \qquad y_2 = yx^2$$

on aura :

$$\omega = \int y dx, \quad M = \int yx dx = \int y_1 dx, \quad I = \int yx^2 dx = \int y_2 dx.$$

On voit que ω, M, I sont les aires limitées par les courbes y, y_1, y_2.

La construction de ces courbes ne présentent aucune difficulté.

Troisième méthode. — Soit à chercher le centre de gravité de la section représentée figure 112, et le centre de pression conjugué à l'axe des x pris comme axe neutre ; nous aurons alors :

$$\omega = \int y\, dx \qquad M = \int \frac{y^2\, dx}{2} \qquad I = \int \frac{y^3}{3} dx.$$

Pour obtenir ω, on intègre en partant d'un point a du contour ; on suit ce contour aAbBdD EeFfG$g a$ jusqu'à ce que l'on soit revenu au point de départ ; on rencontre ainsi des $y\,dx$ positifs et négatifs, mais leur somme algébrique est ω ; on trouve l'intégrale A'B'D'E'F'G'H' ; donc :

$$\omega = A'H'.$$

Pour construire M et I, il suffirait de porter $y' = y^2$, $y'' = y^3$, pour tous les points du contour de la section ; on obtiendrait deux nouvelles surfaces qui ont pour valeur

2 M et 3 I ; on obtient en effet, en introduisant y' et y'' dans les valeurs de M et de I :

$$2\,M = \int y'\,dx \qquad 3\,I = \int y''\,dx.$$

Soit O α l'ordonnée d'un point du contour, P $o = \lambda$ une base d'intégration que nous prendrons comme unité de longueur, on sait que P α est la direction de l'intégrale au point correspondant. Menons $\alpha\,\alpha'$ perpendiculairement à P α, $\alpha'\,\alpha''$ perpendiculairement à $\alpha\,\alpha'$; on trouve aisément :

$$\overline{O\alpha}^2 = \lambda \times O\alpha' \qquad \overline{O\alpha'}^2 = O\alpha \times O\alpha''$$

d'où

$$O\alpha = \frac{y^2}{\lambda} \qquad O\alpha' = \frac{y^3}{\lambda^2}.$$

Comme λ est pris comme unité, on a :

$$y' = O\alpha' \qquad y'' = O\alpha''.$$

En opérant de même pour toutes les valeurs de y, on obtiendra l'échelle $O\alpha'\beta'\gamma'$ de toutes les valeurs de y', et l'échelle $O\alpha'\beta''\gamma''$... de toutes les valeurs de y''. Portons $OP' = \lambda$, joignons $P'\alpha'$, $P'\beta'$,... nous obtiendrons le diagramme des inclinaisons de l'intégrale de y', si l'on suppose que ce diagramme ait subit une rotation de 90° ; il suffira de mener les côtés A"B", B"D",... perpendiculairement aux rayons $P'\alpha'$, $P'\beta'$,... pour obtenir cette intégrale. De même en portant $OP'' = \lambda$, en joignant $P''\alpha''$, $P''\beta''$,... on obtient le diagramme des inclinaisons de l'intégrale de y'', si on suppose que ce diagramme ait subit une rotation de 180° ; il suffit de mener les côtés A'"B'", B'"D'"... parallèlement aux rayons $P''\alpha''$, $P''\beta''$,... pour obtenir cette intégrale. On trouve donc :

$$2\,M = A''\,H'$$
$$3\,I = A'''\,H'''.$$

Soient y_1, y_2 les ordonnées du centre de gravité et du centre de pression, on a :

$$y_1 = \frac{M}{\omega} = \frac{1}{2}\,\frac{A''\,H''}{A'\,H'}$$
$$y_2 = \frac{I}{M} = \frac{2}{3}\,\frac{A'''\,H'''}{A''\,H''}.$$

Portons (fig. 113) RO = A′ H′, OS = A″H″, OT = A‴ H‴, PO = λ, unité de longueur que nous avons admise. Si nous menons PU parallèlement à RS, on a, d'après la règle de la division (68), $OU = \frac{OS}{OR}$, donc :

$$y_1 = \frac{1}{2} OU.$$

Si nous menons PV perpendiculairement à ST, on a :

$$OV = \frac{OT}{OS}, \qquad y_2 = \frac{2}{3} OV.$$

En effet, pour diviser OT par OS, il faudrait, d'après la règle de la division, considérer ST comme l'intégrale d'un rectangle de base SO; si, par la pensée, on fait tourner ce rectangle de 90°, on reconnaît que OV est la dérivée de ST ou la hauteur du rectangle de surface OT, de base OS : ce qui démontre que OV est le quotient cherché.

253. Calcul des intégrales définies. — Les différentes méthodes que nous venons d'employer pour calculer les intégrales ω, M et I, nous amènent à donner quelques considérations sur l'application des procédés du livre II, chapitre III, au calcul de certaines intégrales définies (1). Toute intégrale définie peut, d'une infinité de manières, se mettre sous les formes $\int u\,dv$, $\int\int du\,dv$, v pouvant être choisi à volonté; si l'on porte v en abscisse, et en ordonnée les valeurs limites de u, on obtient (fig. 114) une courbe ABCD qui limite une aire dont la valeur est l'intégrale proposée. Il n'y a d'autres difficultés que de trouver des constructions élégantes pour obtenir u et v au moyen des variables en fonction desquelles ces quantités sont exprimées. La courbe ABCD étant tracée, on est ramené à une intégration; mais,

(1) Voir aussi *Méthode géométrique d'évaluation de certaines intégrales doubles*, par Ed. Collignon (1874).

comme nous l'avons fait remarquer, il n'est pas indispensable de tracer cette courbe pour procéder à l'intégration graphique; il suffit de porter en abscisse des valeurs de v suffisamment voisines sur un axe perpendiculaire, l'échelle des valeurs correspondantes de u; en joignant un pôle convenable aux différents points de cette échelle, on obtient le diagramme des inclinaisons de l'intégrale, sans avoir tracé la courbe primitive.

Si l'on a $u = \varphi(x)$ $v = \psi(x)$, les limites de l'intégration étant x_0 X, on construira les courbes $u = \varphi(x)$, $v = \Psi(x)$, et l'on prendra au moyen d'une bande de papier les échelles des valeurs de u et de v correspondantes à des valeurs de x, variant de x_0 à X. Si φ et ψ sont des fonctions entières, rationnelles, on trouvera graphiquement leurs valeurs (70 à 83).

Si $u = \varphi(y)$ $v = \psi(x)$, les limites des variables x et y doivent être unies par une équation, x et y sont les coordonnées d'une courbe qui doit être une donnée de la question. Dans ce cas, on construit encore les courbes $u = \varphi(y)$, $v = \psi(x)$; on prend sur la courbe des x, y, l'échelle des valeurs de y correspondantes à des valeurs de x que l'on se donne; on obtient alors les échelles des valeurs de u et de v par les courbes φ et ψ.

Si $u = \varphi(xy)$ $v = \psi(xy)$, on pourra dans les cas compliqués construire des tables graphiques des valeurs de u et v et obtenir alors rapidement les échelles des u et v. Dans les cas simples, on peut construire graphiquement u et v; ainsi (70, 73, 80) on construira aisément $u = x^m y^n$ ou $u(x - a)(x - a')\ldots (y - b)(y - b')\ldots$, et d'autres expressions algébriques.

Lorsque les variables u et v sont des fonctions rationnelles d'une variable, on peut en modifiant légèrement les constructions du livre II, construire très élégamment les échelles des valeurs u et v relatives à des valeurs données de x et y. Soit d'abord à construire :

$$u = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2}\ldots$$

nous avons vu (71) que l'on construit la courbe des u en construisant successivement a, $ax + b$, $(ax + b)x + c$, etc.

Portons (fig. 115) PA $= a$, PO $= 1$, OX $= x$, AA′ est égal à ax (67); portons ensuite PF $= ax + b$, FF′ $= (ax + b)x$; en continuant de la même manière on obtiendra la valeur de la fonction; mais on peut modifier la construction, portons BA $= b$, on aura BA′ $= ax + b$; au lieu de porter BA′ en PF, effectuons la même construction sur A′B; on prendra pour cela A′O′ $= 1$, O′X′ $= x$, BB′ $= (ax + b)x$, et si CB $= c$, on aura CB′ $= ax^2 + bx + c$; mais il est facile de voir que le triangle A′O′X′ a ses côtés perpendiculaires sur ceux du triangle POX, de sorte qu'il est inutile de porter AO′ $= 1$, O′X′ $= x$, il suffit de mener AB′ perpendiculairement sur PA′. On trouverait de même qu'en menant B′C′ perpendiculairement sur A′B′ et CD $= d$, on a : DC′ $= ax^3 + bx^2 + cx + d$. *En résumé, on porte des droites faisant entre elles des angles de* 90° : PA = a; AB = b, BC = c, CD = d, *etc.; on porte les valeurs de* x, *sur* ox, *on trace les rayons tels que* PA′ *et sur chacun d'eux on construit un polygone à angles droits* PA′B′C′ *ayant leurs sommets sur les prolongements des droites* PA, AB, BC, *etc...; en prenant* B, C, D *comme origine, on obtient sur ces droites les échelles des valeurs des fonctions.*

$$ax + b, \quad ax^2 + bx + c, \quad ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ (1).}$$

On veut construire

$$u = \frac{ax^m + bx^{m-1} + \ldots}{\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \ldots};$$

on construit successivement les échelles des valeurs du numérateur et du dénominateur; on dispose les constructions (fig. 116), de manière que ces échelles se placent en OA et OB sur deux droites perpendiculaires; alors u est l'inclinaison de la droite AB qui joint deux points correspondants de ces

(1) On peut déduire de là la méthode de Lill pour résoudre les équations; réciproquement de la méthode de Lill, on peut déduire la construction d'un polynome entier; il est réellement étonnant qu'aucun auteur n'ait fait cette remarque.

échelles; en prenant PO = 1, et en menant PC parallèlement à AB, QC = u. Si u est l'ordonnée de la ligne à intégrer, on a besoin uniquement de la direction PC, donc la figure PCO est inutile, AB est la direction de l'élément de l'intégrale.

En combinant ces constructions, on peut ainsi construire :

$$u = (\mathrm{F}y)^m (fx)^n \qquad \text{ou} \qquad u = \mathrm{F}(y^m x^n),$$

F, f étant des fonctions rationnelles.

On peut se proposer, par exemple, de déterminer le moment d'ordre n d'une surface; si on prend l'axe des moments comme axe des x, on a:

$$\mathrm{M}_n \iint y^n \, dx \, dy = \int xy^n \, dy.$$

Posons $xy^n dy = u dv$; on prendra par exemple $y^k dy = dv$, d'où

$$v = \frac{y^{k+1}}{k+1}, \qquad u = y^{n-k} x.$$

Il y a autant de solutions que de valeurs de k; en faisant $k = n$ on a la plus simple

$$u = x, \qquad v = \frac{y^{n+1}}{n+1};$$

en faisant $k = o$, on a

$$u = xy^n, \qquad v = y.$$

Cette dernière est la méthode du n° 108 dans laquelle on changerait $x - x'$ en y et y en x; c'est aussi la troisième méthode du numéro précédent.

254. Théorème. — Les droites A'e, B'e' (fig. 111) qui joignent les extrémités des pressions en A et B, aux centres de pression relatifs aux axes B et A, se coupent sur la pression résultante.

En effet, par hypothèse, le point e est le centre de pression relatif à l'axe B; donc, pour une loi de pression A'B, la pression résultante P passe par le point e; de même le point e est le centre de pression relatif à l'axe A; donc, pour une loi de pression AB', la pression résultante P' passe par le

point e'. Si ces deux lois de pression A'B et AB' existent simultanément, les pressions totales suivent encore une loi plane, car si on ajoute les ordonnées de deux plans, on obtient la somme de deux fonctions du premier degré, ce qui donne encore une fonction du premier degré. On voit sans peine que la loi des pressions totales sera A'B'; la pression cherchée est donc la résultante des deux forces P et P'; nous allons démontrer que A'ee'B' est une ligne des résultantes auxiliaires de ces deux forces. Nous pouvons toujours tracer une ligne des résultantes A''ee'B'' telle que $e''e'$ soit le côté intermédiaire : il suffit pour cela de prendre convenablement le pôle des résultantes auxiliaires. Si F est la résultante dirigée suivant le côté ee', on obtient, en prenant successivement A'' et B'' comme centres de moment, les équations :

$$F \times \overline{AA''} = P \times \overline{Ae}$$
$$F \times \overline{BB''} = P' \times \overline{Be'}$$

d'où
$$\frac{\overline{AA''}}{\overline{BB''}} = \frac{P \times \overline{Ae}}{P' \times \overline{Be'}}$$

Les deux termes de ce rapport sont les moments des forces P et P' autour des axes A et B; on peut les obtenir au moyen des pressions AA' et BB'. Soient z, $l-z$, les distances d'un élément $d\omega$ aux axes A et B; p, la pression en cet élément, dans l'hypothèse de la loi A'B; p' la pression au même point dans l'hypothèse de la loi AB'. On a :

$$p = \frac{\overline{AA'}}{l}\cdot(l-z) \qquad P \times \overline{Ae} = \int pz\,d\omega = \frac{\overline{AA'}}{l}\int z(l-z)\,d\omega$$

$$p' = \frac{\overline{BB'}}{l}z \qquad P' \times \overline{Be'} = \int p'(l-z)\,d\omega = \frac{\overline{BB'}}{l}\int z(l-z)\,d\omega$$

La valeur du rapport $\frac{\overline{AA''}}{\overline{BB''}}$ devient :

$$\frac{\overline{AA''}}{\overline{BB''}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}.$$

Mais on peut choisir la force auxiliaire suivant $A'e$, alors $AA'' = AA'$, donc $BB'' = BB'$; alors la ligne $A''ee'B''$ vient coïncider avec la ligne $A'ee'B'$; donc les lignes $A'e$ et $B'e'$ se coupent sur la pression résultante : ce qu'il fallait démontrer.

Ce raisonnement est vrai quels que soient les axes A et B, pourvu que les centres de pression soient calculés dans l'hypothèse où toute la section travaille, par extension comme par compression, s'il y a lieu. Nous avons supposé sur la figure que les axes A et B soient choisis aux extrémités de la section; le théorème a alors une grande analogie avec celui que nous avons démontré dans le cas d'un joint rectangulaire. Discutons comme dans ce dernier cas (25) l'influence de la position du centre de pression C. Si ce centre est dans l'étendue ee', on a la loi du trapèze, c'est-à-dire que les pressions sont toutes positives; si ce centre vient en e ou e', on a la loi du triangle $A'B$ ou AB'; si ce centre sort des limites ee', on trouve des extensions si la matière peut les supporter; sinon, on a la loi du triangle sur une partie de la section. L'étendue ee' est la longueur du *noyau central*; les points e, e' sont les extrémités de ce noyau.

255. Corollaire. — Soit G le centre de gravité de la section; choisissons, pour appliquer le théorème précédent, les axes neutres A, G; les centres de pression sont e' et un point à l'infini; donc $G'e'$ et la parallèle $A'E$ au joint, se coupent sur la pression résultante. Si on remplace l'axe A par l'axe B, on trouve que les droites $G'e$ et $B'F$ se coupent sur la pression résultante; on peut donc énoncer le théorème suivant généralisation du théorème du n° 246 : *en joignant les extrémités du noyau central à l'extrémité de la pression moyenne, les droites ainsi obtenues déterminent sur la direction de la pression résultante, les pressions extrêmes CE et CF.*

256. Courbe des valeurs limites de N. — Considérons d'abord les lois des pressions représentées (fig. 117) par les lignes $A'B'$, $A'1$, $A'2$, $A'3$, $A'B$, AA' représentant la pression limite; pour chacune d'elles on déterminera le centre de

pression par l'une ou l'autre des deux propositions précédentes. Ainsi supposons que l'on ait déterminé le centre de gravité G, et l'extrémité e' du noyau central, centre de pression relatif à l'axe A ; on trouvera tous les autres centres de pressions par le corollaire du numéro précédent, c'est-à-dire en joignant e' à l'extrémité de la pression moyenne : les droites ainsi obtenues coupent A'B' en un point de la pression résultante ; on obtient ainsi le point e relatif à l'axe B ; c'est l'une des extrémités du noyau central. Au lieu de porter en ordonnée la pression résultante N, nous pouvons porter la pression moyenne $\frac{N}{\omega}$; un changement d'échelles suffit pour que les ordonnées ainsi obtenues représentent N ; on obtient ainsi la courbe NM. En écrivant une équation de moment autour du point e', on obtient comme au numéro 247

$$N\alpha' = \frac{pl}{2} \times \frac{l}{3},$$

$\frac{N}{\omega}$ est l'ordonnée d'un point de la courbe MN, α' est l'abscisse du même point, si on prend e' comme origine ; cette équation est celle d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes. On trouverait de la même manière l'équation de la courbe NP pour les centres de pression compris entre G et e'. Pour ce qui concerne les lois du triangle sur une partie du joint, il faut appliquer la première méthode du n° 252 ; les autres méthodes exigent que l'on recommence toutes les opérations pour chaque axe neutre particulier. Les courbes MA et PB, qui complètent la solution du problème, sont des courbes d'une espèce qui dépend de la forme de la section du joint.

257. Calcul de la pression maxima. — On peut employer différentes méthodes ; la plus simple est celle qui consiste à appliquer le corollaire du numéro 255 ; on détermine la pression moyenne $\frac{N}{\omega}$ que l'on porte en ordonnée

au centre de gravité G (fig. 111) en GG'; on joint l'extrémité e' du noyau central au point G', cette droite détermine en CH la pression maxima cherchée. Cette méthode exige que l'on détermine au préalable les points G et e'; elle suppose que toute la section travaille; en menant la droite A'G', on reconnaîtra si l'axe neutre est en dehors de la section et si l'hypothèse est vraie, sinon on recourt à la méthode suivante. Si le centre de pression C (fig. 118) est en dehors du noyau central, on sait *a priori* que l'on aura la loi du triangle, si les matériaux ne résistent qu'à la compression; dans ce cas, il faut déterminer l'axe neutre par tâtonnements. Si on suppose deux axes neutres O', O'', on obtient par la méthode générale (252) les centres de pression C', C''; soit C le centre de pression donné; on porte en ordonnée les erreurs commises :

$$O'K' = CC' \qquad O''K'' = CC'';$$

en joignant K'K'', on détermine l'axe neutre O; si cette détermination n'est pas jugée suffisamment exacte, on détermine le centre conjugué à l'axe O, on porte de nouveau l'erreur commise en ordonnée, on trace plus exactement la courbe KK' et on obtient plus exactement l'axe neutre demandé. Ayant déterminé l'axe neutre, on a facilement la section ω' de la partie qui travaille, le centre de gravité G' de cette partie; on porte la pression moyenne $G'H' = \frac{N}{\omega'}$; en joignant OH', on obtient la pression maxima AA'.

Si on a eu soin de tracer au préalable la courbe des valeurs limites de $\frac{N}{\omega}$ pour une pression maxima AA' (fig. 117), on peut trouver immédiatement la pression maxima connaissant la pression résultante. On détermine la pression moyenne $\frac{N}{\omega}$; on peut toujours supposer que la pression nconnu soit représentée par AA' alors $\frac{N}{\omega}$ le sera par

CD, si C est le centre de pression donné; si on évalue CD = m en prenant AA′ comme unité, on aura :

$$\frac{N}{\omega} : p = CD : AA', \qquad \text{d'où } p = \frac{1}{m}\,\frac{N}{\omega}.$$

On peut aussi opérer graphiquement : soit $CD' = \frac{N}{\omega}$; il faut augmenter AA′ dans le rapport CD à C′D′, on obtient $p = AA''$.

§ 3. Sections quelconques.

958. Relation entre l'axe neutre et le centre de pression. — Si on conçoit que les pressions par unité de surface soient représentées géométriquement en tous les points de la surface pressée AB (fig. 119), on obtient un tronc de cylindre ABB′A′; attribuons à ce volume un poids spécifique égal à l'unité et prenons la surface AB comme plan horizontal conventionnel; le poids de l'élément de cylindre qui repose sur un élément de surface $d\omega$ est précisément $pd\omega$, valeur de la pression qui sollicite cet élément; pour composer les pressions, il suffit donc de composer les poids des éléments du tronc de cylindre; il résulte de là que la pression totale est le poids du tronc de cylindre ABB′A′ et que le centre de pression C est la projection du centre de gravité G de ce volume. Soit p_1 la pression au centre de gravité de la section, la pression totale est :

$$P = \int p\,d\omega = p_1\omega.$$

La pression moyenne $\frac{P}{\omega}$ est donc égale à la pression p_1 au centre de gravité.

Rappelons aussi les propriétés suivantes :

1° Si on plonge la section dans un liquide de telle manière que l'axe neutre soit à fleur d'eau, la loi des pressions est la même ou du moins les pressions varient dans le même rap-

port; donc le centre de pression est le même que dans le cas précédent.

2° Si on considère p comme la vitesse de la masse élémentaire $d\omega$, vitesse due à une rotation convenablement choisie autour de l'axe neutre, $pd\omega$ est la quantité de mouvement de la masse $d\omega$; la pression totale est donc la résultante des quantités de mouvement. Or, on sait (1) que la résultante des quantités de mouvement d'un système invariable est la percussion capable de produire l'état de mouvement; la pression totale est donc la percussion capable de produire les vitesses p; c'est par conséquent au centre de pression qu'il faudrait frapper la section pour lui communiquer une rotation autour de l'axe neutre sans que cet axe éprouve de percussion; en d'autres termes le centre de pression est le centre de percussion conjugué à l'axe neutre. Il est facile de voir que le raisonnement que nous venons de faire subsisterait encore si la surface pressée était hétérogène; on sait qu'alors il convient d'admettre la loi $p = E\delta$, E étant la raideur de la matière au point considéré, δ l'ordonnée d'un plan; la pression $pd\omega$ devient $E\delta d\omega$; on considérera δ comme une vitesse, $Ed\omega$ comme la masse de l'élément $d\omega$ et on continuera de la même manière. Quelquefois on rencontre des pressions assimilables à des forces isolées : telles sont par exemple les pressions sur les pieds d'une table; si ces pressions s'expriment par δm, $\delta' m'$..., δ, δ'... étant les ordonnées d'un plan, on considérera les coefficients m, m', comme des masses fictives et il y aura encore identité entre le centre de percussion et le centre de pression.

3° Si la section est supposée matérielle, pesante et mobile autour de l'axe neutre fixé dans une position horizontale,

---

(1) En vertu du principe de d'Alembert étendu aux percussions, il y a équilibre entre les percussions et les quantités de mouvement acquises prises en sens contraire. Dans le cas d'un solide soumis à une percussion, la résultante des quantités de mouvement acquises doit être équivalente à la percussion.

on obtient un pendule composé dont l'axe d'oscillation passe par le centre de pression. En effet, on peut considérer la pression p comme représentant, à une certaine échelle, l'accélération tangentielle de la masse $d\omega$, $p\,d\omega$ est la réaction d'inertie tangentielle; il doit y avoir équilibre dynamique entre ces réactions $p\,d\omega$ et le poids de la section; mais si on transporte toute la masse au centre C des forces $p\,d\omega$, on reconnaît que le moment des réactions et le moment du poids augmentent dans le même rapport $\frac{CD}{OD}$; donc l'équilibre dynamique existera encore; le point C se meut donc de la même manière, soit qu'il soit isolé en formant un pendule simple, soit qu'il soit invariablement lié au pendule composé; c'est donc un point de l'axe d'oscillation. On traiterait comme précédemment le cas d'une surface hétérogène.

M. Bresse a résolu d'une manière très élégante le problème de la détermination des centres de percussion en utilisant l'ellipse centrale d'inertie (1). Pour arriver à cette solution, nous rappellerons d'abord que l'ellipse centrale d'inertie s'obtient en portant sur les axes émergeant du centre de gravité O des rayons vecteurs inversement proportionnels au rayon de gyration; c'est-à-dire que l'on a :

$$\rho = \frac{\alpha}{\sqrt{I}} = \frac{\beta}{k}$$

formules dans lesquelles : I est le moment d'inertie autour d'un axe OH; k, le rayon de gyration correspondant; ρ, le rayon vecteur OH de l'ellipse centrale d'inertie; α, β des constantes. Si d est la distance à l'axe OH de l'extrémité F du diamètre conjugué à OH, on sait que, d'après un théorème d'Appolonius, le produit ρd est constant; la formule $\rho = \frac{\beta}{k}$ donne

$$k = \frac{\beta}{\rho} = \gamma d,$$

(1) Voir à ce sujet *la mécanique appliquée* de M. Bresse, *la résistance des matériaux* de M. Colligon, *la statique graphique* de M. Maurice Lévy.

γ étant une constante, c'est-à-dire que le rayon de gyration est proportionnel à la distance d; mais on peut supposer l'ellipse d'inertie tracée à une échelle convenable pour que γ soit égal à l'unité; alors le rayon de gyration est égal à la distance d; c'est cette ellipse d'inertie que nous supposerons tracée; alors on peut dire que dans le calcul du moment d'inertie autour d'un axe passant par le centre de gravité, on peut supposer toute la masse condensée à l'extrémité du diamètre conjugué. En appliquant cette propriété aux axes principaux, on reconnaît que chacun des demi-axes de l'ellipse centrale est égal au rayon de gyration de la surface autour de l'autre axe: cela donne le moyen de construire l'ellipse à l'échelle particulière que nous avons admise.

Soit à chercher le centre de pression conjugué à l'axe neutre ED; M. Bresse mène dans l'ellipse centrale d'inertie le diamètre OD conjugué à cet axe neutre, détermine le point C par l'équation :

$$OC \times OD = \overline{OF}^2 \qquad (1)$$

le point C est le centre cherché.

Pour le démontrer, soit :

$$p = \alpha x + \beta y + \gamma \qquad (2)$$

la pression en un point x, y du plan; le centre de pression x_1, y_1 s'obtient par les équations :

$$x_1 = \frac{\int p x d\omega}{\int p d\omega} \qquad y_1 = \frac{\int p y d\omega}{\int p d\omega} \qquad (3)$$

Remplaçons p par sa valeur, supposons que les axes principaux d'inertie soient pris comme axes coordonnés, remarquons qu'alors :

$\int x d\omega = \int y d\omega = \int xy d\omega = 0$, $\int x^2 d\omega = \omega a^2$, $\int y^2 d\omega = \omega b^2$, a, b étant les demi-axes de l'ellipse centrale d'inertie, on trouve :

$$x_1 = \frac{\alpha a^2}{\gamma} \qquad y_1 = \frac{\beta b^2}{\gamma}.$$

L'équation de l'axe neutre est évidemment :

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

Si on exprime $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$ au moyen de x_2 et de y_2, cette équation devient :

$$\frac{x x_2}{a^2} + \frac{y y_2}{b^2} + 1 = o. \qquad (4)$$

Soit x', y' le symétrique du centre de pression par rapport au centre de l'ellipse centrale d'inertie, on a :

$$x_2 = -x' \qquad y_2 = -y',$$

l'équation (4) devient :

$$\frac{x x'}{a^2} + \frac{y y'}{b^2} - 1 = o \qquad (5)$$

On reconnaît par cette équation que l'axe neutre est la polaire du point x', y'; donc le point x', y' est le pôle de l'axe neutre; on obtiendra ce point C' par la relation

$$OC' \times OD = \overline{OF}^2.$$

Quant au point cherché C, on l'obtiendra en portant $OC = OC'$, c'est-à-dire que l'on a aussi :

$$OC \times OD = \overline{OF}^2.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer (1). M. Bresse a proposé d'appeler antipôle d'une droite, le symétrique du pôle par rapport au centre; réciproquement la polaire du symétrique d'un point est l'antipolaire de ce point.

---

(1) On peut aussi déduire cette relation du théorème de Poinsot sur la rotation des corps. La pression P, étant considérée comme une percussion, produit la vitesse du centre de gravité $\frac{P}{M}$ et une rotation autour d'un axe conjugué dans l'ellipsoïde d'inertie au plan du moment de la percussion; cette rotation n est donnée par : $M k^2 n = P \times CO. \sin COH$. On obtient une rotation unique à une distance x du centre donnée par : $x n = \frac{P}{M}$; en éliminant n on trouve $x \times CO. \sin O = \overline{OF}^2 \sin^2 O$.

Si DE est cette rotation, on a $x = OD \sin O$, d'où $OD \times OC = \overline{OF}^2$.

Il résulte de l'équation (1) que les distances OD et OC sont réciproques; selon que le point C s'approche ou s'éloigne du centre O, l'axe neutre s'éloigne ou s'approche du même point. Si l'axe neutre enveloppe le contour de la section, le centre de pression décrit un contour qui est l'antipolaire réciproque du premier. Selon que le centre de pression se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur de ce contour, les pressions seront de même signe ou de signe contraire. L'aire limitée par ce contour est le *noyau central*.

259. Autre forme de la relation précédente. — Le centre de pression est le pôle de l'axe neutre relativement à une ellipse imaginaire que l'on obtient en multipliant les axes de l'ellipse centrale d'inertie par $\sqrt{-1}$.

En effet, l'équation (4) de l'axe neutre est l'équation de la polaire du point $x_1 y_1$ dans l'ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0.$$

Les demi-axes de cette ellipse sont $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$: c'est ce qu'il fallait démontrer.

En mettant le théorème de M. Bresse sous cette forme, nous reconnaissons immédiatement que les figures formées par un certain nombre d'axes neutres et celles formées par leurs centres de pression satisfont aux propriétés des figures polaires réciproques (1). La construction de l'ellipse centrale d'inertie est une opération assez longue; cette ellipse étant construite, la détermination du pôle ou de la polaire exige encore certaines opérations : aussi nous n'appliquerons pas la méthode de Bresse; nous déterminerons 3 pôles, l'un d'eux pouvant être le pôle de l'infini ou le centre de gravité; nous ferons voir qu'alors on peut, par la règle seulement, trouver le pôle d'une droite quelconque, ou la polaire d'un point quelconque.

---

(1) M. Bresse a reconnu ces propriétés ; il en a démontré les plus élémentaires ; l'idée de l'ellipse imaginaire rend ces démonstrations inutiles.

260. Détermination du centre de gravité et de deux centres de pression. — Les coordonnées du centre de gravité sont données par les formules :

$$x_1 = \frac{\int x d\omega}{\int d\omega} = \frac{M}{\omega},$$

$$y_1 = \frac{\int y d\omega}{\int d\omega} = \frac{N}{\omega}.$$

Si l'on choisit l'axe des y comme axe neutre, la pression en un point est $p = mx$; les coordonnées du centre de pression conjugué à l'axe des y sont donc :

$$x_2 = \frac{\int px d\omega}{\int p d\omega} = \frac{\int x^2 d\omega}{\int x d\omega} = \frac{I}{M},$$

$$y_2 = \frac{\int py d\omega}{\int p d\omega} = \frac{\int xy d\omega}{\int x d\omega} = \frac{J}{M}.$$

Si on choisit l'axe des x comme axe neutre, la pression en un point est $p = my$, les coordonnées x_3, y_3 du centre de pression sont :

$$x_3 = \frac{\int px d\omega}{\int p d\omega} = \frac{\int xy d\omega}{\int y d\omega} = \frac{J}{N},$$

$$y_3 = \frac{\int py d\omega}{\int p d\omega} = \frac{\int y^2 d\omega}{\int y d\omega} = \frac{K}{N}.$$

Les intégrales ω, M, N, I, J, K sont suffisamment définies par les équations qui précèdent; pour les obtenir, on construit les échelles des valeurs de x, x^2, x^3, y, y^2, y^3; on suit la méthode générale : si $An = x$ (fig. 120), on a $An' = x^2$, $An'' = x^3$; si $Am = y$; $Am' = y^2$, $Am'' = y^3$, chacune des intégrales s'obtient alors par une intégration graphique; on a en effet :

$$\omega = \iint dy dx$$

$$M = \frac{1}{2} \iint dy\, d\,.\,(x^2)$$

$$N = \frac{1}{2} \iint d\,(y^2)\,.\,dx$$

$$I = \frac{1}{3}\int\int d(x^3) \cdot dy$$

$$J = \frac{1}{4}\int\int d(x^3), d(y^4)$$

$$K = \frac{1}{3}\int\int d(y^3) \cdot dx.$$

Soit, par exemple, à trouver J, on portera x^3 en abscisse, y^4 en ordonnée; on intègre ensuite avec 4 pour base d'intégration; on aura $J = \frac{1}{4}\int\int d(x^3)\, d(y^4)$. Il est facile de voir qu'il est inutile de transporter les différentes échelles, on peut les conserver dans leur position; ainsi pour trouver J, on prendra Ax' comme axe des x^3, Ax comme axe des J, on voit aisément que $P''m'$ est la direction de l'élément de l'intégrale. Connaissant les six intégrales précédentes, on obtient les six coordonnées au moyen de division graphique.

On peut remarquer que les six coordonnées dépendent des rapports entre six quantités; il doit exister une relation entre ces six coordonnées; on trouve en effet :

$$\frac{y_2}{x_3} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{N}{M}.$$

De là cette propriété que nous retrouverons plus loin d'une autre manière : le point γ dont les coordonnées sont y_2, x_3, se trouve sur la droite AO qui joint l'origine au centre de gravité.

261. Problème I. — *Deux systèmes de points sont en involution sur une droite, construire le conjugué d'un point connaissant deux groupes de points conjugués.* Soient (fig. 121) A, a et B, b les deux groupes connus; soit à chercher le conjugué du point C. Menons deux droites OA, OB; tirons la sécante CA'B', joignons A'b, B'a qui se coupent en S; joignons SO, on obtient le conjugué du point C en c. En effet, supposons que le point C se déplace, la droite CB'A' restant, par exemple, parallèle à elle-même, le point c se déplace également et à chaque position du point C

correspond une position du point c et réciproquement. La relation entre ces deux points étant évidemment une relation algébrique, les différentes positions des points C et c forment deux systèmes de points homographiques.

Pour démontrer que cette homographie est la solution du problème, il suffit de faire voir qu'elle convient pour trois positions; on vérifie aisément qu'elle convient lorsque le point C vient en A, B, a ou b. La direction de la droite C B′ A′ étant quelconque, on trouve comme corollaire que si la droite C A′ tourne autour de C, le point S décrit la même droite Oc.

Cette construction peut se modifier de différentes manières; on peut supposer que les droites O A, O B deviennent parallèles, le point O se transportant à l'infini. Au lieu de faire la construction sur la droite C A B, on peut aussi la faire sur une perspective C′ B′ A′, ou sur une projection C P Q de cette droite, car la démonstration est encore applicable après ces modifications.

262. Problème II. — *Connaissant les centres de pression* a, b (fig. 121), *conjugués à deux droites* O A, O B, *trouver 1° le centre de pression conjugué à une droite* O C *passant par l'intersection des deux premières; 2° l'axe neutre conjugué à un centre de pression* c *situé sur la droite* a b.

Lorsque la droite O C tourne autour du point O, son pôle c décrit la droite ab; réciproquement si le point c se meut sur ab, sa polaire tourne autour du point O; démontrons d'abord que les points C et c sont en involution. En effet, à un point c correspond une seule droite O C, et à une droite O C correspond un seul point c; la relation qui unit les deux points, étant évidemment une relation algébrique, doit être du premier degré; il y a réciprocité, car si le point C vient en c, on doit chercher le pôle de Oc; ce pôle est le point C, intersection des polaires des points O et c de la droite Oc. Donc C et c sont en involution. On est donc ramené au problème précédent : on connaît deux groupes A, a et B, b d'une

involution, trouver le conjugué du point C ou celui du point c. On applique la construction précédente en se servant naturellement des droites déjà tracées OA et OB. Si on représente sur un plan vertical de projection CQ la loi des pressions par la trace CQ' du plan des extrémités de ces pressions, on pourra effectuer la construction sur ce plan vertical, en utilisant la trace CQ'; on joint à cet effet $Q'p$ et $P'q$; ces droites se coupent en un point que l'on projette sur ab; on obtient le pôle cherché c. Cette construction est la généralisation du théorème du numéro 254.

263. Corollaires. — 1° Le pôle d de la droite A'B' doit se trouver sur la droite Oc polaire du point C, donc le triangle OA'B' et son réciproque abd sont homologiques (1), l'axe d'homologie est la polaire du point S.

2° Si le point C se transporte à l'infini, la droite Oc devient la polaire d'un point à l'infini; donc elle devient la droite OO' qui passe par le pôle de l'infini O'; si l'on suppose que la droite CA'B' reste parallèle à elle-même, les points A'B' se transporte aussi à l'infini; les droites aS, bS deviennent des parallèles $a\gamma$, $b\gamma$ aux droites OB et OA; de là on déduit la propriété suivante: connaissant les pôles a et b de deux droites OA et OB, on mène par a une parallèle à OB, par b une parallèle à OA, ces deux droites se coupent sur la droite qui joint le point O au pôle O' de l'infini. Cette propriété est la généralisation de celle que nous avons déjà reconnue pour le cas de deux axes rectangulaires (260).

264. Problème III. — *Connaissant les pôles* a, b *de deux droites parallèles AA', BB' (fig. 122), trouver le pôle d'une troisième droite CC' parallèle aux deux autres; réciproquement trouver la polaire d'un point* c *de la droite* a b.

---

(1) Deux triangles sont homologiques quand les droites qui joignent les sommets correspondants se coupent en un même point; les côtés correspondants se coupent sur une droite qui est l'axe d'homologie.

Ce problème est un cas particulier du précédent; il suffit de supposer que le point O de la figure 121 se transporte à l'infini ; la même construction s'applique sans aucune modification ; on mène CB'A', on joint A'b, B'a qui se coupent en S ; par ce point S on mène une parallèle Sc aux droites données ; le point c est le pôle cherché.

Le problème inverse : trouver la polaire CC' d'un point c, se résout par la construction inverse : on mène cS, par S on trace Sa, Sb qui déterminent B' et A' ; on joint A'B' qui coupe AB au point C ; la polaire demandée est CC'. Comme la relation C et c est réciproque, on peut appliquer la construction directe au point c, et la construction inverse au point C. On remarquera que la droite $a\,b$ est la polaire de l'intersection des droites AA', BB' ; cette intersection est à l'infini ; la droite $a\,b$ passe donc par le pôle de l'infini.

265. Problème IV. — *Connaissant le pôle* a *d'une droite AA' et le pôle de l'infini I, trouver le pôle d'une droite quelconque CC' parallèle à la première (fig. 122) ou réciproquement trouver la polaire d'un point* c *situé sur* a*I.*

Ce problème est un cas particulier du précédent ; il suffit du supposer que la droite BB' se transporte à l'infini pour que le pôle connu devienne I ; menons CA', joignons A'I, et par a menons une parallèle à CA' ; ces deux droites se coupent en un point T par lequel on mène une parallèle Tc à la droite donnée, on obtient le pôle c demandé.

On arrive à une autre construction en considérant II' comme polaire d'un point à l'infini ; on joint I'a, on mène A'H parallèlement à AC, par le point de rencontre H de ces deux droites, on mène une parallèle Hc à la droite donnée, le point c est le pôle cherché.

Le problème inverse se résout par la construction inverse ; mais, comme dans le problème précédent, on peut appliquer la construction directe au point c, la construction inverse au point C.

267. Problème V. — *Connaissant les pôles* a, b, c *(fig. 123) de trois droites BC, CA, AB, trouver : 1° le pôle d'une droite quelconque, 2° la polaire d'un point quelconque.*

Soit D E la droite donnée que nous considérons comme faisant partie de la figure abc ; le pôle cherché est l'intersection des polaires des points D et E de cette droite ; si on choisit ces deux points sur les côtés du triangle abc, on sera ramené au problème II (262). On mène la droite DA ; on tire B'b, Aa qui se coupent en un point que l'on joint au point C ; la droite Cd ainsi obtenue est la polaire du point D. On trouve de même la polaire Bd du point E. Ces deux polaires se coupent au pôle cherché. Pour trouver la polaire du point d, on joint les pôles des droites dC et dB.

268. Problème VI. — *Connaissant les pôles de deux droites et le pôle de l'infini, trouver le pôle d'une droite quelconque et la polaire d'un point quelconque.*

Soient (fig. 121) : a, b, les pôles des droites OA et OB ; O' le pôle de l'infini ; proposons-nous de chercher le pôle d'une droite quelconque A'B'. Cette droite A'B' coupe les droites O'a, O'b prolongées aux points A'' et B'' dont on peut trouver les polaires par la méthode du numéro 265. Ainsi pour trouver la polaire du point B'', on se sert de la droite déjà tracée B''B', on joint B'O', on mène $b\beta$ parallèlement à B''B', βy est la polaire du point B'' ; on trouve de même la polaire du point A'' en menant A'O', αz et αx ; les deux polaires βy et αx se coupent au pôle d de la droite A'B'.

Réciproquement soit à chercher la polaire d'un point quelconque d ; par ce point on mène deux droites xd, yd parallèles aux droites OA et OB ; on en cherche les pôles par la construction du numéro 265 (problème inverse). Ainsi pour avoir le pôle de la droite yd, on joint un point M de cette droite aux pôles O' et b ; la droite MO' coupe en N la polaire de b, la droite Mb coupe à l'infini la polaire du point O' ; on mène NB'' parallèlement à Mb ; on obtient sur O'b, le pôle B'' de yd. On obtient de même le pôle A'' de xd. Ces deux pôles déterminent la polaire A''B'' du point d.

269. Applications. — Le problème à résoudre est ordinairement le suivant : connaissant la pression totale sur un joint, déterminer les pressions en chaque point et notamment la pression maxima. Pour résoudre ce problème, on détermine l'axe neutre par l'une des méthodes précédentes, on calcule la pression moyenne $\frac{N}{\omega}$ qui est la pression au centre de gravité ; le plan qui limite les droites qui représentent les pressions, est alors complètement déterminé par l'axe neutre et l'extrémité de la pression moyenne.

Soit (fig. 119) C le centre de pression, ED l'axe neutre ; prenons un plan de projection perpendiculaire à l'axe neutre, la loi des pressions est représentée par une droite EA' que l'on obtiendra en portant au-dessus du centre de gravité de la surface $II' = \frac{N}{\omega}$ et en joignant EI' ; on obtient alors les pressions maxima et minima AA' et BB'.

Pour déterminer l'axe neutre, connaissant le centre de pression, on peut appliquer la méthode de M. Bresse qui suppose tracée l'ellipse centrale d'inertie, ou bien déterminer comme au numéro 258 le centre de gravité et deux autres centres de pression. On reconnaît aisément qu'il faut précisément le même nombre d'intégrales pour déterminer ces trois derniers points, ou pour déterminer l'ellipse centrale d'inertie ; mais lorsque les coefficients de cette ellipse sont trouvés, il faut encore certaines opérations pour trouver la polaire d'un point donné ; ce sont ces opérations que nous remplaçons (268) par une construction fondée sur l'emploi de la règle. Lorsque la section a une forme géométrique, nous verrons que presque toujours on peut trouver le centre de gravité et deux centres de pression directement sans aucune intégration.

Il nous reste à examiner le cas où l'axe neutre traverse la section ; on obtient alors des extensions et des compressions ; dans les maçonneries, les extensions ne peuvent pas se produire, l'axe neutre déterminé par la méthode précédente ne convient pas, l'axe neutre véritable ne peut s'ob-

tenir que par des calculs impraticables; on peut le déterminer par tâtonnements de la manière suivante. Si l'on se donne l'axe neutre, on connaît exactement la partie de la section qui travaille, on trouvera le centre de pression par quelques intégrations graphiques (260). On choisit trois axes neutres BD, DA, AB (fig. 124) qui donnent trois centres de pression a, b, d aussi rapprochés que possible du centre de pression connu c; on joint cd qui coupe ab en e. On obtient approximativement l'axe conjugué au point e, par une interpolation entre les axes conjugués aux points a et b; on prendra, par exemple, $\frac{AE}{EB} = \frac{ae}{eb}$. On interpole de même entre les axes conjugués aux points e et d pour obtenir l'axe conjugué au point donné c. Si cette première détermination ne donne pas assez d'exactitude, on peut réduire l'erreur par une nouvelle opération; on détermine le centre de pression conjugué à la droite obtenue; puis, profitant des points déjà connus, on cherche deux autres centres très rapprochés du centre donné. On conçoit que par des opérations successives, on puisse obtenir autant d'exactitude qu'on le désire.

270. Triangle. — *1er cas.* — L'un des côtés est l'axe neutre. Soit le triangle ABC (fig. 125); si BC est l'axe neutre, la pression totale est le poids d'un tétraèdre représenté en élévation par HDF, on trouve aisément que ce poids tombe au milieu b de la médiane AI.

2e cas. — L'axe neutre est la droite AA′ menée par un des sommets parallèlement au côté opposé. La pression totale est le poids d'un tétraèdre représenté en élévation en DEF; on trouve aisément que le centre de pression a est aux trois quarts de la médiane AI à partir du sommet.

3e cas. — L'axe neutre est une droite KK′ parallèle à l'un des côtés BC. On applique la construction du n° 264; on mène une droite K′A′B′, on joint A′b, B′a; par le point de rencontre d'', on mène une parallèle à BC, qui détermine le centre de pression d. On peut aussi effectuer cette construction sur l'élévation; soit HE la loi des pressions, joignons Hb' Ea' qui se coupent en d' que nous rapportons en d sur

la médiane. Le problème inverse se résout par la construction inverse.

Cas général. — Déterminons le centre de gravité du triangle et les centres de pressions conjugués à deux côtés du triangle; on peut alors résoudre le problème général (268). On peut évidemment trouver une grande variété de construction en se servant d'autres centres de pression obtenus par les constructions précédentes.

271. Parallélogramme. — *1er cas.* — L'axe neutre est l'un des côtés du parallélogramme. Soit (fig. 126) ABCD le parallélogramme; si AD est l'axe neutre, la pression résultante est le poids d'un prisme représenté en élévation par EHF; ce poids tombe aux deux tiers du diamètre IL. On trouve de même les centres de pression *b*, *c*, *d* conjugués aux trois autres côtés; le parallélogramme *abcd* est le noyau central.

2e cas.— Trouver le centre de pression conjugué à un axe parallèle à l'un des côtés; réciproquement trouver l'axe neutre conjugué à un centre situé sur un diamètre du parallélogramme. Soit KK' l'axe neutre donné; on mène K'GH, on joint G*b'*, H*a'* et, par l'intersection de ces deux lignes, une parallèle à KK' qui détermine le centre *k*. Si on donne le centre *k*, on obtient l'axe neutre KK' par la construction inverse. On obtient d'autres solutions de ces problèmes, en utilisant le centre de gravité du parallélogramme.

Cas général. — Trouver le centre de pression conjugué à un axe neutre donné; réciproquement trouver l'axe neutre conjugué à un centre donné. L'axe neutre donné coupe les deux diamètres du parallélogramme en deux points dont on cherche les polaires par la construction précédente; ces polaires se coupent au point demandé. Si on donne le centre de pression, on mène par ce centre deux parallèles aux diamètres du parallélogramme; on cherche les pôles de ces deux droites par la construction précédente; l'axe cherché passe par ces deux pôles.

272. Trapèze. — *1er cas.* — Lorsque l'axe est à l'infini, le centre de pression est le centre de gravité que l'on trouve par des méthodes connues.

2e cas. — L'une des bases est l'axe neutre. Soient (fig. 127): ABCD le trapèze, AD l'axe neutre. La pression totale est le poids d'un prisme triangulaire dont EFG est la coupe. Le centre de gravité du prisme se trouve dans le plan diamétral IL; cherchons sa position en projection sur EF. Lorsque EFG est considéré comme la section du prisme, l'axe neutre est SS'; on obtient le centre de gravité de ce prisme au moyen de la construction du second cas du numéro 270. On divise EF en deux parties égales par le point γ, on joint Hγ; on divise γF en deux parties égales par le point α, on joint Gα; les droites Hγ et Gα se coupent sur la ligne projetante du centre cherché, que l'on obtient en a. On obtient de même le point b, centre de pression conjugué à la base BC.

3e cas. — Axe neutre parallèle aux bases. On peut obtenir le centre de pression conjugué à un axe parallèle aux bases, ou réciproquement l'axe neutre conjugué à un centre situé sur IL par les constructions des numéros 264 et 265; on peut se servir des points a, b, ou de l'un de ces points et du centre de gravité. Ainsi, par exemple, s'il s'agit de trouver le centre de pression conjugué à l'axe SS', on se sert de la droite SHG, on joint Hb' et Ga'; ces droites se coupent sur la droite $s's$ qui détermine le centre de pression s. La droite $s's$ est la polaire de S; tout axe passant par S, a son pôle sur ss'.

4e cas. — L'axe neutre est l'un des côtés non parallèles CD. Il résulte de la remarque que nous venons de faire que le centre de pression est sur la droite $s's$. Mais, d'autre part, le problème revient à chercher le poids d'un tronc de pyramide de sommet S et de base triangulaire; le centre de gravité est sur la droite qui joint le sommet S au centre de gravité de l'une des bases; on voit aisément que cette droite se projette en Sc sur la droite qui joint le sommet S au tiers de CB; cela détermine le pôle cherché c. On trouve de même le point d conjugué à l'axe AB. On obtient ainsi le noyau central $adbc$.

Cas général. — Le cas général donne lieu à une grande variété de construction puisqu'on peut se servir de trois centres de pression connus; on peut choisir parmi les quatre points a, b, c, d et le centre de gravité. On peut aussi employer la méthode suivante : l'axe neutre donné coupe les droites SL et ss' en deux points dont on cherche les polaires; ces polaires se coupent au centre cherché. Si on donne le centre de pression, on mène par ce centre une parallèle aux bases du trapèze, et une droite passant par le sommet S; on cherche les pôles de ces deux droites; l'axe neutre cherché est la droite qui passe par ces deux points.

273. Quadrilatère. — *1er cas.* — L'axe neutre est à l'infini. Le centre de pression est le centre de gravité.

2e cas. — L'axe neutre est l'une des diagonales. Soient : ABCD le quadrilatère; BD l'axe neutre. Les pressions sur le triangle BDC se composent en une résultante qui est le poids d'un tétraèdre; les pressions sur le triangle ADB sont de sens contraire et se composent aussi en une résultante qui est le poids d'un tétraèdre; ces deux poids sont appliqués aux milieux E et F des médianes AI et CI; ils sont entre eux comme $\overline{OC}^3 : \overline{OA}^3$ ou comme $\overline{KF}^3 : \overline{KE}^3$. On déterminera le centre de pression a par la condition :

$$\overline{aE} : \overline{aF} = \overline{KF}^2 : \overline{KE}^2$$

Soient mKM une perpendiculaire à BD, Kn = Km, MN une perpendiculaire sur Mn, on trouve :

$$\frac{\overline{KF}^2}{\overline{KE}^2} = \frac{\overline{KM}^2}{\overline{Kn}^2} = \frac{\overline{KN}}{\overline{Kn}}.$$

Portons ES = KN, TS = Kn; la parallèle Sa à TF détermine le centre de pression a.

Autre construction. — Prenons un plan vertical de projection perpendiculaire à BD; les deux points à composer peuvent être considérés comme les poids de deux triangles O'P'p', O'Q'q', si on porte $O'p' = \frac{3}{2}$ O'E', O'$q' = \frac{3}{2}$ O'F'. Ces deux

triangles constituent dans un sens algébrique, la surface du trapèze comprise entre la droite P'Q' et la ligne de terre; en joignant les points P', Q' aux points qui divisent la droite pq en trois parties égales, on obtient deux droites qui se coupent en a'' sur la projetante passant par le point a.

274. Polygone. — Pour une loi de pression déterminée, on en est amené à chercher le centre de gravité d'un tronc de prisme; on peut le diviser en prismes triangulaires ou même en tétraèdres. Il faut de cette manière chercher le centre de pression, pour deux axes neutres et déterminer le centre de gravité du polygone; on peut alors résoudre tous les autres problèmes.

275. Principe de la superposition des lois planes. — Supposons qu'une surface soit sollicitée par des pressions données par la formule

$$p = \alpha x + \beta y + \gamma$$

dans laquelle x, y sont les coordonnées d'un point, p la pression par unité de surface (ou par unité de masse, si l'on attribue aux éléments de la surface une densité conventionnelle). Comme les pressions p peuvent être représentées par les ordonnées d'un plan, on peut dire qu'elles obéissent à une *loi plane*. Supposons que simultanément des pressions soumises à différentes lois planes :

$$p = \alpha x + \beta y + \gamma$$
$$p' = \alpha' x + \beta' y + \gamma', \text{ etc.},$$

on aura en chaque point des pressions qui suivront aussi une loi plane :

$$\Sigma p = x\Sigma\alpha + y\Sigma\beta + \Sigma\gamma.$$

La pression totale s'obtiendra en composant les pressions résultantes dues à chacune des lois planes. Si on connaît (fig. 129) les centres de pression a, b, c, conjugués à trois axes neutres BC, AC, AB, on peut en appliquant ce principe trouver la pression résultante pour une loi plane quelconque. Soient h, h', h'' les pressions en A, B, C; on réalisera ces pressions en supposant les trois lois de pressions suivantes :

1° pression h en A, l'axe neutre étant BC ; 2° pression h' en B, l'axe neutre étant AC; 3° pression h'' en C, l'axe neutre étant AB. On est ainsi ramené à la composition de trois forces appliquées en a, b, c; ces forces ont pour valeurs la section multipliée par les pressions partielles au centre de gravité; ainsi par exemple la force appliquée au point a est égale à $\omega \times h \frac{GG'}{AA'}$, si AA' et GG' sont les distances à l'axe neutre BC du point A et du centre de gravité G : cela résulte de ce que les pressions en deux points sont entre elles comme les distances à l'axe neutre.

Réciproquement si on donne la pression résultante, on la décomposera en trois forces appliquées aux trois centres de pression a, b, c; pour chacune des composantes, on trouvera une loi de pressions ; on obtiendra les pressions cherchées en superposant ces trois lois. Ainsi la pression en A sera, si P' est la force appliquée en A :

$$h = \frac{P'}{\omega \times \overline{GG'}} \cdot \overline{AA'}.$$

On trouvera de même les pressions aux deux points B et C. On peut aussi utiliser la composition des rotations en considérant les pressions comme des vitesses linéaires, les axes neutres comme des axes de rotations ; aussi la force P' produit une rotation n autour de BC dont la valeur est donnée par l'équation :

$$P' = \omega \times n \times \overline{GG'}.$$

On est amené à composer trois rotations analogues à n pour obtenir la rotation résultante dont l'axe est l'axe neutre cherché. On peut se proposer comme exercice de démontrer par la composition des rotations les théorèmes des numéros 261 à 268.

276. Triangle. — Prenons successivement les trois côtés du triangle comme axes neutres ; nous savons déjà (270) que les centres de pression tombent aux milieux des médianes; les trois forces sont les poids de trois tétraèdres de même

base; elles sont donc proportionnelles aux hauteurs $h\,h'h''$; on obtient donc le centre de pression en composant les pressions aux sommets du triangle transportées aux milieux des médianes.

277. Parallélogramme. — *1re solution.* — Soient (fig. 126) le parallélogramme ABCD; ω, sa surface; h, h', h'', h''', les pressions aux sommets A, B, C, D. Si nous prenons d'abord un axe neutre à l'infini, nous obtiendrons sur toute la surface une pression uniforme que nous désignerons par x; la pression résultante est appliquée au centre du parallélogramme et a pour valeur ωx. Prenons ensuite le côté AB comme axe neutre et supposons une pression y sur le côté DC; la pression résultante est le poids d'un prisme triangulaire, elle a pour valeur $\omega \frac{y}{2}$ et est appliquée en d au tiers du diamètre NM. Prenons de même le côté AD comme axe neutre et supposons une pression z sur le côté BC, nous obtiendrons une pression résultante $\omega \frac{z}{2}$ appliquée en a au tiers du diamètre IL. Déterminons x, y, z de manière que ces trois lois de pressions produisent la loi proposée; pour y arriver, posons :

Pression en A	$x = h$
» » B	$x + z = h'$
» » C	$x + y + z = h''$
» » D	$x + y = h'''$

On tire des trois premières :

$$x = h \qquad z = h' - h \qquad y = h'' - h'.$$

La dernière conduit à la relation :

$$h + h'' = h''' + h',$$

relation qui doit exister entre les quatre presseurs h, h', h'', h''' si elles obéissent à une loi plane. Les trois forces qu'il s'agit de composer et qui sont appliquées en O, a, d, sont donc proportionnelles à h, $\frac{h' - h}{2}$, $\frac{h'' - h'}{2} = \frac{h''' - h}{2}$.

2e solution. — Prenons comme axes neutres les quatre côtés du parallélogramme; en prenant le côté AD comme axe neutre et une pression x sur le côté opposé, on obtient une pression résultante $\frac{\omega}{2}x$ au point a, ou deux forces $\frac{\omega}{4}x$ aux tiers B' et C' des diagonales; en opérant de même pour les quatre côtés DA, AB, BC, CD, en adoptant les pressions x, y, z, u sur les côtés opposés, on obtiendra quatre forces aux tiers des diagonales A', B', C', D'. La force au point C' sera $\frac{\omega}{4}(x+y)$; mais la pression en C est $x+y$, donc $x+y=h''$; la force appliquée en C' est donc $\frac{\omega h''}{4}$. On obtient de même les trois autres forces; en supprimant le facteur commun $\frac{\omega}{4}$, on est amené à composer des poids h, $h,'$ h'', h''' appliqués aux tiers des diagonales.

278. Quadrilatère. — Soient (fig. 128) ABCD le quadrilatère, h, h', h'', h''', les pressions aux sommets A, B, C, D. Divisons le quadrilatère en deux triangles de surfaces $\omega = \text{ABC}$, $\omega' = \text{ADC}$; les pressions sur le triangle ABC se composent en trois forces qui sont les poids de trois tétraèdres ayant pour base commune ω et pour hauteurs respectives h, h', h''; le poids de chacun de ces tétraèdres peut se remplacer par quatre poids égaux au quart de chacun d'eux appliqués en leurs sommets; on obtient ainsi les trois forces suivantes :

en A $\quad \frac{\omega}{12}(2h+h'+h'') = \frac{\omega}{12}(\Sigma h + h - h''')$

en B $\quad \frac{\omega}{12}(h+2h'+h'') = \frac{\omega}{12}(\Sigma h + h' - h''')$

en C $\quad \frac{\omega}{12}(h+h'+2h'') = \frac{\omega}{12}(\Sigma h + h'' - h''')$.

Les pressions sur le triangle ACD se composent de la même manière en 3 forces qui sont :

en A $\quad \frac{\omega'}{12}(\Sigma h + h - h')$

en C $\qquad \frac{\omega'}{12}(\Sigma h + h'' - h')$

en D $\qquad \frac{\omega'}{12}(\Sigma h + h''' - h').$

On trouve en composant les deux forces appliquées en A et les deux forces appliquée en C, les quatre forces suivantes :

en A $\qquad F = \frac{\omega + \omega'}{12}(\Sigma h + h) - \frac{\omega' h' + \omega h''}{12}$

en B $\qquad F' = \frac{\omega}{12}\Sigma h + \frac{\omega(h' - h''')}{12}$

en C $\qquad F'' = \frac{\omega + \omega'}{12}(\Sigma h + h'') - \frac{\omega h'' + \omega' h'}{12}$

en D $\qquad F''' = \frac{\omega'}{12}\Sigma h + \frac{\omega'(h''' - h')}{12}.$

Transformons ces expressions en introduisant la section totale $\Omega = \omega + \omega'$; remarquons que les triangles ABC et ACD ont même base AC et que leurs hauteurs sont entre elles comme les droites OB et OD ; on a donc :

$$\frac{\omega}{OB} = \frac{\omega'}{OD}.$$

D'autre part, si on appelle η la pression au point O, on a :

$$\frac{OB}{\eta - h'} = \frac{OD}{h''' - \eta}.$$

On a donc :

$$\frac{\omega}{\eta - h'} = \frac{\omega'}{h''' - \eta} = \frac{\omega + \omega'}{h''' - h'}.$$

On tire de là :

$$\omega(h' - h''') = \Omega(h' - \eta)$$
$$\omega'(h''' - h') = \Omega(h''' - \eta)$$
$$\omega h' + \omega'' h'' = \Omega\eta.$$

Les valeurs des quatre forces à composer deviennent :

$$F = \frac{\Omega}{12}\Sigma h + \frac{\Omega}{12}(h - \eta)$$

$$F' = \frac{\omega}{12}\Sigma h + \frac{\Omega}{12}(h' - \eta)$$

$$F'' = \frac{\Omega}{12}\Sigma h + \frac{\Omega}{12}(h'' - \eta)$$

$$F''' = \frac{\omega'}{12}\Sigma h + \frac{\Omega}{12}(h''' - \eta)$$

Si on examine les valeurs de F, F', F'', F''', on s'aperçoit que si la pression était uniforme et égale à $\frac{\Sigma h}{4}$, les premiers termes resteraient les mêmes, les seconds termes s'annuleraient; donc les premiers termes représentent quatre forces qui se composent en une force unique égale au poids d'un prisme de base Ω et de hauteur $\frac{\Sigma h}{4}$; ce poids $\frac{\Omega}{4}\Sigma h$ est appliqué au centre de gravité du quadrilatère. Il reste alors à composer cette force avec quatre forces appliquées aux sommets et représentées par les seconds termes. Supprimons dans l'expression de ces cinq forces le facteur commun Ω, on est ramené à composer les forces suivantes :

1° $\frac{\Sigma h}{4}$ au centre de gravité du quadrilatère;

2° $\frac{h - \eta}{12}$, $\frac{h' - \eta}{12}$, $\frac{h'' - \eta}{12}$, $\frac{h''' - \eta}{12}$ aux quatre sommets du quadrilatère.

Autre construction. — On peut aussi obtenir le centre de pression en composant deux forces : 1° une force $\frac{\Sigma h}{3}$ appliquée au centre des pressions h, h', h'', h''', rapprochées du centre de gravité du quadrilatère de manière à ce que leurs distances à ce centre soient le quart de leurs valeurs primitives; 2° une force $\frac{-\eta}{3}$ au centre des moyennes distances des quatre sommets du quadrilatère.

En effet, reprenons le résultat précédent et composons les forces $\frac{\Sigma h}{4}$, $\frac{h}{12}$, $\frac{h'}{12}$, $\frac{h''}{12}$, $\frac{h'''}{12}$ d'une part, et les forces $\frac{-\eta}{12}$,

d'autre part. Les forces $\frac{h}{12}$, $\frac{h'}{12}$, $\frac{h''}{12}$, $\frac{h'''}{12}$ donnent une résultante $\frac{\Sigma h}{12}$ que l'on compose avec $\frac{\Sigma h}{4}$ en divisant la droite qui joint leurs centres en quatre parties égales; on doit ainsi rapprocher le centre des pressions h, h', h'', h''' du centre de gravité, de telle manière que la distance de ces deux points soit quatre fois plus petite que la distance primitive; on arrive au même résultat en rapprochant les pressions h, h', h'', h''' dans le même rapport avant de les composer; la résultante appliquée au point que l'on obtient ainsi a pour valeur $\frac{\Sigma h}{4} + \frac{\Sigma h}{12} = \frac{\Sigma h}{3}$. Les quatre forces $\frac{-\eta}{12}$ aux 4 sommets se composent en une force $\frac{-\eta}{3}$ appliquée au centre des moyennes distances des 4 sommets. Il reste à composer les forces $\frac{\Sigma h}{3}$ et $\frac{-\eta}{3}$, ce qu'il fallait démontrer.

279. Des sections d'égale inertie. — Si on transforme une section en une autre de même surface (ou de même masse) et de même ellipse centrale d'inertie, les relations entre les pressions résultantes et les pressions en chaque point ne seront pas changées; ces sections peuvent être appelées sections d'égale inertie, car on reconnaît aisément que les moments d'inertie autour d'un axe quelconque sont égaux. Si pour trois axes neutres, les centres de pression sont les mêmes pour deux surfaces équivalentes ou de même masse, ces surfaces sont d'égale inertie; en effet, il résulte du problème du numéro 267 que tous les autres centres de pression et le centre de gravité coïncident pour ces deux surfaces. Pour une même loi de pression, la pression moyenne est la même et par suite la pression totale qui est égale à la pression moyenne multipliée par la surface ou la masse, est aussi la même et appliquée au même point pour les deux sections. Il résulte de là que quelque compliquée que soit la forme de la surface pressée, on peut toujours y substituer une forme plus simple pour déterminer les relations entre les axes

neutres et les centres de pression. Nous allons donner deux exemples de cette transformation.

1er exemple. — Transformation d'une section en trois points. Soient (fig. 130) a le pôle de la droite bc; b un point quelconque cette droite, ca sa polaire; alors ab sera aussi la polaire de c; le triangle possède alors la propriété d'être lui-même sa figure réciproque: ce triangle est dit autopolaire. Considérons la section ω comme une section matérielle de densité 1; décomposons la masse ω en 3 masses ω', ω'', ω''' appliquées en a, b, c de telle manière que le centre de gravité ne soit pas déplacé; il est facile de voir que nous aurons ainsi transformé la surface en 3 points de même inertie. En effet, pour chacun des axes ab, bc, ca, les centres de pression sont évidemment conservés. Si on demande le centre de pression pour une loi de pression qui donne h' h'' h''' aux points a, b, c, on considérera 3 axes neutres bc, ca, ab et respectivement les pressions h', h'', h''' sur les sommets opposés; on obtiendra trois forces $\omega' h'$, $\omega'' h''$, $\omega''' h'''$; en composant ces trois forces, on obtiendra la pression résultante demandée. Réciproquement si on donne cette pression résultante, on la décompose en trois forces P', P'', P''' appliquées en a, b, c; la première produit une pression h' en a donnée par la formule $P' = \omega' h'$; d'où $h' = \frac{P'}{\omega'}$; de même les deux autres produisent en b et en c des pressions $h'' = \frac{P''}{\omega''}$, $h''' = \frac{P'''}{\omega'''}$; en superposant ces lois de pression, on obtient les pressions cherchées.

Si le triangle autopolaire est choisi de telle manière que le centre de gravité O de la surface soit aussi le centre de gravité du triangle, les masses ω' ω'' ω''' sont égales à $\frac{\omega}{3}$; les forces à composer sont proportionnelles aux pressions h', h'', h'''. Pour obtenir un pareil triangle, on commencera par déterminer le pôle A d'une droite BC telle que AO = 2 OI; on obtient AO et OI par les équations :

$$AO \times OI = ao \times oi = c^2$$

ρ étant le rayon de l'ellipse centrale d'inertie dirigé suivant OA; si on a AO = 2OI, on tire

$$AO = \rho\sqrt{2}, \qquad OI = \frac{\rho}{\sqrt{2}}.$$

La valeur de AO montre que le triangle est inscrit dans une ellipse semblable et concentrique à l'ellipse centrale d'inertie; la valeur de OI montre que ce triangle est circonscrit à une autre ellipse semblable et concentrique aux deux précédentes. Ces trois ellipses peuvent être considérées comme les projections de trois circonférences concentriques de rayons a, $a\sqrt{2}$, $\frac{a}{\sqrt{2}}$, a désignant le demi-axe de l'ellipse centrale d'inertie. Le triangle dont il s'agit est la projection d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon $a\sqrt{2}$ et circonscrit au cercle de rayon $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Deuxième exemple. — Transformation en un triangle. Il s'agit de déterminer (fig. 131) un triangle ABC dont le réciproque a, b, c ait pour sommets les milieux des médianes du premier triangle. Si on attribue à ce triangle la même masse ω qu'à la surface donnée, le triangle sera un triangle de même inertie que la surface donnée. En effet pour les trois axes neutres AB, BC, CA, les centres de pression sont conservés. On doit avoir :

$$aO \times OI = \rho^2, \qquad aO = \frac{OI}{2},$$

d'où : $$OI = \rho\sqrt{2}, \qquad AO = 2\rho\sqrt{2}.$$

En raisonnant comme précédemment, on reconnaît que le triangle cherché est la projection d'un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon $2a\sqrt{2}$, l'ellipse centrale d'inertie étant la projection d'une circonférence de rayon a concentrique au précédent.

§ 4. Digression sur quelques centres de gravité.

280. Tronc de prisme ou de cylindre. — On sait que le plan diamétral d'un volume homogène contient le centre de gravité de ce volume; or, dans un tronc de cylindre les deux plans de troncature forment une surface du second degré ayant un plan diamétral passant par l'intersection des deux plans (on peut démontrer géométriquement cette propriété). Ce plan diamétral détermine dans le cylindre une section médiane; sur un élément $d\omega$, on peut construire un filet cylindrique droit ou oblique, le poids de ce cylindre peut être assimilé à une pression exercée sur l'élément $d\omega$; cette pression est évidemment l'ordonnée d'un plan; elle est généralement oblique, mais on peut la rendre normale sans changer le centre de gravité qui devient alors le centre de pression conjugué à l'intersection des plans de troncature par rapport à la section médiane.

Tout ce que nous avons dit des centres de pression s'applique à la recherche du centre de gravité d'un tronc de cylindre. Lorsqu'il s'agit simplement d'obtenir la génératrice passant par le centre de gravité, alors il est inutile de considérer la section médiane; on peut effectuer les constructions dans une des troncatures ou même dans une section quelconque; lorsque cette section contient l'intersection des plans de troncature, cette intersection est l'axe neutre, sinon c'est la projection de cette intersection par un plan projetant parallèle aux génératrices. Ce qui précède s'applique aussi au centre de gravité de la surface cylindrique ou prismatique et même dans le cas du prisme au centre de gravité des arêtes: dans le premier cas, la section que l'on doit considérer est le contour ou le périmètre de la section médiane; dans le second cas c'est un système de points de même masse.

281. Surface ou volume de révolution. — Considérons le volume engendré par une surface située dans un plan qui tourne autour d'un axe de révolution; le volume élémen-

taire engendré par une rotation angulaire $d\Theta$, peut être assimilé à un tronc de cylindre; ce volume est $\pi\omega ds$, si π est le poids spécifique, ω la section, ds le chemin décrit par le centre de gravité de la section; le centre de gravité de ce volume élémentaire est le centre de pression conjugué à l'axe de révolution pris comme axe neutre; on peut considérer le poids du volume élémentaire comme le poids de l'arc élémentaire ds' décrit par ce centre de pression, en attribuant à cet arc un certain poids spécifique π'; soient x_1, x_2 les distances du centre de gravité et du centre de pression de la section à l'axe de révolution, R le rayon de gyration de la section autour de l'axe de révolution, k le rayon de gyration autour d'un axe mené par le centre de gravité de la section parallèlement à l'axe de révolution; on a :

$$\pi\omega ds = \pi' ds',$$

$$\frac{ds}{ds'} = \frac{x_1}{x_2},$$

d'où

$$\pi' = \pi\omega \frac{x_1}{x_2}.$$

On a aussi $x_2 x_1 = R^2 = k^2 + x_1^2$; la valeur de π' devient :

$$\pi' = \pi\omega \frac{x_1^2}{R} = \pi\omega \frac{x_1^2}{x_1^2 + k^2}.$$

Il résulte de là que le centre de gravité du volume engendré par la rotation d'une section plane autour d'un axe situé dans son plan, est identique avec le centre de gravité de l'arc décrit par le centre de pression conjugué à l'axe de révolution.

Le même raisonnement s'applique au centre de gravité de la surface de révolution engendrée par une courbe située dans un plan qui tourne autour d'un axe de ce plan; mais alors le centre de pression doit être déterminé en considérant la courbe et non la surface qu'elle limite.

282. Troncs de prismes particuliers. — On obtiendra le centre de gravité des troncs de prismes à base triangle, rectangle, trapèze, quadrilatère, polygone, au moyen des

constructions précédentes (270 à 274); ces constructions doivent être faites dans la section diamétrale. On peut aussi ramener la question à la composition de certaines forces (275 à 279); on arrive aux énoncés suivants :

Le centre de gravité d'un prisme triangulaire est le centre de gravité des arêtes parallèles transportées au milieu des médianes de la section diamétrale.

Le centre de gravité d'un tronc de parallélipipède est le centre de gravité des arêtes parallèles transportées au tiers des diagonales de la section diamétrale (1).

Si l'on mène deux plans à égale distance des faces parallèles d'un tronc de parallélipipède, si l'on cherche les centres de gravité des sections faites par ces deux plans, si par ces points on mène dans la section diamétrale des parallèles à ces deux plans, ces parallèles se coupent au centre de gravité du parallélipipède. Cette règle se déduit immédiatement du tracé du numéro 266, 3°.

Si h, h', h'', h''' sont les arêtes d'un tronc de prisme à 4 faces, si η est la parallèle aux arêtes qui joint les points de rencontre des diagonales des faces de troncatures, on obtient le centre de gravité du tronc de prisme en composant une force $\Sigma \frac{h}{4}$ appliquée au centre de gravité de la section diamétrale avec les forces $\frac{h-\eta}{3}$ $\frac{h'-\eta}{3}$ $\frac{h''-\eta}{3}$ $\frac{h'''-\eta}{3}$ appliquées au sommet de cette section. On obtient aussi ce centre de gravité en appliquant le poids $\Sigma \frac{h}{3}$ au centre de gravité des arêtes, rapprochées au préalable du centre de gravité de la section diamétrale, de manière à ce que leurs distances à ce centre soit le quart de leurs valeurs primitives; on compose ce poids avec la force $\frac{-\eta}{3}$ appliquée au centre

(1) Voyez une note de M. Mister sur le centre de gravité du tronc de prisme triangulaire et du parallélipipède tronqué (Mathésis, juin 1884).

des moyennes distances des sommets de la section diamétrale; le centre de ces deux forces est le centre de gravité cherché.

283. Trapèze. — On sait que dans le cas d'un joint rectangulaire (245) la pression totale est le poids d'un trapèze à base verticale; en appliquant le théorème du numéro 254, on arrive à 12 constructions très élégantes qui déterminent la verticale du centre de gravité d'un pareil trapèze. Soient (fig. 132) le trapèze A B B'A'; C, D les points qui divisent A B en trois parties égales; E le milieu de A B. A l'axe neutre A correspond le centre D, à l'axe neutre B correspond le centre C; joignons A'C et B'D; ces droites se coupent sur le poids résultant du trapèze; on retrouve ainsi une construction que nous avons déjà trouvée autrement (115). Mais on sait que le centre de pression et l'axe neutre sont réciproques; si, par exemple, nous prenons D comme axe neutre, A est le centre de pression, les droites D'C et B'A se coupent sur le poids résultant. De même si on prend A et C comme axes neutres, on obtient les droites A'B et C'D; si on prend C et D comme axes neutres, on obtient les droites A C' et B D'; en résumé, la considération des centres C et D nous fournit quatre systèmes de droites se coupant sur le poids résultant. Si nous supposons l'axe neutre à l'infini, le centre de pression est le point milieu E de A B; en raisonnant sur les centres E et D comme nous l'avons fait sur les centres C et D, on trouve aussi quatre systèmes de droites; si X est le conjugué du point E, c'est-à-dire le point de A B situé à l'infini, si X' est le point de A'B' situé à l'infini, ces quatre systèmes de droites sont :

X'D et A'E, E'D et A'X, D'E et X'A, E'A et E'X.

Enfin la considération des points C et E donnent les systèmes :

X'C et B'E, E'C et B'X, C'E et X'B, E'B et C'X.

Pour obtenir le centre de gravité d'un trapèze quelconque, on choisit une verticale conventionnelle parallèle aux bases, on applique l'une des douze constructions qui précèdent, on

obtient une droite que coupe la droite qui joint les milieux des bases du trapèze au centre de gravité cherché.

284. Volume compris entre deux bases parallèles. — Prenons un plan des yz parallèle aux bases et proposons-nous de chercher l'abscisse du centre de gravité du volume donné.

Soit ad l'axe des x, la section transversale du volume par un plan parallèle aux bases à une surface ω qui s'exprime par une certaine fonction de x; on peut représenter (fig. 133) cette fonction par une courbe AED tracée dans un plan quelconque mené par l'axe des x; il est facile de voir que l'abscisse du centre de gravité cherché est aussi l'abscisse du centre de gravité de la surface ABba. En effet, la formule générale qui donne l'abscisse du centre de gravité d'un corps est :

$$x_1 = \frac{\int dpx}{\int dp};$$

si on considère deux sections x et $x + dx$, on trouve dans le volume et dans la surface deux poids élémentaires égaux ou proportionnels ; la valeur de x_1 est la même dans les deux cas. Lorsque la surface ω s'exprime par une fonction entière de x, on peut trouver graphiquement l'abscisse x_1 par une double intégration exacte; dans les autres cas, on en emploie une construction approximative. Il est utile de considérer les deux cas particuliers suivants.

Cas particuliers. — 1° ω est une fonction du premier degré. On est ramené à déterminer l'abscisse du centre de gravité d'un trapèze ADad; on l'obtient par l'une des constructions du numéro précédent.

2° ω est une fonction du second degré. La courbe AED est une parabole que l'on détermine par trois points ; il suffit pour cela de déterminer les deux bases ω_0, ω_2 et la section ω_1 à égale distance des bases, et de porter :

$$\omega_0 = Aa, \qquad \omega_1 = E\beta, \qquad \omega_2 = Dd.$$

On obtient les tangentes extrêmes AB et DB en utilisant une propriété de la parabole; soit C le milieu de AB, on prend EB = EC. On peut alors effectuer deux intégrations graphiques successives par la méthode générale (69).

On peut aussi déduire de là certaines constructions particulières ; si dans la première intégration, on prend $\frac{ad}{3}$ comme base d'intégration, on obtient A' B' C' D' comme première intégrale ; si on projette les points A', B', C', D' en α', β', γ', δ' sur l'axe du diagramme des inclinaisons de l'intégrale seconde, on reconnaît facilement que :

$$\alpha'\beta' = A\alpha \quad \beta'\gamma' = B\beta \quad \gamma'\delta' = Dd.$$

Prenons $\frac{ad}{4}$ comme base de la seconde intégration et choisissons le pôle P' sur une perpendiculaire élevée sur le milieu de $\beta'\gamma'$, on obtient A'' α β'' γ D'' comme intégrale. En effet les directions P' β' et P' γ' sont par constructions symétriques par rapport à P' O' ; menons le premier côté A'' α par le point α ; le second côté $\alpha\beta''$ doit être parallèle à P β' ; il est facile de voir que le troisième côté coïncidera avec $\beta''\gamma$, car si les angles $\beta\alpha\beta''$ et β' P O sont égaux, il en est de même de leurs symétriques $\beta\gamma\beta''$ et O' P' γ', ce qui exige que les droites $\beta''\gamma$ et P' γ' sont parallèles. De ce que P' O' $= a\alpha = \gamma d$, on tire :

$$A''a = O'\alpha' = Aa + \frac{B\beta}{2}, \quad D''d = O'\delta' = Dd + \frac{B\beta}{2}.$$

De là résulte la construction suivante :

Portons $AA'' = DD'' = \frac{B\beta}{2}$, joignons A'' et D'' aux points α et γ qui divisent ad en quatre parties égales, les droites A'' α et D'' γ se coupent en un point qui a même abscisse que le centre de gravité cherché.

On peut aussi déduire de ce qui précède le théorème suivant : l'abscisse du centre de gravité du volume donné est la même :

1° Que celle du centre des trois forces : ω_0 en α, $\omega' = B\beta$ en β, ω_2 en γ ;
2° " " " " : ω_0 en a, $4\omega_1$ en β, ω_2 en d ;
3° Que celle de deux forces : $\frac{\omega_0}{2} + \omega_1$ en a, $\frac{\omega_2}{2} + \omega_1$ en d.

En effet, le polygone A'' $\alpha\beta''\gamma$ D'' peut être considéré comme la ligne des résultantes auxiliaires de trois forces :

$\alpha'\beta' = \omega_0$, $B'\gamma' = \omega'$, $\gamma'\delta' = \omega_2$ appliqués respectivement en α, β, γ : cela démontre la première partie du théorème. Mais on peut exprimer ω' au moyen de ω_1, on a :

$$BE = EC \quad \text{ou} \quad \omega' - \omega_1 = \omega_1 - \frac{\omega_0 + \omega_2}{2}$$

d'où

$$\omega' = 2\,\omega_1 - \frac{\omega_0 + \omega_2}{2}.$$

Décomposons la force ω_0 appliquée en α, en deux forces $\frac{\omega_0}{2}$ appliquées en a et en β ; décomposons de même la force ω_2 appliquée en γ, en deux forces $\frac{\omega_2}{2}$ appliquées en d et en β ; on obtient trois forces parallèles appliquées en a, β, d qui sont respectivement $\frac{\omega_0}{2}$, $2\,\omega_1$, $\frac{\omega_2}{2}$. En multipliant toutes ces forces par 2, on est conduit à la seconde partie du théorème.

Remplaçons la force $2\,\omega_1$ appliquée en β par ω_1 en a et ω_1 en d ; les trois forces $\frac{\omega_0}{2}$, $2\,\omega_1$, $\frac{\omega_2}{2}$ se ramènent à deux forces appliquées en a et en d qui sont respectivement $\frac{\omega_0}{2} + \omega_1$, $\frac{\omega_2}{2} + \omega_1$; cela démontre la troisième partie du théorème.

Construction géométrique.—Portons $En = \frac{\omega_0}{2}$, $Em = \frac{\omega_2}{2}$; joignons an et dm ; ces droites se coupent en un point H dont l'abscisse est celle du centre de gravité.

En effet, pour composer les deux forces $\omega_1 + \frac{\omega_0}{2} = n\beta$, $\omega_1 + \frac{\omega_0}{2} = m\beta$ appliquées en a et en d, il suffit de tracer une ligne de résultantes auxiliaires de ces forces ; prenons ad comme côté intermédiaire de cette ligne ; $a\beta$ comme force auxiliaire ; on obtient an comme direction du premier côté ; on reconnaît facilement que am est la direction du troisième côté ; les côtés extrêmes prolongés sont am et an ;

ils se coupent en un point du poids résultant; donc le centre de gravité cherché a même abscisse que le point H.

Applications. — Parmi les volumes auxquels cette méthode est applicable, nous citerons particulièrement le volume limité latéralement par une surface réglée. Dans le cas d'une surface réglée à plan directeur, on opère comme nous l'avons fait au numéro 159 (fig. 68); on prend un plan de comparaison, on projette les génératrices sur ce plan par des plans parallèles au plan directeur; entre deux plans directeurs infiniment voisins, on trouve un volume élémentaire dont la section transversale est un rectangle de base constante E et de hauteur y comprise entre deux droites; cette hauteur est une fonction du premier degré de l'abscisse de la section; donc la section transversale du volume total ΣEy est aussi une fonction du premier degré de l'abscisse. Lorsque la surface réglée n'a pas un plan directeur unique, le raisonnement qui précède doit se modifier; en projetant les génératrices sur le plan de comparaison, on obtient des plans de projection non parallèles, la largeur E de la section transversale du volume compris entre deux plans projetants voisins est une fonction du premier degré; la section transversale totale ΣEy est alors une fonction du second degré.

Le plan étant une surface réglée, tout ce qui précède s'applique à un volume compris entre deux bases polygonales situées dans des plans parallèles et une série de faces planes triangulaires ou quadrangulaires menées par un sommet d'une base et un côté de l'autre, ou par deux côtés parallèles de l'une et de l'autre base.

285. Tronc de pyramide ou de cône. — Prenons comme axe des x la droite qui joint les centres de gravité des bases; on sait que cette droite contient le centre de gravité du volume; en appliquant la méthode précédente, on obtiendra donc non seulement l'abscisse du centre de gravité, mais le centre de gravité lui-même. La section transversale est une fonction du second degré de l'abscisse; mais il n'est pas nécessaire de mesurer la section médiane ω_1; nous allons

démontrer que la surface ω' est égale à $\sqrt{\omega_0 \omega_1}$. En effet, les sections transversales sont semblables; si on considère trois dimensions homologues dans les sections extrêmes et dans la section médiane, on démontre aisément que celle de cette dernière est la moyenne arithmétique des deux autres; mais les dimensions linéaires des surfaces semblables sont proportionnelles aux racines carrées de ces surfaces; on a donc :

$$\sqrt{\omega_1} = \frac{\sqrt{\omega_0} + \sqrt{\omega_2}}{2}.$$

Nous avons trouvé :

$$\omega' = 2\omega_1 - \frac{\omega_0 + \omega_2}{2}.$$

En éliminant ω_1, on trouve :

$$\omega' = \sqrt{\omega_0 \omega_2}.$$

Soient b, B les bases du tronc de cône; $\omega_0 = b$, $\omega_2 = B$, $\omega' = \sqrt{Bb}$; la première partie du théorème du numéro précédent conduit au théorème suivant: le centre de gravité d'un tronc de cône est le centre des trois poids b, $\sqrt{Bb}$, B appliqués aux points qui divisent en quatre parties égales la distance des centres de gravité des bases. C'est l'interprétation de la formule donnée dans les traités de mécanique pour trouver le centre de gravité du tronc de cône.

La construction graphique de la figure 133 se modifie légèrement; on joint les centres de gravité des bases a et d; on divise cette droite en quatre parties égales par les points α, β, γ; on élève des perpendiculaires :

$$A''a = b + \frac{\sqrt{Bb}}{2} \qquad D''d = B + \frac{\sqrt{Bb}}{2};$$

on joint $A''\alpha$, $D''\gamma$ qui se coupent en un point dont la projection est le centre de gravité cherché.

Au lieu de se servir des bases, on peut se servir de deux côtés homologues p et q, on a :

$$\frac{A''a}{D''d} = \frac{p^2 + \frac{pq}{2}}{q^2 + \frac{pq}{2}}.$$

Si on construit un triangle rectangle dont les côtés soient p et q, si on mène la hauteur perpendiculaire à l'hypothénuse, on trouve aisément que p^2, q^2, pq sont proportionnels aux segments de l'hypothénuse et à la hauteur; on arrive à une construction facile.

Autre construction. — On arrive à un tracé graphique élégant en utilisant la théorie des centres de pression. Il est fondé sur la remarque suivante: le tronc de prisme ayant (fig. 127) ABCD pour base et SS' comme axe neutre est aussi un tronc de pyramide de sommet S.

Soient: S' le sommet du cône donné (ce cône n'est pas représenté sur la figure); E, F les centres de gravité des bases du tronc de cône; prenons S'F comme axe d'abscisses; imaginons le tronc de pyramide fictif projeté en ADCB; il est facile de voir que les centres de gravité des volumes du tronc de pyramide et du tronc de cône ont même abscisse; on est ainsi conduit à la construction suivante: divisons EF en quatre parties égales par les points α, γ, β; menons les perpendiculaires EH, FG égales à deux dimensions homologues des bases; joignons Hβ, Gγ et projetons leur point de rencontre en b'; joignons de même Hγ, Gα et projetons le point de rencontre en a'; joignons enfin Hb', Ga', la projection du point de rencontre de ces deux droites est le centre de gravité cherché.

CHAPITRE II.

Murs de soutènement et de réservoir.

§ 1. Poussée des terres.

286. Poussée des terres. — On considère les terres comme dépourvues de cohésion; le talus le plus incliné BC (fig. 134, pl. 3) que l'on peut maintenir sans soutènement est le talus naturel; il fait avec l'horizon un angle φ égal à l'angle du frottement des terres. Pour maintenir un massif BAC, il

faut un mur de soutènement. Supposons d'abord que AB soit un plan invariable mobile autour de B comme charnière; si la force qui soutient ce plan diminue progressivement, il arrivera un moment où le plan AB cédera à la pression des terres, les terres glissant vers le bas; à l'instant où ce glissement est sur le point de se produire, les terres exercent sur AB la pression minima; un mur de soutènement est stable dès qu'il peut résister à cette pression qui est la poussée des terres. Si, au contraire, la force qui soutient le plan AB croît progressivement, il arrivera un moment où les terres céderont en glissant vers le haut; à l'instant qui précède ce glissement, les terres exercent sur le plan AB, la pression maxima qui est la butée des terres et qui intervient comme résistance dans la stabilité d'une culée.

La détermination exacte de la poussée étant trop difficile, on la simplifie en admettant que les terres glissent suivant un certain plan inconnu, tel que BE. Si l'on connaissait ce plan, la poussée se déterminerait très facilement; le poids du prisme AEB, les réactions des terres sur le plan AB et BE doivent se faire équilibre; en exprimant que la résultante est nulle, on obtient le triangle B*ee'*, dans lequel B*e* est le poids du prisme ABE, *ee'* est la réaction du mur égale et contraire à la poussée, *e'*B la réaction des terres: pour construire ce triangle, on connaît B*e*, la direction de la droite *ee'* qui fait avec le mur l'angle φ' du frottement des terres sur le mur, la direction de la droite *e'*B qui fait avec B*e* l'angle φ du frottement des terres entre elles.

On détermine la position du plan BE par la méthode des fausses positions; imaginons un plan BD, l'équilibre du prisme ABD conduirait aussi à la détermination de la poussée $dd'' = ee'$, si l'on connaissait la direction de la réaction B*d''* qui se développe sur le plan BD; mais on sait que cette réaction fait avec la normale au plan, un angle plus petit que l'angle du frottement; en admettant que les terres glissent sur BD et que la réaction B*d''* devienne B*d'*, on fait une fausse hypothèse qui conduit à une poussée trop petite $dd' < q$. Cette inégalité devient une égalité pour une seule

position du plan BD, c'est lorsque BD devient le plan de rupture BE; alors dd' devient égal à q et atteint sa plus grande valeur; on a donc :

$$q = (dd')_{max.}$$

De là cette règle : on adopte différents plans passant par B comme plan de glissement, on trouve des poussées généralement inexactes; la poussée exacte est la valeur maxima de ces poussées; le plan de glissement qui y correspond est le véritable plan de rupture (1).

Pour déterminer le centre de poussée, on fait une nouvelle hypothèse; on admet que les plans de glissement sont parallèles pour toutes les hauteurs de mur; la pression sur un élément infiniment petit du mur est proportionnelle au poids des terres comprises entre les plans de glissement menés par les extrémités de l'élément; on démontre aisément que le centre de poussée est la projection du centre de gravité du prisme de plus grande poussée, cette projection étant faite par une droite parallèle au plan de glissement.

---

(1) Nous sommes entrés dans quelques détails sur la théorie connue sous le nom de théorie du prisme de plus grande poussée, parce qu'il nous semble que les auteurs ne l'ont pas toujours bien exposée. Les uns admettent avec Coulomb que le plan qui limite le prisme de plus grande poussée est effectivement le plan de rupture sans démontrer cette affirmation; les autres laissent supposer qu'en calculant la plus grande poussée, on se place dans les conditions les plus défavorables; on vient de voir que la poussée que l'on calcule est réellement la plus petite de toutes celles qui peuvent se produire, la recherche du maximum n'est qu'un procédé d'analyse pour éliminer l'influence d'une fausse hypothèse. Nous ajouterons que la prétendue plus grande poussée est presque toujours plus faible que la plus petite des poussées possibles, parce que la surface de rupture n'est généralement pas un plan; sur le plan BE lui-même, la réaction n'est pas dirigée parallèlement à Be', mais suivant une direction Be'' faisant avec la normale un angle plus petit que l'angle du frottement; la poussée minima est ee'', la théorie incomplète du prisme de plus grande poussée donne ee'; on aura $ee' = ee''$ lorsque la surface de rupture est un plan. Ces considérations prouvent que cette théorie ne doit pas être employée sans discernement.

287. Tracés graphiques. — *Première méthode.* — Traçons des plans B1, B2, B3, etc., assez voisins pour que les éléments A1, 12, 23... puissent être supposés rectilignes; on déterminera ces plans de manière que les poids des triangles AB1, 1B2, 2B3... soient égaux; ayant pris arbitrairement B1, on joint A1 que l'on prolonge d'une quantité égale à elle-même, et on dirige B2 vers l'extrémité ainsi obtenue; on opère de même pour B3, B4, etc.... Si B1′ est la droite qui représente le poids d'un des triangles, en portant des longueurs égales, on obtiendra immédiatement en B1′, B2′, B3′... les poids des différents prismes; les poussées correspondantes forment les ordonnées d'une courbe que l'on trace; en menant à cette courbe une tangente parallèle à Bd, on obtient la poussée cherchée $q = ee'$. Pour obtenir facilement les directions des réactions analogues à Bd', on remarque qu'elles font, avec le plan sur lequel elles se développent, un angle constant égal à $CBD = 90° + \varphi$; donc on trace une circonférence du point B comme centre, et on porte au compas l'arc qui mesure cet angle à partir des droites B1, B2, B3.... On peut éviter cette opération en faisant tourner le diagramme des poussées de cet angle pris en sens contraire, alors Bd vient en BC, les réactions sont dirigées suivant les plans sur lesquels elles se développent; après cette rotation, la normale au mur Bn vient en Bn'; la direction Bq de la poussée, vient en Bq' et fait avec le mur un angle $\varphi + \varphi'$. Pour trouver le centre de poussée, on suppose que les poids des triangles agissent parallèlement à BE; on cherche leur résultante au moyen d'une ligne de résultantes auxiliaires; cette résultante coupe AB au centre de poussée O.

Autres méthodes. — La surface d'un prisme de poussée quelconque s'exprime par $\int \frac{r^2 d\theta}{2}$; en portant θ en abscisse, $\frac{r^2}{2}$ en ordonnée, on est ramené à une intégration ordinaire; on pourrait aussi obtenir l'intégrale $\rho = \int \frac{r^2 d\theta}{2}$ en rayon

vecteur; la courbe a pour sous-normale $\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{r^2}{2}$ et peut être tracée par éléments. Ayant déterminé l'angle θ_1, du prisme de plus grande poussée, on obtient la distance z_1 au plan de glissement du centre de gravité et du centre de poussée par l'équation :

$$z_1 \omega = \int \frac{r^2 d\theta}{2} \times \frac{2}{3} r \sin(\theta_1 - \theta) = \frac{1}{3} \int r^3 d(\cos\theta_1 - \theta).$$

En portant r^3 en ordonnée, $\cos(\theta - \theta_1)$ en abscisse, on est ramené à une intégration ordinaire. Pour obtenir l'intégrale en rayon vecteur, on se sert de la sous-normale $\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{r^3}{3}$ $\sin(\theta_1 - \theta)$, expression facile à construire.

288. Méthode de Poncelet. — Poncelet a trouvé par des considérations analytiques, un tracé applicable au cas où le profil du terrain est rectiligne dans les environs du plan de rupture; on peut déduire le tracé de Poncelet des considérations qui précèdent.

Soient : (fig. 135) AB le mur, ADC le massif de terres à soutenir; remplaçons le profil courbe DA par un profil rectiligne DA′ donnant la même surface : A′DB = BAD. Les poids des prismes BAM′, BAN′ ou leurs équivalents BA′M′, BA′N′ sont proportionnels aux longueurs A′M′, A′N′ et peuvent être représentés par Bm, Bn; on obtient les points m et n en menant M′m, N′n parallèles à A′B; on obtient les poussées en Mm, Nn, ces droites Mm et Nn étant menées parallèlement à la droite B′o qui fait avec le mur AB l'angle $\varphi + \varphi'$ (287). Mais cette construction est précisément celle d'une hyperbole (101) dont l'asymptote est parallèle Bo'; on obtient cette asymptote oy' en remarquant que si BM′ vient en Bo', Mm vient en Oy' et le point M se transporte à l'infini. L'ordonnée maxima que nous supposons être Mm, s'obtiendra donc en déterminant N′ par la relation (101) :

$$O'M'^2 = O'A' \times O'N'.$$

De là résulte une construction graphique très simple pour déterminer le prisme de plus grande poussée : on mène une

droite Bo' faisant avec le mur un angle $\varphi + \varphi'$, on détermine O'M en cherchant une moyenne proportionnelle entre O'A' et O'C; BM' est le plan de rupture.

Cas particuliers. — 1° Si le point o' se transporte à l'infini, le point M' devient le milieu de A'C : ce cas se présente lorsque BA et A'C forment un angle égal à $\varphi + \varphi'$.

2° Si les droites A'B et BC sont anti-parallèles dans l'angle Bo'C, c'est-à-dire si angle o'CA = angle O'BA', on a $(O'B)^2 = O'A \times O'C$, donc O'M' = O'B; on obtient immédiatement le point o'. Il est facile de démontrer qu'alors BM est la bissectrice de l'angle A'BC; en effet :

$$\text{angle A'BM'} = \text{O'BM'} - \text{O'BA'}$$
$$\text{angle M'BC} = \text{O'M'B} - \text{O'CB}.$$

Ces deux angles sont égaux comme différences d'angles égaux.

Lorsque le profil du terrain est rectiligne dans toute son étendue, AB ne diffère pas de A'B; l'angle O'BA' est l'angle $\varphi + \varphi'$; pour que l'angle O'CB soit aussi égal à $\varphi + \varphi'$, il faut que les terres soient dressées suivant une ligne A'C, faisant avec l'horizon un angle φ'; si on néglige le frottement des terres sur le mur, cette construction s'applique au cas où les terres sont dressées horizontalement; c'est le cas ordinaire de la pratique.

289. Méthode pratique. — Soient : (fig. 136) AB le mur de forme quelconque, AC le profil des terres supposé horizontal, BC le talus naturel faisant avec l'horizon l'angle φ avec la verticale l'angle $T = 90° - \varphi$.

Déterminons la poussée sur un mur fictif vertical BD, en supposant la poussée normale à ce mur, le prisme de plus grande poussée s'obtient en menant la bissectrice BE de l'angle DBC; on trouve que cette poussée agit au point F situé au tiers de la hauteur et a pour valeur

$$q = \frac{\pi h^2}{2} \operatorname{tang} \frac{T}{2}.$$

π étant le poids spécifique des terres, h la hauteur du mur, l la largeur.

On obtiendrait la poussée sur le mur AB en composant la poussée q avec le poids ADB; mais il est plus simple de faire intervenir ce poids dans l'évaluation du moment résistant.

On peut démontrer que cette méthode revient à supposer que l'état d'équilibre du massif des terres est le même que si ce massif se prolongeait indéfiniment au-delà du mur; on a donc la certitude d'obtenir de cette manière une poussée plus forte que celle qui se produirait au moment de la rupture. Lorsque le mur est rectiligne, on pourrait adopter la méthode Poncelet; nous préférons la précédente parce que celle de Poncelet conduit presque toujours à une poussée trop faible.

Si le terrain était dressé suivant une ligne inclinée DA, on pourrait aussi imaginer un mur fictif vertical BD, mais la théorie mathématique de la poussée des terres démontre qu'il convient alors de supposer sur ce mur une poussée parallèle au profil des terres.

§ 2. Murs de soutènement à sections pleines.

290. Principe général de la similitude des murs stables. — Étant donné un mur stable soutenant un massif de terres limité par une ligne droite, on peut en trouver une infinité d'autres de même stabilité et de hauteurs différentes, en construisant des formes semblables à la forme donnée.

En effet, en augmentant toutes les dimensions du mur dans le même rapport, le moment résistant par mètre courant augmente dans le rapport des cubes des hauteurs; le prisme de plus grande poussée reste aussi semblable à lui-même; son poids et par conséquent la poussée augmente comme le carré de la hauteur; le moment sollicitant augmente donc comme le cube de la hauteur. Il en résulte que le coefficient de stabilité reste le même. Il faut remarquer toutefois que si le coefficient de stabilité ne change pas, il n'en est pas de même des pressions; la pression totale varie

évidemment comme le carré de la hauteur, il en résulte que la pression par unité de surface varie comme la hauteur du mur; pour une forme donnée il existe donc une hauteur limite que l'on ne peut dépasser, si l'on veut éviter l'écrasement de la matière; au-delà de cette hauteur, il faut augmenter les dimensions pour satisfaire à l'équilibre élastique.

Corollaires. — 1° Dans un mur de forme trapèze ou rectangle, la section dangereuse est la section inférieure. Soit (fig. 137) le mur ABCD; pour une hauteur AF le mur semblable AGHF donnerait le même coefficient de stabilité que le mur ABCD; donc le mur AFEB donnera un coefficient de stabilité plus grand; c'est ce qu'il fallait démontrer.

2° Le triangle est la forme d'égale stabilité. Soit (fig. 137) le mur ACD; les murs AHF et ACD étant semblables, le coefficient de stabilité est le même pour toutes les assises du mur triangle; c'est ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — Si on appliquait le principe que nous avons appelé le principe de la similitude des murs stables, au cas où le profil du terrain n'est pas rectiligne, on ferait une erreur, à moins de faire varier la forme du terrain dans le même rapport que les dimensions du mur. Il est aisé de reconnaître, d'après cela, que si on augmente les dimensions d'un mur stable proportionnellement à la hauteur, on obtiendra un mur ayant trop ou trop peu de résistance, selon que le terrain est convexe ou concave.

Nous allons appliquer les principes que nous avons développés dans le chapitre III du livre précédent (181 à 207.)

291. Tableaux graphiques. — Nous nous proposons de faire voir que l'on peut très facilement construire des tableaux graphiques donnant immédiatement les dimensions des murs de soutènement ou de réservoir de forme rectangle ou trapèze, le terrain étant supposé horizontal. Nous supposerons que la hauteur du mur soit égale à l'unité; en vertu du principe précédent, il suffira de multiplier, par la hauteur donnée, toutes les dimensions obtenues par cette hypothèse.

292. Murs rectangles. — Soient : π le poids spécifique des terres, π' celui des maçonneries, T l'angle du talus naturel des terres avec la verticale, l la hauteur du mur, e l'épaisseur inconnue, m le coefficient de stabilité que nous prendrons égal à 2; le moment résistant du mur de $\pi e \times \frac{e}{2}$, le moment sollicitant est $\frac{\pi}{2} \operatorname{tang}^2 \frac{T}{2} \times \frac{l}{3}$; en exprimant que le premier est m fois le second, on obtient une équation d'où l'on tire :

$$e = \operatorname{tang} \frac{T}{2} \sqrt{\frac{m\pi}{3\pi'}} \qquad (1)$$

ou en faisant $m = 2$

$$e = \operatorname{tang} \frac{T}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{3\pi'}}. \qquad (2)$$

Pour représenter cette formule par un tableau graphique, prenons (fig. 138) deux axes coordonnés rectangulaires et posons :

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{\pi}{\pi'}} \qquad (3)$$

$$x = e \qquad (4)$$

On obtient pour lignes d'égal T :

$$x = y \operatorname{tang} \frac{T}{2}. \qquad (5)$$

Faisons varier $\frac{\pi}{\pi'}$ de 0 à 1,0 et construisons les différentes valeurs de y; on peut se servir à cet effet d'une parabole auxiliaire $y = \sqrt{\frac{2}{3}x}$, ou bien construire une moyenne proportionnelle entre $\frac{2}{3}$ et $\frac{\pi}{\pi'}$. Portons à cet effet $OA = \frac{2}{3}$, $OB = \frac{\pi}{\pi'}$; décrivons une circonférence sur AB comme diamètre, cette circonférence détermine sur oy la longueur

$OD = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{\pi}{\pi'}}$ (1). Les Lignes des e représentées par l'équation $x = e$ s'obtiennent facilement. Les lignes des T sont des droites passant par l'origine et faisant avec l'axe oy un angle $\frac{T}{2}$; on les obtient au moyen du rapporteur.

Dans le cas d'un mur de réservoir, il faut faire $T = 90°$; il convient aussi que le tableau indique les cas les plus fréquents : sable, terre sèche ou terre forte. Afin d'éviter le calcul de $\frac{\pi}{\pi'}$, on établit en yox' un tableau qui donne immédiatement les valeurs de ce rapport ; ce tableau peut s'établir de différentes manières, mais pour éviter la lecture de la valeur de $\frac{\pi}{\pi'}$, prenons pour lignes des $\frac{\pi}{\pi'}$ les mêmes lignes que dans le tableau yox, c'est-à-dire

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{\pi}{\pi'}}.$$

Prenons comme lignes des π, les lignes :

$$x = -k\sqrt{\pi}.$$

En éliminant π entre ces deux équations, on obtient les lignes des π' :

$$k\sqrt{\frac{3\pi'}{2}}.\,y = -x.$$

Ces droites passent par l'origine ; pour $y = \sqrt{\frac{2}{3}}$, on obtient :

$$x = -k\sqrt{\pi'}.$$

---

(1) Nous n'avons indiqué sur la figure que les valeurs de y pour quelques valeurs de $\frac{\pi}{\pi'}$; nous laissons au lecteur le soin de construire un tableau à une plus grande échelle où l'on puisse lire $\frac{\pi}{\pi'}$ en centièmes ; cette remarque s'applique aussi aux autres tableaux graphiques. Nous nous proposons surtout ici d'indiquer la manière de les construire.

On portera donc en D$x\pi$ la même échelle ($k\sqrt{\pi'}$) que sur ox' ($k\sqrt{\pi}$); k est un coefficient quelconque. Ces deux échelles peuvent se déduire de l'échelle des $y = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{\pi}{\pi'}}$, soit en portant cette dernière en vraie grandeur, ce qui revient à faire $k = \sqrt{\frac{2}{3}}$, soit en changeant la graduation en remplaçant par exemple 0,2 par 1 comme sur la figure, ce qui revient à poser $k\sqrt{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}}0{,}2\alpha$ ou $k = \sqrt{\frac{2}{3}}0{,}2$.

Pour montrer par un exemple, la manière de se servir du tableau graphique, prenons le cas d'un sable fin et sec : $T = 60°$, $\pi = 1400$; soit $\pi' = 2200$ kil. On trouve le point M sur l'échelle des π', le point N sur celle des π, en suivant les flèches, on obtient le point P du tableau yox'; on cherche le point Q de l'échelle des T; en partant des points P et Q suivant les flèches, on aboutit au point R, du point R on vient en S lire la valeur de e : $e = 0{,}37$; on peut aussi prendre la valeur OS qui est la largeur d'un mur de hauteur 01 et obtenir graphiquement la largeur du mur de hauteur h.

293. Surcharge sur les terres. — Soit p la surcharge par mètre carré; cette surcharge donne lieu à une poussée supplémentaire $ph\,\text{tang}^2\frac{T}{2}$ appliquée au milieu de la hauteur du mur; le moment sollicitant devient

$$\frac{\pi h^2}{2}\text{tang}^2\frac{T}{2} \times \frac{h}{3} \times ph\,\text{tang}^2\frac{T}{2} \times \frac{h}{2} = \frac{\pi + \frac{3p}{h}}{2} h^2\,\text{tang}^2\frac{T}{2}\frac{h}{3}.$$

S'il n'y avait pas de surcharge, on ferait $p = 0$; donc $\pi + \frac{3p}{h}$ deviendrait π; il résulte de là que pour appliquer le tableau précédent au cas d'une surcharge, on doit introduire comme poids spécifique $\pi + \frac{3p}{h}$. On peut construire un tableau graphique donnant immédiatement $\pi + \frac{3p}{h}$.

294. Autres tableaux. — Le tableau que nous avons adopté pour les murs rectangles n'est pas le seul que l'on puisse construire; nous signalons rapidement les systèmes suivants :

$$1^\circ \quad x = \operatorname{tang}\frac{T}{2}, \quad y = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{\pi}{\pi'}}, \quad ye = x.$$

$$2^\circ \quad x = \operatorname{tang}\frac{T}{2}, \quad y = e, \quad y = x\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\pi}{\pi'}}.$$

$$3^\circ \quad x = e^2, \quad y = \frac{2}{3}\frac{\pi}{\pi'}, \quad y = x\operatorname{tang}^2\frac{T}{2}.$$

Dans chacun de ces systèmes, on adjoindra un tableau des valeurs de $\frac{\pi}{\pi'}$, soit en prenant les mêmes lignes de $\frac{\pi}{\pi'}$, dans les deux tableaux, soit en en prenant d'autres reliées aux premières pour une courbe de rebroussement (187).

On peut aussi réunir les tableaux en un tableau unique; ainsi dans la figure 138, on peut rabattre le tableau yox' sur le tableau yox; alors les lignes convergentes sont à la fois des lignes des T et des π'; il faut deux graduations différentes pour ces lignes.

4° Si nous prenons le logarithme de l'épaisseur e, on obtient :

$$\log e = \log\operatorname{tang}\frac{T}{2} + \log\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\pi}{\pi'}}.$$

Chacun des systèmes précédents peut être appliqué à l'équation mise sous cette forme; si on veut obtenir un tableau unique, on peut adopter le suivant :

$$x = -\log e + a, y = -\log\operatorname{tang}\frac{T}{2} + b, y - x = \log\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\pi}{\pi'}} + b - a$$

Pour le tableau des π, π', $\frac{\pi}{\pi'}$, on prendra :

$$x + y = \log(2\pi) + a' \quad x - y = \log(3\pi') + b'$$

$$y = \log\sqrt{\frac{2\pi}{3\pi'}} + \frac{b' - a'}{2}.$$

On peut choisir arbitrairement les constantes a, b, a', b'.

Les lignes des $\frac{\pi}{\pi'}$ sont différentes pour les deux tableaux, mais elles ont une droite oA de rebroussement que l'on obtient facilement; ces lignes n'ont pas besoin d'être graduées. Le tableau contiendra quatre graduations: π et π' sur des transversales, e sur une horizontale, T sur une verticale; pour se servir du tableau (fig. 140), on cherche les points M et N sur les échelles des π et π'; on trouve le point P; on suit PQS; on détermine le point S, en partant de R sur l'échelle des T; on lit l'épaisseur en T.

295. Mur avec fruit extérieur. — Supposons que l'on ait déterminé par la méthode précédente l'épaisseur $e = CD$ d'un mur rectangle ABCD (fig. 139); nous nous proposons d'en déduire l'épaisseur $e' = FD$ d'un mur avec fruit extérieur. Pour y arriver, égalons les moments résistants des deux murs; le moment du trapèze AIDFE autour de F doit être égal au moment du rectangle ABCD autour de C. Le premier est égal au moment du rectangle FDAH, moins celui du triangle EFH; appelons h la hauteur du mur, n le fruit extérieur; le moment du mur trapèze est:

$$e'h\frac{e'}{2} - \frac{nh \cdot h}{2} \times \frac{nh}{3}.$$

Le moment du mur rectangle est $eh \times \frac{e}{2}$. On a l'équation:

$$e'^2 = e^2 + \frac{(nh)^2}{3}$$

pour $h = 1$ $\qquad e'^2 = e^2 + \frac{n^2}{3}$.

On peut déduire de cette formule une construction graphique de e'; e' est l'hypothénuse d'un triangle dont les côtés sont e et $\frac{nh}{\sqrt{3}}$; on porte $CR = nh$, on prend $CI = \frac{CR}{3}$, du point I comme centre, avec IR comme rayon, on trace une circonférence qui détermine $CQ = \frac{nh}{\sqrt{3}}$, on a alors $QD = e'$.

On peut aussi compléter le tableau graphique de la fig. 138 de manière à pouvoir lire, ou prendre l'épaisseur e' pour $h = 1$; prenons comme axes d'un nouveau tableau $x\,o\,y'$; et posons :

$$x = e \qquad y' = \frac{n}{\sqrt{3}}.$$

Les lignes des e' sont :

$$x^2 + y'^2 = e'^2.$$

Le tableau s'obtient en traçant les lignes des e qui sont les mêmes que dans le tableau $y\,o\,x$, les lignes des n qui sont des parallèles à $o\,x$, les lignes des e' qui sont des circonférences. Montrons l'usage du tableau par un exemple; les données étant les mêmes que dans l'exemple que nous avons choisi précédemment, on trouverait OS pour épaisseur du mur rectangle; soit $n = 0{,}2$; déterminons le point U sur l'échelle des n; en partant des points R et U, on obtient le point T, l'épaisseur e' est OI.

Remarque. — Nous avons vu (204) que dans l'un des tableaux graphiques que l'on pourrait employer, on prend $x = e^2$, en prenant $y' = \frac{n^2}{3}$, les lignes des e' deviennent des droites $x + y' = e'^2$.

296. Mur avec fruit intérieur. — *Solution approchée.* — Soient (fig. 139) AEFD le profil d'un mur stable, sans fruit intérieur, MN le parement intérieur incliné d'un mur MEFN de même stabilité. L'action des terres sur le parement MN se compose de la poussée sur le plan vertical NL et du poids du prisme LNM; si l'on fait intervenir ce dernier poids dans le moment résistant, le moment sollicitant est le même dans le cas du parement MN que dans le cas du parement vertical : il faut donc aussi que les moments résistants soient les mêmes. Si on admet que les bras de leviers des deux moments diffèrent assez peu pour être considérés comme égaux, on déterminera MN de telle sorte que le poids du massif LEFN soit égal à celui du massif AEFD; en supprimant la partie commune MEFR', on a :

$$\pi' \times \mathrm{AM} \times h = \pi \frac{\mathrm{ML}}{2} h + \pi' \frac{\mathrm{ML}}{2} h.$$

On en déduit : $$\frac{AM}{ML} = \frac{\frac{\pi+\pi'}{2}}{\pi'}.$$

Or, on a évidemment $\frac{AM}{ML} = \frac{AP}{h}$,

donc : $$AP = \frac{\frac{\pi+\pi'}{2}}{\pi'} h$$

De là résulte la proposition suivante ; si on détermine le profil d'un mur trapèze ou rectangle sans fruit intérieur, on obtiendra le profil d'un mur sans fruit intérieur et de même stabilité en faisant tourner le parement intérieur autour d'un axe dont la position ne dépend que des poids spécifiques et non du fruit intérieur ; la distance de cet axe au sommet du mur est $\frac{\frac{\pi+\pi'}{2}}{\pi'} h$. Cette distance s'obtient aisément par calcul ou graphiquement. Si on donne le fruit intérieur, on mène par l'axe P, une droite MN d'inclinaison donnée ; si on donne la largeur EM, on joint MP.

297. Murs avec fruit intérieur. Solution exacte. — Soient (fig. 139) $e' = FD$ l'épaisseur à la base du mur sans fruit intérieur, $\lambda = EM$ la largeur au sommet du mur de même stabilité dont le fruit intérieur inconnu est n' ; pour exprimer l'égalité des moments résistants, nous ajouterons dans les deux cas le massif HFE : les moments résistants seront encore égaux ; le moment du mur AHFD est $\frac{\pi' e'^2}{2}$: le moment du mur HLNF est $\frac{\pi'(\lambda + n')^2}{2}$, mais nous avons ainsi remplacé le massif de terre MLN par un massif de maçonnerie, le moment du massif de terre MNL est $\pi \frac{n}{2}\left(\lambda + \frac{2}{3} n'\right)$, en remplaçant π par π' on a commis une erreur

que l'on fera disparaître en retranchant $(\pi' - \pi)\frac{n'}{2}\left(\lambda + \frac{2n'}{3}\right)$; on a donc l'équation :

$$\frac{\pi' e'^2}{2} = \frac{\pi'(\lambda + n')^2}{2} - (\pi' - \pi)\left(\lambda + \frac{2n'}{3}\right).$$

Cette équation contient 5 variables; mais elle est homogène en π et π'; en divisant par π', il ne reste plus que le rapport $\frac{\pi}{\pi'}$; l'équation est aussi homogène par rapport aux variables $e'\lambda n'$; en divisant par e', il restera les rapports $\frac{\lambda}{e'}$ et $\frac{n'}{e'}$; on peut donc ramener l'équation précédente à une équation à trois variables en divisant par $\pi' e'^2$ ou mieux par $\frac{\pi' e'^2}{2}$, on trouve :

$$1 = \left(\frac{\lambda}{e'} + \frac{n'}{e'}\right)^2 - \left(1 - \frac{\pi}{\pi'}\right)\frac{n'}{e'}\left(\frac{\lambda}{e'} + \frac{2}{3}\frac{n'}{e'}\right).$$

Afin de simplifier les écritures, nous supposerons $e' = 1$, $\pi' = 1$, les lettres λ, n, π représenteront donc, en réalité, les rapports $\frac{\lambda}{e'}$, $\frac{n'}{e'}$, $\frac{\pi}{\pi'}$: on a alors :

$$1 = (\lambda + n')^2 - (1 - \pi)n'(\lambda + 2n').$$

En général, on connaît π, π', on détermine e', on se donne λ; il faut calculer n' par cette équation. On peut de plusieurs manières construire un tableau graphique donnant immédiatement n'; mais nous ne sommes pas parvenus à une solution comportant trois systèmes de droites; nous avons toujours obtenu deux systèmes de droites et un système de courbes; par l'introduction d'une variable auxiliaire, nous avons trouvé différents moyens d'éviter les courbes; mais alors il faut deux tableaux graphiques. Ce n'est qu'en substituant à l'inconnue n', une nouvelle inconnue, que nous sommes parvenus à résoudre le problème par un tableau unique comportant trois systèmes de droites.

Si l'on examine l'équation qu'il s'agit de représenter, on s'aperçoit qu'elle contient deux variables au second degré,

une au premier ; si, par l'introduction d'une nouvelle inconnue, on parvenait à abaisser le degré de la variable λ, le problème serait résolu, car on se trouverait dans un des cas traités au livre III (206). Mettons d'abord l'équation sous la forme suivante :

$$\lambda^2 - 1 + \lambda n'(1 + \pi) + \frac{1}{3} n^2 (1 + 2\pi) = 0.$$

Nous pouvons choisir l'inconnue de telle manière qu'il y ait un facteur en λ à supprimer ; deux moyens se présentent ; on peut poser $n' = \dfrac{1 - \lambda}{u}$ ou bien $n' = \dfrac{1 + \lambda}{v}$. (1)

Dans les deux cas, on abaissera le degré de λ, parce que le facteur $1 - \lambda$ ou $1 + \lambda$ pourra être supprimé.

298. Première solution. — Voyons d'abord quelle est la signification de l'inconnue nouvelle u ; on a :

$n' = \dfrac{1 - \lambda}{u}$, d'où en rétablissant e' : $u = \dfrac{e' - \lambda}{n'} = \dfrac{AM}{AL} = \dfrac{AP}{h}$.

Pour $h = 1$, on a $u = AP$; u est donc la distance au sommet du mur, de l'axe autour duquel il faut faire tourner le parement vertical pour avoir le parement incliné ; si on détermine u, on obtiendra le point P et le parement MN en joignant MP. La variable u est déterminée par l'équation que l'on obtient en remplaçant dans l'équation (1) n par sa valeur ; on trouve, après la suppression du facteur commun, $1 - \lambda$:

$$-u^2(1 + \lambda) + u\lambda(1 + \pi) + \frac{1}{3}(1 - \lambda)(1 + 2\pi) = 0. \quad (2)$$

Cette équation a la forme que nous avons examinée précédemment (206) ; posons (fig. 141)

$$x = \frac{\lambda(1 + \pi)}{1 + \lambda} \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{3}\frac{(1 - \lambda)(1 + 2\pi)}{1 + \lambda}. \quad (4)$$

L'équation (2) devient l'équation des lignes des u :

$$-u^2 + ux + y = 0. \qquad (5)$$

En éliminant π des équations (3) et (4), on obtient les lignes des λ :

$$2x\frac{1+\lambda}{\lambda} - 3y\frac{1+\lambda}{1-\lambda} = 1. \qquad (6)$$

ou $$\lambda^2(3y+2x-1)+\lambda(3y+1)-2x=0. \qquad (6^{bis})$$

En éliminant λ des équations (3) et (4), on obtient les lignes des π :

$$\frac{2x}{1+\pi} + \frac{3y}{1+2\pi} = 1. \qquad (7)$$

ou... $$-2\pi^2+\pi(4x+3y-3)+2x+3y-1=0. \qquad (7^{bis})$$

On peut vérifier aisément les propositions suivantes que nous avons déjà démontrées d'une manière générale (207) :

1° Les lignes des π et des λ enveloppent une même courbe du second degré ; on trouve, en effet, après quelques calculs, que les enveloppes de ces lignes ont une même équation qui est :

$$16x^2+9y^2+24xy+6y-8x+1=0.$$

2° Toute enveloppée est à la fois une ligne de π et λ ; les valeurs correspondantes satisfont à une équation que nous avons obtenue sous forme d'un déterminant égalé à zéro et qui se réduit ici à l'équation :

$$\pi(1+\lambda)+1=0 \qquad (9)$$

Pour démontrer cette proposition directement, voyons s'il est possible d'identifier les équations (6) et (7) de telle manière qu'elles représentent une même ligne droite ; on obtient ainsi deux équations ; après quelques calculs, chacune d'elles se réduit à l'équation (9) ; cela démontre la proposition.

Pour construire les lignes des π, on se sert de l'équation (7) ;

l'axe des x et l'axe des y sont respectivement coupés par la ligne π aux points donnés par les équations :

$$y = o \quad x = \frac{1}{2}(1 + \pi)$$

$$x = o \quad y = \frac{1}{3}(1 + 2\pi).$$

Donnons à π les valeurs 0, 0,1, 0,2, 0,3... 1, ou des valeurs intermédiaires exprimées en centièmes, si l'épure est tracée à une échelle assez grande; on obtient sur les axes coordonnés deux échelles proportionnelles à celle des π, dont les origines sont :

$$y = o \quad x = \frac{1}{2}$$

$$x = o \quad y = \frac{1}{3}.$$

Ces échelles sont faciles à construire; en joignant les points correspondants, on obtient les lignes des π. Il faut remarquer que cette construction n'est autre que la construction générale que nous avons donnée précédemment; on se trouve en effet dans le premier cas du numéro 203; l'enveloppe est parabole; chaque enveloppe est coupée par les autres suivant une échelle proportionnelle à celle de la variable; les axes ox, oy, possèdent cette propriété parce que ce sont des tangentes; en effet, pour $\pi = -1$, $\pi = -\frac{1}{2}$, on trouve respectivement $x = o$, $y = o$. La méthode générale conduit même à construction simple des deux échelles des π à dresser sur les axes coordonnés; le système auxiliaire a pour équation :

$$-2U + (4x + 3y - 3) = o.$$

On trace les droites $U = o$, $U = 1$, les autres s'en déduisent, car toute sécante est axe des U; en les traçant et en prenant pour origine : $U = -1$ sur ox, et $V = -\frac{1}{2}$ sur oy, les échelles sont construites.

Pour construire les lignes des λ, nous nous servons de

l'équation (6^{bis}) et nous employons la méthode générale (201); traçons les droites suivantes :

$\lambda = o$	ou $x = o$	droite A B
$\lambda = \infty$	ou $3y + 2x - 1 = o$	droite B C
corde de contact	$3y + 1 = o$	droite A C

La droite B C est déjà construite, c'est la droite $\pi = o$: cela résulte de l'équation (9). Il faut encore construire une troisième ligne des λ; on peut prendre la droite ox qui correspond à $\lambda = 1$; car l'équation (6) donne pour $\lambda = 1$, $y = o$. Les droites A B et ox sont coupées par les autres suivant des échelles homographiques de l'échelle des λ ; ces échelles sont déterminées par le système auxiliaire :

$$U(3y + 2x - 1) + 3y + 1 = o.$$

C'est un système de droites ayant le point C pour centre de convergence et pour axe des U une parallèle à B C. Construisons l'échelle oA ; nous en connaissons deux points : son zéro en A, car c'est en ce point que la droite A B se coupe elle-même ; le point $\lambda = 1$ est l'origine 0, car c'est en ce point que la droite A B est coupée par la droite $\lambda = 1$; prenons oD pour axe du système auxiliaire ; divisons 0D en 10 parties égales, joignons le point C aux points de division, nous obtenons l'échelle Ao. Pour avoir l'échelle des λ sur ox, on opère de la même manière.

En joignant les points correspondants de ces échelles, on obtient les lignes de $\frac{\lambda}{e^i}$. Mais les points qu'il faut joindre étant très voisins, les droites sont déterminées avec peu d'exactitude ; aussi est-il nécessaire de construire l'échelle des λ sur une autre enveloppée. Choisissons par exemple la droite EH qui correspond à la valeur $\pi = 1$ et d'après l'équation (9) à la valeur $\lambda = -2$. On connaît déjà les points O, et 1 de cette échelle, puisque OE est la droite $\lambda = 0$, OH est la droite $\lambda = 1$. Prenons EF pour axe des U ; on obtient immédiatement le système auxiliaire et l'échelle cherchée EH. Il est à remarquer qu'aucune des enveloppées ne donnera une échelle des λ à divisions égales, car l'enveloppe étant une parabole, la

tangente parallèle à $\lambda = \infty$ n'existe pas; mais on voit que EP peut servir d'axe des λ; la droite EH sert de droite de rebroussement.

Les lignes des u se construisent au moyen de l'équation (5); l'enveloppe est une parabole, toute tangente est coupée par les autres suivant une échelle proportionnelle à celle des u. Traçons les droites :

$$u = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0 \qquad \text{ligne } Ox,$$
$$u = -1 \quad \text{ou} \quad y = x + 1 \qquad \text{ligne GE.}$$

Le système auxiliaire a pour équation :

$$-U + x = 0.$$

Pour la droite $u = 0$, on doit faire $U = u$, donc $x = u$; on construira donc l'échelle des u sur Ox. Pour obtenir les intersections de la droite $u = -1$, ou GE, on doit faire $U = u - 1$; on transporte l'origine O en G, on dresse en GO l'échelle des u, le système auxiliaire détermine l'échelle GE; on joint les points correspondants des échelles GE et OH; on obtient les lignes cherchées. Nous avons tracé ces lignes en pointillé; l'épure indique que ces lignes ont à peu près les mêmes directions que celles des $\frac{\pi}{\pi'}$ et il en résulte une certaine confusion dans le tableau graphique.

Avant d'exposer la seconde méthode qui n'a pas cet inconvénient, nous pouvons déduire de cette circonstance des conséquences utiles. Si on donne π, et si on fait varier λ, la valeur de u variera très peu; et si la ligne π coïncidait avec la ligne u, comme cela se présente pour $\pi = 1$, $u = 1$, ces valeurs conviendraient quel que soit λ, u serait indépendant de λ. Puisque u varie très peu avec λ, on peut déterminer u approximativement en donnant à λ une valeur inexacte telle que $\lambda = 1$; or, alors l'équation (2) donne en supprimant la solution $u = 0$ qui ne convient pas :

$$u = \frac{1}{2}(1 + \pi),$$

ou en rétablissant π', $u = \frac{1}{2}\frac{\pi + \pi'}{\pi'}$.

On retrouve ainsi la solution approchée du numéro précédent. Cette solution est tout-à-fait exacte pour $\lambda = 1$, elle est très exacte pour λ voisin de l'unité, c'est-à-dire pour les cas où le fruit intérieur est très petit. Dans les autres cas, on emploiera la méthode suivante.

299. Seconde solution. — On transforme l'équation (1) du numéro précédent en posant :

$$n' = \frac{1+\lambda}{v} \quad \text{d'où en rétablissant } e' : \; v = \frac{\lambda + e'}{n'} .$$

n' désigne le fruit par unité de hauteur, donc v est la hauteur sur laquelle le fruit du parement intérieur serait égal à $\lambda + e'$; si on connaît v, on porte (fig. 145) $AB = \lambda + e'$, $AC = v$, CB est la direction du parement intérieur, le problème est résolu. On peut aussi déterminer au moyen de v un point du parement intérieur MN (fig. 142); on porte $MR = \lambda + e'$, ou $HR = e'$; on porte $RP' = v$; le point P' est un point du parement MN prolongé.

Le tableau graphique des valeurs de v se construit comme le tableau des valeurs de u; à part quelques changements de signe dans les équations, quelques modifications dans l'épure, nous n'avons qu'à reproduire les raisonnements et constructions du numéro précédent.

Si dans l'équation (1) du numéro précédent on remplace n' par sa valeur exprimée au moyen de la nouvelle variable v, on obtient, après avoir supprimé le facteur commun $\lambda + 1$, l'équation :

$$(\lambda - 1)v^2 + \lambda(1+\pi)v + \frac{1}{3}(1+\lambda)(1+2\pi) = 0. \quad (2)$$

Prenons deux axes coordonnés et posons :

$$x = \frac{\lambda}{1-\lambda}(1+\pi) \qquad (3)$$

$$y = \frac{1}{3}\frac{1+\lambda}{1-\lambda}(1+2\pi) \qquad (4)$$

L'équation (2) devient l'équation suivante, qui est celle des lignes des v :

$$-v^2 + xv + y = 0 \qquad (5)$$

Éliminons π des valeurs de x et y; pour cela tirons les valeurs de $1+\pi$ et $1+2\pi$ et remarquons que :

$$2(1+\pi)-(1+2\pi)=1,$$

on obtient : $$\frac{2x(1-\lambda)}{\lambda}-\frac{3y(1-\lambda)}{1+\lambda}=1 \qquad (6)$$

ou $$\lambda^2(3y-2x-1)-\lambda(3y+1)+2x=0 \qquad (6^{bis})$$

Éliminons de même λ des valeurs de x et y; nous obtenons l'équation des lignes des π :

$$-\frac{2x}{1+\pi}+\frac{3y}{1+2\pi}=1 \qquad (7)$$

ou $$-2\pi^2+(3y-4x-3)\pi+(3y-2x-1)=0 \qquad (7^{bis})$$

On peut, comme précédemment, vérifier analytiquement les propositions que nous avons déjà démontrées d'une manière générale (207) : 1° les lignes des π et des λ enveloppent une même courbe du second degré; on trouve, en effet, après quelques calculs, que les enveloppes de ces lignes ont même équation :

$$16x^2+9y^2-24xy+6y+8x-1=0 \qquad (8)$$

2° Toute enveloppée est à la fois ligne de π et de λ; les valeurs de ces variables relatives à une même enveloppée satisfont à une même équation que nous avons obtenue (207) sous forme d'un déterminant égalé à zéro et qui se réduit ici à l'équation :

$$\pi(1-\lambda)+1=0 \qquad (9)$$

Pour démontrer directement cette proposition, voyons s'il est possible d'identifier les équations (6) et (7) de telle manière qu'elles représentent une même droite, on obtient deux équations qui, après quelques calculs, se réduisent chacune à l'équation (9); si donc on prend une ligne π, cette ligne est identique à la ligne), λ étant déterminé par l'équation (9).

Les lignes des π se construisent comme dans le numéro précédent; il suffit même de changer le signe de x pour passer d'un cas à l'autre ; on obtient ainsi les lignes de la

figure 143. Les lignes des λ se construisent aussi comme dans le numéro précédent ; il suffirait de changer dans l'équation 6 du numéro précédent les signes de λ et de x pour retrouver l'équation des lignes qu'il s'agit de construire ici. On trace les droites suivantes :

$\lambda = 0$ ou $2x = 0$	droite A B
$\lambda = \infty$ ou $3y - 2x - 1 = 0$	droite B C
Corde de contact $3y + 1 = 0$	droite A C

On a aussi, d'après l'équation (6) :

$$\lambda = -1 \quad y = 0 \quad \text{droite } ox.$$

Les lignes A B et ox sont coupées par les autres suivant des échelles homographiques de l'échelle des λ, que l'on obtient au moyen du système auxiliaire, dont C est le centre de convergence, et dont l'axe est parallèle à la droite B C ; on obtient immédiatement ces échelles. On peut aussi déterminer la division de la droite E F ; en prenant H F comme axe du système auxiliaire, on obtient immédiatement l'origine H et le point K qui représente $\lambda = -1$. On peut aussi déterminer la division homographique de la droite B D ; alors on se sert d'un système auxiliaire ayant A pour centre de convergence et un axe parallèle à A C ; B M est l'axe des λ. Il est utile de choisir convenablement les unités des échelles des figures 143 et 138 ; les unités des échelles des λ en B M, des v en ox (fig. 143), les unités des e, e', n en ox et oE (fig. 138) sont toutes les mêmes : cela offre de grands avantages pour l'usage des tableaux.

300. Résumé. Détermination par les tableaux d'un mur de hauteur donnée. — Soit (fig. 139) A'D' la hauteur du mur ; il faut distinguer les cas suivants :

Mur rectangulaire. — Nous avons vu (292) comment on trouve l'épaisseur du mur d'une hauteur égale à l'unité au moyen du tableau de la figure 138 ; on suit les chemins (fig. 138) MP, NP, puis PR, QR, puis RS ; l'épaisseur est représentée par OS, l'unité étant O1 ; si donc on prend (fig. 139) AD = O1, DC = OS, on obtient en ABCD la forme du mur

rectangle; il suffit de construire une figure semblable à celle-là pour obtenir le mur demandé AB'C'D' : on y arrive en prolongeant AC.

Mur avec fruit extérieur. — On opère comme précédemment, mais au lieu de s'arrêter en S, on porte le fruit en OU, on suit les chemins RT et UT, OT est l'épaisseur du mur de hauteur 1 ; on prend AD = OI, DF = OT, on obtient la forme du mur en AEFD; on obtient le mur demandé AE'F'D' en prolongeant AF.

Mur avec fruit intérieur. — Solution approchée. — Nous avons trouvé (296) que le point P (fig. 139) autour duquel il faut faire tourner le parement vertical AD pour avoir le parement incliné MN, est déterminé par l'équation :

$$AP = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi}{\pi'}\right).$$

Si on a eu soin de lire $\frac{\pi}{\pi'}$ sur l'axe OD (fig. 138) en suivant PR, on obtient aisément cette quantité; on prend la longueur qu'elle représente sur l'échelle $O\alpha$; ayant obtenu le point P, on obtient le point homologue P' en menant E' P' parallèlement à EP; si on donne l'épaisseur E'M' du mur au sommet, on joint M'P'. Cette solution est d'autant plus exacte que le fruit intérieur est petit.

Même cas. — Solution exacte. — On donne la hauteur F'H' du mur (fig. 139), la direction E'F' du parement extérieur; l'épaisseur E'M' au sommet. On détermine comme précédemment le mur EFDA; on obtient EM, en menant FM parallèlement à F'M'; il s'agit d'obtenir d'abord le mur FEMN de hauteur 1 et semblable au mur demandé Employons le tableau de la figure 143; nous devons d'abord déterminer le point R, en portant

$$BR = \frac{\lambda}{e'}.$$

Il est inutile de mesurer λ et e', et de calculer $\frac{\lambda}{e'}$; comme la hauteur du mur est égale à l'unité, en menant (fig. 139) MK parallèlement à AF, on aura :

$$\frac{HK}{1} = \frac{HM}{HA} = \frac{\lambda}{e'}, \qquad \text{donc} \qquad \frac{\lambda}{e'} = HK.$$

Si nous portions cette valeur BR, nous tomberions dans une partie du tableau non représentée; c'est pourquoi nous avons choisi une valeur inexacte de BR. On entre dans le tableau par R et N; on chemine suivant NP et RSP; puis du point P vers le point Q, on a : $v = OQ$. On obtient la direction du parement intérieur par la construction connue (fig. 145); on prend $AC = v$, $AB = \lambda + e'$, AC est la direction cherchée.

301. Mur triangle. — Nous avons déjà dit que la forme triangulaire est la forme d'égale stabilité au point de vue statique; cette forme théorique n'est pas admissible en pratique; il est indispensable que le mur ait une certaine épaisseur au sommet; néanmoins en calculant le mur triangle, et en donnant une épaisseur uniforme à la partie supérieure, on obtient un mur convenable ayant un léger excès de stabilité. On peut déterminer le mur triangle par la méthode précédente en donnant à λ une valeur convenable. On peut aussi déterminer le mur triangle au moyen d'un tableau graphique spécial.

Lorsque le parement intérieur est vertical, on peut déterminer le mur triangle au moyen du tableau de la figure 138; il suffit de suivre RS, jusqu'en T' sur une certaine droite OF; cette droite OF doit satisfaire à la condition $e' = n$ pour que le mur ait la forme triangulaire; on voit aisément comment le point F est déterminé. Prenons donc (fig. 144) $AC = OX$, $BC = OT'$, nous obtiendrons le mur ABC. Proposons-nous d'en déduire un autre BDE de même stabilité.

Soient : $n = BH$, $n' = HE$ les fruits extérieurs et intérieurs; le poids résistant du mur comprend les massifs BHD, DHE de maçonnerie, et le massif de terre DGE; le moment résistant est donc :

$$\pi' \frac{n}{2} \cdot \frac{2}{3} n + \pi' \frac{n'}{2} \left(n + \frac{n'}{3} \right) + \pi \frac{n'}{2} \left(n + \frac{2n'}{3} \right).$$

Égalons ce moment résistant au moment résistant du mur ABC qui est $\pi' \frac{e'^2}{3}$, on obtient l'équation :

$$\frac{\pi'}{6}(2n^2 + 3nn' + n'^2) + \frac{\pi}{6}(3nn' \quad 2n'^2) = \pi' \frac{e'^2}{3}.$$

Cette équation contient 5 variables, mais en divisant par $\pi' e'^3$, ou mieux par $\frac{\pi' e'^3}{6}$, on obtient une équation à trois variables :

$$2\left(\frac{n}{e'}\right)^3 - 2 + 3\frac{n}{e'}\frac{n'}{e'} + \frac{n'^2}{e'^2} + \frac{\pi}{\pi'}\left[3\frac{n}{e'}\frac{n'}{e'} + 2\left(\frac{n'}{e'}\right)^3\right] = 0 \quad (1)$$

Nous simplifierons encore les écritures en supposant $e' = 1$, $\pi' = 1$; les lettres n, n', π désigneront donc les rapports $\frac{n}{e'}$, $\frac{n'}{e'}$, $\frac{\pi}{\pi'}$; l'équation devient : $2n^3 - 2 + 3nn' + n'^2 + \pi(3nn' + 2n'^2) = 0$.

Cette équation contient deux variables n n' au second degré, mais si l'on remarque que les termes qui ne contiennent pas n', contiennent seuls n au second degré, que ces termes forment l'expression :

$$2n^3 - 2 = 2(n-1)(n+1),$$

on voit que l'on peut diminuer d'une unité le degré de la variable n en introduisant une inconnue nouvelle et cela de deux manières différentes en posant :

$$n' = \frac{1-n}{u} \quad \text{ou} \quad n = \frac{1+n}{v}.$$

Adoptons la première solution ; on peut vérifier (fig. 144) que u est la distance, à la crête supérieure du mur, du point F autour duquel il faut faire tourner le parement vertical AF pour obtenir le parement incliné ED; en effet, on a :

$$\frac{DK}{DH} = \frac{KF}{HE} \quad \text{ou} \quad \frac{DK}{1} = \frac{e'-n}{n'} \quad \text{d'où} \quad DK = u.$$

En remplaçant dans l'équation (1) n' par sa valeur exprimée au moyen de u, et en supprimant le facteur commun $1-n$ on obtient l'équation :

$$-2(1+n)u^2 + 3n(1+\pi)u + (1-n)(1+2\pi) = 0. \quad (2)$$

Cette équation ressemble à l'équation (2) du numéro 272; nous pouvons même la représenter au moyen du même tableau graphique (fig. 141), les lignes des λ devenant les

lignes des n, les lignes des u étant quelque peu modifiées. Posons :

$$x = \frac{n(1+\pi)}{1+n}, \tag{3}$$

$$y = \frac{1}{3}\frac{(1-n)(1+2\pi)}{1+n}. \tag{4}$$

Ces équations (3) et (4) ne diffèrent des équations (3) et (4) du numéro 298 que par le changement de n en λ ; on obtiendra donc la même figure 141 en ce qui concerne les lignes de π et des λ ; quant aux lignes des u, l'équation (2) devient :

$$-2u^2 + 3xu + 3y = 0. \tag{5}$$

Pour $y = 0$, on trouve $x = \frac{2u}{3}$, on obtient l'échelle OH' ; pour $u = -1$, on obtient la droite E'G' dont l'équation est :

$$y - x = \frac{2}{3}.$$

On obtiendra les lignes des u en joignant les points de l'échelle G'E' aux points correspondants de l'échelle OH'. L'inconvénient d'avoir des lignes des u à peu près parallèles à celles des π existe toujours, mais cependant il est beaucoup diminué ; le calcul prouve que la ligne $\pi = -\frac{1}{2}$ coïncide avec une ligne des u ; mais cette ligne est en dehors de la partie utile du tableau.

La seconde solution n'a pas cet inconvénient ; on trouve encore en suivant identiquement la même marche que précédemment, que le tableau de la figure 143 peut convenir, sauf en ce qui concerne les lignes des v dont l'équation devient :

$$-2v^2 + 2xv + 3y = 0.$$

Connaissant v, on obtient n' par une construction facile : on a :

$$n' = \frac{n+e'}{v}.$$

Soit (fig. 145) $AB = n + e'$, $AC = v$, BC est l'inclinaison du parement intérieur.

309. Autres tableaux graphiques. — On peut trouver, au moyen de la méthode des coordonnées générales, un grand nombre de tableaux graphiques relatifs au calcul des murs trapèzes et triangles ; nous avons précédemment donné les plus simples ; nous allons exposer rapidement quelques autres procédés ; leur examen peut être utile au lecteur qui voudrait se familiariser complètement avec la méthode, et l'appliquer à d'autres questions qu'il n'est pas possible d'aborder ici. Nous ne nous occupons que du mur triangle, mais on traiterait le mur trapèze par des procédés analogues.

1° Pour une hauteur 1, le moment sollicitant est $\frac{\pi}{6}\operatorname{tang}^2\frac{T}{2}$; en égalant le moment résistant du mur au double du moment sollicitant, on obtient :

$$\frac{\pi'}{6}(2n^2+3nn'+n'^2)+\frac{\pi}{6}(3nn'+2n'^2)=2\,.\,\frac{\pi}{6}\operatorname{tang}^2\frac{T}{2}. \quad (1)$$

En divisant par $\frac{\pi n^2}{6}$, on ramène le nombre de variables à 3 ; on obtient :

$$\frac{\pi'}{\pi}\left[2+3\frac{n}{n'}+\left(\frac{n'}{n}\right)^2\right]+\left[3\frac{n'}{n}+2\left(\frac{n'}{n}\right)^2-2\frac{\operatorname{tang}^2\frac{T}{2}}{n^2}\right]=0. \quad (2)$$

Posons $\qquad x=\frac{\pi'}{\pi}, \qquad y=\frac{2\operatorname{tang}^2\frac{T}{2}}{n^2}.$

Il vient : $x\left(2+3\frac{n'}{n}+\frac{n'^2}{n^2}\right)+3\frac{n'}{n}+2\frac{n'^2}{n^2}-2y=0.$

On obtient pour les lignes des $\frac{n'}{n}$ un système du second degré ; les autres lignes sont des parallèles aux axes ; il faut deux tableaux spéciaux pour trouver x et y.

2° On peut aussi diviser l'équation (1) par $\frac{1}{6}\pi'\operatorname{tang}^2\frac{T}{2}$ et pour simplifier les écritures supposer $\operatorname{tang}\frac{T}{2}=1$, on obtient :

$$2n^2+3nn'+n'^2+\frac{\pi}{\pi'}(3nn'+2n'^2-2)=0. \quad (3)$$

Prenons n' comme inconnue; posons :

$$x = \frac{3n\left(1+\frac{\pi}{\pi'}\right)}{1+2\frac{\pi}{\pi'}}, \quad y = \frac{2n^2 - 2\frac{\pi}{\pi'}}{1+3\frac{\pi}{\pi'}}.$$

On obtient pour lignes des n' :

$$n'^2 + n'x + y = 0.$$

En éliminant $\frac{\pi}{\pi'}$ des valeurs de x et y, on obtient les lignes des n :

$$3ny = 2x(2n^2 + 1) - 6n(1 + n^2).$$

En éliminant n des valeurs de x et y, on obtient les lignes des $\frac{\pi}{\pi'}$:

$$y = \frac{2}{9}\frac{x^2\left(1+2\frac{\pi}{\pi'}\right)}{\left(1+\frac{\pi}{\pi'}\right)^2} - \frac{2\frac{\pi}{\pi'}}{1+2\frac{\pi}{\pi'}}.$$

Les lignes des n' sont faciles à construire; elles forment un système du second degré enveloppant une parabole; on trace les droites $n = 0$, $n + - 1$; le système auxiliaire $U + x = 0$ détermine sur ces droites des échelles proportionnelles à celle des n'; on joint les points correspondants.

Les lignes des n forment un système du troisième degré : mais on reconnaît facilement qu'il y a un axe $y = 1$, on a alors $x = \frac{3}{2}n$; on obtient ainsi un point de chaque droite; pour pouvoir les tracer, il suffit de déterminer leurs directions au moyen de leurs coefficients angulaires :

$$\frac{2(2n^2+1)}{3n} = \frac{\frac{4}{3}n^2 + \frac{2}{3}}{n}.$$

Suivons la méthode générale pour construire une fonction entière; portons (fig. 146) $OA = 1$, $AB = n$, $OC = \frac{4}{3}$; on

obtient $CD = \frac{4}{3}n$; menons DE perpendiculairement à OD, $CE = \frac{4}{3}n^2$; si $HC = \frac{2}{3}$, on a $HE = \frac{4}{3}n^2 + \frac{2}{3}$; la règle de la division graphique donne :

$$FH = \frac{\frac{4}{3}n^2 + \frac{2}{3}}{n}.$$

En résumé, AB est l'axe des n, $OA = 1$, $OC = \frac{4}{3}$ ou même les rayons OBD et la perpendiculaire DF et si $HC = \frac{2}{3}$, HF est l'échelle des valeurs du coefficient angulaire; on obtiendra les directions des droites en portant $PH = 1$, et en joignant P aux différents points de l'échelle HF.

Les lignes $\frac{\pi}{\pi'}$ sont des paraboles; pour les construire, on commence par porter en abscisse sur une autre épure :

$$x' = \frac{2}{9}x^2,$$

les lignes des $\frac{\pi}{\pi'}$ deviennent des droites :

$$y = x' \frac{1 + 2\frac{\pi}{\pi'}}{1 + \left(\frac{\pi}{\pi'}\right)^2} - \frac{2\frac{\pi}{\pi'}}{1 + 2\frac{\pi}{\pi'}}.$$

Pour construire ces droites, il faut déterminer les ordonnées à l'origine et les coefficients angulaires. Sur Oy portons (fig. 147) $OB = 1 + \frac{\pi}{\pi'}$; sur Ox, $OA = 1 + 2\frac{\pi}{\pi'}$; joignons AB, et menons BC perpendiculairement à AB, OC est l'inverse du coefficient angulaire, car on a :

$$(OB)^2 = OA \times OC, \quad \text{d'où} \quad OC = \frac{(OB)^2}{OA} = \frac{\left(1 + \frac{\pi}{\pi'}\right)^2}{1 + 2\frac{\pi}{\pi'}}.$$

Si OP = 1, le rayon PC donne la direction de la droite. Portons OK = 1, KD est l'ordonnée à l'origine ; en effet si OK = 1, $KA = 2\frac{\pi}{\pi'}$; l'ordonnée à l'origine est :

$$\frac{2\frac{\pi}{\pi'}}{1+2\frac{\pi}{\pi'}} = \frac{KA}{OA}.$$

En appliquant la règle de la division graphique, en considérant KA comme la surface d'un rectangle de hauteur OA (68), on trouve que la base doit être égale à KD ; donc :

$$KD = \frac{KA}{OA} = \frac{2\frac{\pi}{\pi'}}{1+2\frac{\pi}{\pi'}}.$$

Ayant construit toutes ces droites, elles détermineront sur les parallèles à l'axe des y des échelles qu'il suffira de placer convenablement pour avoir les points des paraboles ; ainsi sur la droite $x = 1$, on portera l'échelle que les droites déterminent sur $x' = \frac{2}{9}$.

On peut éviter la construction des paraboles en construisant un tableau graphique spécial donnant la valeur de x ; en posant dans ce nouveau tableau $y = n$, on obtient pour les droites des $\frac{\pi}{\pi'}$ un système du premier degré :

$$x = \frac{3y\left(1+\frac{\pi}{\pi'}\right)}{1+2\frac{\pi}{\pi'}}.$$

On déterminera x par ce tableau, on entrera dans le tableau précédent par cette valeur de x, et la valeur de n, et on trouvera n' sur la ligne des n'. On dispose les deux tableaux de manière que les lignes des x soient les mêmes afin d'éviter une lecture. Ce système de deux tableaux a un

inconvénient; pour n très petit, l'intersection des lignes des n et des x est peu accusée. Il serait utile de prendre, au lieu de x, une autre variable auxiliaire.

3° On peut mettre l'équation (1) sous la forme d'une équation du second degré en n :

$$2n^2 + 3nn'\left(1 + \frac{\pi}{\pi'}\right) + n'^2\left(1 + 2\frac{\pi}{\pi'}\right) - \frac{\pi}{\pi'} = 0 \quad (3)$$

Posons :

$$x = n'\left(1 + \frac{\pi}{\pi'}\right) \quad y = n'^2\left(1 + 2\frac{\pi}{\pi'}\right) - 2\frac{\pi}{\pi'}$$

L'équation (3) devient l'équation des lignes des n :

$$2n^2 + 3nx + y = 0.$$

En éliminant $\frac{\pi}{\pi'}$ des équations qui donnent x et y, on obtient l'équation des lignes des n' :

$$y = 2x\,\frac{n'^2 - 1}{n'} - n'^2 + 2.$$

En éliminant n' des mêmes équations, on obtient l'équation des lignes des $\frac{\pi}{\pi'}$:

$$y = x^2\frac{1 + 2\frac{\pi}{\pi'}}{\left(1 + \frac{\pi}{\pi'}\right)^2} - \frac{\pi}{\pi'}.$$

Les lignes des n forment un système du second degré facile à construire; les lignes des n' forment un système du troisième degré, mais il y a un axe :

$$\text{pour } y = 1, \text{ on a : } x = \frac{n'}{2};$$

on obtient ainsi un point de chaque droite; on déterminera la direction de ces droites par une construction analogue à celle que nous avons employée dans la question précédente pour construire les lignes n, c'est-à-dire que l'on obtiendra successivement les échelles des n', des $2n'$, des $2n'^2 - 2$, des $\frac{2n'^2 - 2}{n'}$ par une construction semblable à celle de la fig. 146.

Les lignes des $\frac{\pi}{\pi'}$ sont des paraboles que l'on pourrait transformer d'abord en lignes droites comme précédemment; on peut simplifier la construction de ces paraboles en remarquant que si $\frac{\pi}{\pi'}$ varie en progression arithmétrique, les valeurs de x et y varient aussi en progression arithmétique; des valeurs de x et y, on tire en effet :

$$\Delta x = n' \Delta \frac{\pi}{\pi'} \quad \Delta y = 2(n'^2 - 1) \Delta \frac{\pi}{\pi'}.$$

On déduit de là que les lignes des $\frac{\pi}{\pi'}$ déterminent sur les lignes des n', des échelles proportionnelles à celles des $\frac{\pi}{\pi'}$; si on trace deux lignes des $\frac{\pi}{\pi'}$, on a deux points de ces échelles et on en déduit tous les autres; on peut prendre pour ces deux lignes, les suivantes qui sont des droites.

$$\frac{\pi}{\pi'} = -\frac{1}{2} \quad y = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{\pi'} = -1 \quad x = 0.$$

4° On peut supposer connue l'épaisseur e du mur rectangulaire, se donner le fruit intérieur n, et prendre comme inconnu le rapport k entre l'épaisseur moyenne du mur triangle et celle du mur rectangle :

$$k = \frac{n + n'}{2e}.$$

On obtient d'abord, en égalant le moment résistant du mur triangle à celui du mur rectangle, l'équation :

$$\frac{\pi'}{6}(2n^2 + 3nn' + n'^2) + \frac{\pi}{6}(3nn' + 2n'^2) = \frac{\pi'}{2} e^2.$$

Divisons par $\frac{\pi e^2}{6}$, et exprimons $\frac{n'}{e}$ au moyen de k, on a :

$$\left(\frac{n^2}{e}\right) - 2\frac{n}{e} k \left(\frac{\pi'}{\pi} - 1\right) - 4k^2 \left(\frac{\pi'}{\pi} + 2\right) + 3\frac{\pi'}{\pi} = 0. \quad (4)$$

Posons : $$x = k\left(\frac{\pi'}{\pi} - 1\right).$$

$$y = 4k^2\left(\frac{\pi'}{\pi} + 2\right) - 3\frac{\pi'}{\pi}.$$

On obtient pour ligne des $\frac{n}{e}$:

$$\left(\frac{n}{e}\right)^2 - 2\frac{n}{e}x - y = 0.$$

En éliminant $\frac{\pi}{\pi'}$ des équations qui donnent x et y, on obtient les lignes des k :

$$ky = x(4k^2 - 3) + 12k^3 - 3k.$$

En éliminant k des mêmes équations, on obtient les lignes des $\frac{\pi'}{\pi}$:

$$y = 4x^2\frac{\frac{\pi'}{\pi} + 2}{\left(\frac{\pi'}{\pi} - 1\right)^2} - 3\frac{\pi'}{\pi}.$$

Les lignes des $\frac{n}{e}$ et des $\frac{\pi'}{\pi}$ se construisent comme dans les cas précédents; les lignes des k se construisent en remarquant que pour $y = 6$, $x = 3k$; on obtient ainsi un axe rectiligne des k; la direction des lignes des k se détermine comme celle des n dans le premier exemple de ce numéro. On peut simplifier la construction des paraboles des $\frac{\pi'}{\pi}$ en remarquant comme au 3° que les lignes des k sont coupées par ces paraboles suivant des échelles proportionnelles à celles des $\frac{\pi'}{\pi}$; il suffit de connaître deux lignes des $\frac{\pi'}{\pi}$:

pour $\frac{\pi'}{\pi} = 1$, $x = 0$,

pour $\frac{\pi'}{\pi} = -2$, $y = 6$.

Une petite partie de l'épure est seule utile; les axes paraboliques sont presque rectilignes dans la partie utile du tableau.

§ 3. Hauteurs limites des murs précédents.

303. — Dans le calcul des dimensions des murs précédents, nous ne nous sommes pas occupés de la résistance des matériaux à l'écrasement; nous avons vu cependant (290) que si toutes les formes semblables ont même coefficient de stabilité, la pression par unité de surface varie dans le même rapport que la hauteur du mur et qu'il existe dès lors une hauteur limite que l'on ne peut dépasser sans craindre l'écrasement de la matière. Il est utile de déterminer ces hauteurs limites, parce que si on avait à construire un mur d'une hauteur plus grande, il faudrait en augmenter les dimensions. Rappelons que dans le cas d'un mur supportant son propre poids, la hauteur limite H est donnée par :

$$R' = \pi' H \quad \text{d'où} \quad H = \frac{R'}{\pi'}. \qquad (1)$$

R' étant la pression maxima par unité de surface. Dans le cas d'un mur de soutènement, la hauteur limite h est moindre que H, nous nous proposons de déterminer le rapport $\frac{h}{H}$.

304. Murs rectangles. — Si nous supposons le coefficient de stabilité égal à 2, le centre de pression de la section inférieure est au quart de l'épaisseur du mur, donc c'est la loi du triangle qui se produit; en appliquant la formule connue, on trouve :

$$p = \frac{2P}{3u} = \frac{8}{3}\pi' h.$$

Nous obtiendrons la hauteur limite h, égalant p à R' ou $\pi' H$; on trouve :

$$\pi' H = \frac{8}{3}\pi' h, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{h}{H} = \frac{3}{8}.$$

305. Mur avec fruit extérieur. — Il est facile de reconnaître que la loi du triangle se produira encore dans la section inférieure; le cas le plus défavorable à cette thèse est le mur triangle, or dans ce cas on a la loi du triangle sur toute l'étendue de la section; en effet, si c'est l'épaisseur, le poids résistant tombe à une distance $2\frac{e'}{3}$ de l'axe des moments, on a donc $u = \frac{e'}{3}$ (245). Considérons deux murs de hauteur égale à l'unité, l'un de profil rectangle, l'autre présentant un fruit extérieur; dans le premier cas, on a :

$$p = \frac{2}{3}\frac{P}{u},$$

dans le second cas :

$$p' = \frac{2}{3}\frac{P'}{u'}.$$

Soient h et h' les hauteurs limites dans les deux cas; on a :

$$R' = \frac{2}{3}\frac{P}{u}h = \frac{2}{3}\frac{P^2}{Pu}h.$$

$$R' = \frac{2}{3}\frac{P'}{u'}h' = \frac{2}{3}\frac{P'^2}{P'u'}h'.$$

Si on remarque que Pu et $P'u'$ représentent les moments résistants des deux murs de hauteur un, moments résistants qui sont égaux, on obtient en divisant ces deux équations :

$$\frac{h'}{h} = \frac{P^2}{P'^2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\frac{h'}{h}} = \frac{P}{P'}.$$

Le rapport $\frac{P}{P'}$ est celui des épaisseurs moyennes des murs :

$$\frac{P}{P'} = \frac{e}{e' - \frac{n}{2}}.$$

Mais nous avons trouvé (295) $e'^2 = e^2 + \frac{n^2}{3}$; on a donc :

$$\sqrt{\frac{h'}{h}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{n^2}{3e^2}} - \frac{n}{2e}}.$$

En remplaçant h par sa valeur $\frac{3}{8}$H, on trouve :

$$\sqrt{\frac{h'}{H}} = \frac{\sqrt{\frac{3}{8}}}{\sqrt{1+\frac{n^2}{3e^2}} - \frac{n}{2e}}. \qquad (3)$$

On peut indiquer les valeurs du rapport $\frac{h'}{H}$ sur le tableau $y'ox$ de la figure 138; ce tableau a été construit en portant $x = e$, $y' = \frac{n}{\sqrt{3}}$; l'équation précédente montre que le rapport $\frac{n}{e}$ et aussi $\frac{n}{e\sqrt{3}}$ est fonction de $\frac{h'}{H}$; cette équation peut être mise sous la forme :

$$\frac{n}{e\sqrt{3}} = \varphi\left(\frac{h'}{H}\right) \quad \text{ou} \quad y' = x\varphi\left(\frac{h'}{H}\right).$$

Les lignes d'égal $\frac{h'}{H}$ sont des lignes passant par l'origine; ces lignes étant tracées, il suffit de les graduer convenablement; on peut trouver cette graduation en construisant deux courbes; portons en abscisse (fig. 148) $\alpha = \frac{n}{e\sqrt{3}}$, en ordonnée le second membre de l'équation (3); portons ensuite en abscisse $\alpha = -\frac{h'}{H}$, en ordonnée le premier membre de l'équation (3); pour chacune des valeurs de $\frac{h'}{H}$, on trouvera successivement les points correspondants de deux courbes, et la valeur α qui n'est autre que la fonction φ; on obtient ainsi l'échelle des φ, que l'on porte sur la droite xF, en inscrivant la valeur correspondante de $\frac{h'}{H}$.

On peut aussi porter la valeur $\frac{h'}{H}$ en rayon vecteur à partir

de l'origine O sur la ligne $\frac{h'}{H}$ du tableau *y'oys* de la figure 138 ; pour construire la courbe, on opère comme il suit : soient (fig. 149) xoy' les axes, OB une droite $\frac{h'}{H}$, φ son coefficient angulaire $\varphi = bB$; portons $oa = 1$, $Aa = \varphi$, OA sera perpendiculaire sur OB ; on a :

$$OA = \sqrt{+\varphi^2} = \sqrt{1 + \frac{n^2}{3e^2}}.$$

Si on porte $AC = \frac{n}{2e} = \frac{\varphi\sqrt{3}}{2}$, le lieu des points C donne les valeurs :

$$\rho = \sqrt{1 + \frac{n^2}{3e^2}} - \frac{n}{2e}.$$

On a donc : $$\frac{h'}{H} = \frac{\frac{3}{8}}{\rho^2}.$$

Portons $OK = \sqrt[3]{\frac{3}{8}}$, joignons CK, menons KL perpendiculairement sur KC, et LD perpendiculairement sur KL, on trouve :

$$OL = \frac{(OK)^2}{\rho}, \qquad OD = \frac{(OL)^2}{OK} = \frac{(OK)^2}{\rho^2} = \frac{h'}{H}.$$

Le lieu des points D est la courbe cherchée; si on prenait OK plus grand, on obtiendrait $\frac{h'}{H}$ à une autre échelle.

306. Mur avec fruit intérieur ; solution approchée — Nous avons vu (296) que pour remplacer un parement intérieur vertical par un parement incliné, on pouvait négliger l'influence de l'augmentation des bras de levier des moments résistants et transformer le mur connu en un autre mur donnant lieu au même poids résistant. Dans ce cas, la pression maxima reste sensiblement la même et par conséquent la hauteur limite est la même que celle que nous

avons obtenue précédemment. Ces conclusions ne sont qu'approximatives. En réalité, la pression sera un peu plus faible dans le nouveau mur et l'on pourra atteindre des hauteurs h'' plus grandes que h'.

307. Mur avec fruit intérieur; solution exacte. — Considérons deux murs de hauteur égale à l'unité, l'un sans fruit intérieur, l'autre avec fruit intérieur; on a respectivement :

$$p' = \frac{2}{3}\frac{P'}{u'}, \qquad p'' = \frac{2}{3}\frac{P''}{u''}.$$

Les hauteurs limites h' et h'' s'obtiennent par les équations :

$$R' = \frac{2}{3}\frac{P'}{u'}h' = \frac{2}{3}\frac{P'^2}{P'u'}h',$$

$$R' = \frac{2}{3}\frac{P''}{u''}h'' = \frac{2}{3}\frac{P''^2}{P''u''}h'$$

En divisant ces équations et en remarquant que $P'u' = P''u''$, on obtient :

$$\frac{h''}{h'} = \frac{P'^2}{P''^2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\frac{h''}{h'}} = \frac{P'}{P''}. \tag{4}$$

Le rapport $\frac{P'}{P''}$ est facile à déterminer lorsqu'on a obtenu les dimensions du mur; il faut observer que P'' est le poids résistant total y compris les terres qui reposent sur le mur.

308. Même question. Tableaux graphiques. — On peut se proposer comme exercice de représenter les valeurs du rapport $\frac{h''}{h'}$ au moyen d'un tableau graphique; on a :

$$P' = \pi'\left(e' - \frac{n}{2}\right),$$

$$P'' = \pi'\left(\lambda - \frac{n}{2} + \frac{n'}{2}\right) + \pi\frac{n'}{2},$$

d'où

$$\sqrt{\frac{h''}{h'}} = \frac{e' - \frac{n}{2}}{\lambda - \frac{n}{2} + \frac{n'}{2} + \frac{\pi}{\pi'}\frac{n'}{2}}.$$

En divisant par e' et en adoptant les mêmes notations qu'au numéro 298, on a :

$$\sqrt{\frac{h''}{h'}} = \frac{1 - \frac{n}{2}}{\lambda - \frac{n}{2} - \frac{n'}{2} + \pi \frac{n'}{2}}. \qquad (5)$$

Cette expression contenant un trop grand nombre de variables, nous supposerons $n = 0$, alors $h' = h$; prenons dans ce cas le rapport inverse $\sqrt{\frac{h}{h''}}$; on a :

$$\sqrt{\frac{h}{h''}} = \lambda + \frac{n'}{2}(1 + \pi). \qquad (6)$$

Cette expression contient quatre variables, mais les variables λ, n', π satisfont à une relation, le rapport $\frac{h}{h''}$ est fonction de deux variables et peut s'obtenir par un tableau graphique; on obtiendra alors le rapport $\sqrt{\frac{h''}{h'}}$ par la formule (5) qui peut s'écrire :

$$\sqrt{\frac{h''}{h'}} = \frac{1 - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{h}{h''}} - \frac{n}{2}}. \qquad (7)$$

Au lieu de construire un tableau particulier donnant les rapports $\frac{h}{h''}$ ou $\sqrt{\frac{h}{h''}}$, il est préférable d'indiquer ces valeurs sur les tableaux des fig. 141 et 143, qui servent à déterminer les dimensions des murs; nous devons considérer séparément les deux solutions.

309. Première solution. — Éliminons de l'équation (6) la variable n au moyen de la variable u (298), on a :

$$\sqrt{\frac{h}{h''}} = \lambda + \frac{(1 + \pi)(1 - \lambda)}{2u}. \qquad (7)$$

Les trois variables du second membre satisfont à l'équation (2) du numéro 298; si on élimine l'une des variables, π par exemple, on trouve :

$$1-\sqrt{\frac{h}{h''}}=\frac{(1-\lambda)^2\left(1-u\right)\left(u-\frac{1}{3}\right)}{2\,u\left[u\lambda+\frac{2}{3}(1-\lambda)\right]}. \qquad (8)$$

Si on construit d'abord un tableau particulier, en choisissant des lignes des u et des λ de manière que les lignes des $\frac{h}{h''}$ soient les plus simples possibles, on pourra reporter ces lignes des $\frac{h}{h''}$ sur la fig. 141 en opérant comme si l'on copiait un dessin par la méthode des carrés; les carrés sont remplacés ici par des quadrilatères n'ayant pas la même forme sur les deux figures, mais la méthode est la même. L'une des lignes peut se tracer facilement, c'est la ligne $\frac{h}{h''}=1$, on trouve les trois droites :

$$\lambda=1, \qquad u=1, \qquad u=\frac{1}{3}.$$

Les autres courbes sont compliquées, on peut simplifier leurs constructions en traçant au préalable des courbes auxiliaires; l'équation (7) peut s'écrire en introduisant une variable auxiliaire α :

$$\frac{\sqrt{\frac{h}{h''}}-\lambda}{1-\lambda}=\frac{1+\pi}{2u}=\alpha.$$

Construisons d'abord les courbes :

$$\frac{1+\pi}{2u}=\alpha.$$

Pour y arriver, on porte d'abord sur une épure provisoire $\pi=y$, $u=x$, les lignes des α sont des droites; on les reporte sur la figure 141.

Ayant construit les lignes des α, on considère α comme une nouvelle coordonnée et on construit les courbes :

$$\frac{\sqrt{\frac{h}{h''}} - \lambda}{1 - \lambda} = \alpha.$$

On porte d'abord sur une épure provisoire $x = \lambda$, $y = \sqrt{\frac{h}{h''}}$; les lignes des α sont des droites convergentes ; reporte les lignes $\frac{h}{h''}$ sur la figure 141 et le problème est résolu.

310. Seconde solution. — Éliminons de l'équation (6) (308) la variable n' au moyen de la variable v (299) ; on a :

$$\sqrt{\frac{h}{h''}} = \lambda + \frac{(1+\pi)(1+\lambda)}{2v}. \qquad (7)$$

En éliminant la variable π au moyen de l'équation (2) du numéro 299, on trouve :

$$1 + \sqrt{\frac{h}{h''}} = \frac{(1+\lambda)^2 (v+1)\left(v+\frac{1}{3}\right)}{2v\left[v\lambda + \frac{2}{3}(1+\lambda)\right]}. \qquad (8)$$

Les lignes des $\frac{h}{h''}$ sont difficiles à construire au moyen de cette équation ; pour $\sqrt{\frac{h}{h'}} = -1$, on trouve cependant trois droites :

$$\lambda = -1, \qquad v = -1, \qquad v = -\frac{1}{3}.$$

Il est préférable de suivre une autre voie ; en introduisant une variable auxiliaire α, l'équation (7) devient :

$$\frac{-\lambda + \sqrt{\frac{h}{h''}}}{1+\lambda} = \frac{1+\pi}{2v} = \alpha.$$

Construisons d'abord les courbes :

$$\frac{1+\pi}{2v} = \alpha.$$

Pour cela, portons d'abord sur une épure provisoire $\pi = y$, $v = x$; les lignes des α sont des droites ; on les reporte sur la figure 143. Ayant construit les lignes des α, on considère α et λ comme nouvelles coordonnées et on construit les courbes :

$$\frac{-\lambda + \sqrt{\frac{h}{h''}}}{1+\lambda} = \alpha.$$

On porte d'abord sur une épure provisoire $x = \lambda$, $y = \sqrt{\frac{h}{h''}}$, les lignes de α forment un système du premier degré ; on reporte les lignes des $\frac{h}{h''}$ sur la figure 143 et le problème est résolu.

311. Mur triangle. — Calculons d'abord la hauteur limite H d'un triangle à parement intérieur vertical ; on a :

$$P = \pi' \frac{eH}{2}$$

$$u = \frac{e}{3}.$$

D'où $$R' = \frac{2}{3}\frac{P}{u} = \pi' H.$$

Cette formule n'est autre que la formule (1) du numéro 303 qui donne la hauteur limite d'un mur qui ne supporte que son poids.

Considérons deux murs triangles de hauteur égale à l'unité, le premier à parement intérieur vertical, le second avec fruit intérieur n' ; les pressions maxima sont données respectivement par les formules

$$p = \frac{2}{3}\frac{P}{u}, \qquad p' = \frac{2}{3}\frac{P'}{u'}.$$

Soient H et h les hauteurs limites de ces deux formes; on a :

$$R' = \frac{2}{3}\frac{P}{u}H = \frac{2}{3}\frac{P^2}{Pu}H.$$

$$R' = \frac{2}{3}\frac{P'}{u'}h = \frac{2}{3}\frac{P'^2}{P'u'}h.$$

En divisant ces deux équations membre à membre, on obtient, en remarquant que $Pu = P'u'$:

$$\sqrt{\frac{H}{h}} = \frac{P'}{P}. \qquad (9)$$

Le rapport $\frac{P}{P'}$ peut se calculer dans chaque cas; mais on peut aussi indiquer les valeurs de $\frac{h}{H}$ ou $\frac{H}{h}$ sur le tableau de la figure 141 qui permet de déterminer les dimensions. L'équation (9) peut s'écrire :

$$\sqrt{\frac{H}{h}} = \frac{n + n' + \frac{\pi}{\pi'}n'}{e'}.$$

ou si $e = 1$, $\pi' = 1$, $\sqrt{\frac{H}{h}} = n + n'(1 + \pi)$.

En introduisant les variables u ou v (301), on a :

$$\sqrt{\frac{H}{h}} = n + \frac{(1+\pi)(1-n)}{u}$$

ou

$$\sqrt{\frac{H}{h}} = n + \frac{(1+\pi)(1+n)}{v}.$$

On construit les lignes des $\frac{h}{H}$ en suivant la même marche qu'au numéro précédent, c'est-à-dire en mettant ces équations sous la forme :

$$\frac{n + \sqrt{\frac{H}{h}}}{1-n} = \frac{1+\pi}{u} = \alpha$$

ou $$\frac{-n+\sqrt{\frac{H}{h}}}{1+n} = \frac{1+\pi}{v} = \alpha.$$

et en construisant au préalable les lignes des α.

§ 4. Murs à gradins intérieurs.

En pratique pour faciliter la construction, on substitue des retraites successives à l'inclinaison régulière du parement intérieur ; si les retraites ont une faible hauteur, il est inutile de faire un nouveau calcul; mais pour des raisons particulières, on peut être amené à adopter des gradins de grande dimension ; dans ce cas on doit calculer directement les épaisseurs des différents tronçons; on peut aussi calculer le mur triangle ou trapèze et les transformer en murs à gradins en conservant le même coefficient de stabilité.

312. Transformation du mur triangle en mur à gradins. — Soit (fig. 150) SDL le mur triangle ; on veut le transformer en un mur à gradins de telle manière que pour la section inférieure de chaque gradin le moment résistant soit le même que celui du mur triangle. Nous remarquerons que par la transformation les bras de leviers ne seront diminués que d'une quantité très petite que nous pouvons négliger ; nous savons qu'une pareille hypothèse (298) ne donne pas lieu à une grande erreur ; d'après cela, il faut transformer le mur triangle de manière à conserver le même poids résistant. Cette transformation s'effectue rapidement grâce à l'intégration graphique. Montrons, par exemple, comment on calcule le troisième tronçon ARKS ; on doit avoir :

$$\text{poids (SDHK)} = \text{poids (SDML)}.$$

Mais par hypothèse on a calculé les deux premiers tronçons de manière que l'on ait :

$$\text{poids (ADCB)} = \text{poids (ADNE)}.$$

Retranchant, membre à membre, la seconde inégalité de

la première, retranchant en outre des deux membres le poids SABF, il restera l'équation de condition :

$$\text{poids (FCHK)} = \text{poids (FBENML)}.$$

On peut calculer le second membre de cette équation par une intégration graphique. Soient ZZ' l'axe du diagramme des inclinaisons, YY' la ligne des pôles pour le calcul des poids des maçonneries, XX' la ligne des pôles pour le calcul des poids des massifs de terre; les bases d'intégration varient en sens inverse des poids spécifiques π' et π, on obtiendra les lignes XX', YY' en portant à une échelle quelconque :

$$0\alpha = \pi', \qquad 0\beta = \pi.$$

Le poids FBENML est représenté par M'L ; la ligne intégrale comprend : 1° la ligne FN' intégrale de BE dont la direction est donnée en 11 sur le diagramme des inclinaisons ; 2° la ligne N'M' intégrale de PNML dont la direction s'obtient en 22; on remarque, pour obtenir cette dernière inclinaison, que l'ordonnée moyenne 0'2' du massif de maçonnerie PERL donne lieu à la même intégrale qu'une hauteur 0'2' de terre.

Le premier membre de l'équation de condition est l'intégrale du massif FCHK, la ligne intégrale est la droite FH' dont on obtient la direction en 33; en menant l'horizontale M'H' on détermine le point H' et par conséquent l'épaisseur du troisième tronçon. Cette méthode donne des dimensions trop faibles, mais l'erreur est inappréciable.

313 Transformation du mur trapèze en mur à gradins. — Si on détermine pour une certaine hauteur, les dimensions d'un mur trapèze ou rectangle DABC (fig. 151), on obtient immédiatement les dimensions d'un mur de hauteur quelconque en faisant varier ces dimensions dans le rapport des hauteurs (292). Il s'agit alors de déterminer un mur à gradins de telle manière que, pour un nombre quelconque de gradins, le poids résistant soit le même que celui d'un mur trapèze de même hauteur; on obtiendra ainsi un petit excès de résistance, parce que les bras de levier du moment résis-

tant vont augmenter. Supposons que l'on ait calculé les deux premiers tronçons de telle manière que l'on ait :

$$\text{poids (ADCB)} = \text{poids (ADNE)}.$$

On doit calculer le troisième tronçon de telle sorte que :

$$\text{poids (SDHK)} = \text{poids (SDML)}.$$

Retranchons la première égalité de la seconde, retranchons en outre le poids (AEPS), on obtient l'équation de condition :

$$\text{poids (PEBCHK)} = \text{poids (PNML)}.$$

Le second membre est représenté par M'L, la ligne intégrale PM' est parallèle à la droite 11 du diagramme des inclinaisons. La ligne intégrale PH' relative au premier membre, comprend : 1° l'intégrale de PEBF, ligne parallèle à 22; 2° l'intégrale FCHK, ligne parallèle à 33. En menant par M' une horizontale, on détermine le point H' et par conséquent l'épaisseur du troisième tronçon.

314. Méthode directe — Montrons d'abord comment on vérifierait la stabilité d'un mur donné. Il faut d'abord calculer les moments sollicitants pour différentes hauteurs de mur (fig. 152); la poussée sur une hauteur h est représentée par le poids d'un prisme triangulaire abc de base $ab = h$ et de hauteur $bc = h \operatorname{tg}^2 \frac{T}{2}$; cela résulte de la formule $q = \frac{\pi}{2} h \operatorname{tg}^2 \frac{T}{2}$. En intégrant deux fois la ligne ac, on aura d'abord la poussée et ensuite les moments sollicitants (105). Pour vérifier la stabilité du joint AB, construisons deux intégrales successives AC', AC'' du massif ADCB; menons la tangente à l'intégrale seconde au point C'' et prolongeons-la jusqu'en E; on sait (107) que c'est le lieu des moments du poids résistant; l'ordonnée AE est donc le moment résistant du mur. Le moment sollicitant est l'ordonnée ed; le coefficient de stabilité est $\frac{AE}{ed}$; on doit avoir :

$$AE = 2ed$$

Pour calculer les dimensions d'un mur de cette forme, on détermine successivement les différents tronçons en commen-

çant par le tronçon supérieur; montrons, par exemple, comment on calcule le troisième tronçon. Par hypothèse, les premiers tronçons sont calculés exactement; dès lors en passant du joint AB au joint SK, il faut que l'accroissement du moment résistant soit double de celui du moment sollicitant. Portons $SG = 2fg$, double de l'accroissement du moment sollicitant; par suite du déplacement du centre des moments de A en S, le moment du poids résistant des tronçons supérieurs au joint AB subit une augmentation égale à l'accroissement MN de l'ordonnée de la droite EC'; donc le moment du poids SABCHK doit être égal à $SG - MN = SG'$. Traçons les deux intégrales successives S'H, SH'' du massif SABCH; par G' menons une tangente à l'intégrale seconde; le point de contact H'' détermine l'ordonnée HK et l'épaisseur du troisième tronçon. On peut dessiner assez exactement l'intégrale seconde pour pouvoir y mener la tangente G'H''; mais il faut déterminer le point de contact avec précision; à cet effet, on mène sur le diagramme des inclinaisons de l'intégrale seconde, la droite 0μ parallèle à la tangente G'H''; on obtient ainsi l'ordonnée de l'intégrale première, le point H', et par suite le parement intérieur du troisième tronçon.

On peut aussi déterminer l'abscisse du point H'' par la construction géométrique suivante. Le côté BH' de l'intégrale première a pour équation $y = \alpha x$, si on prend comme origine des coordonnées le point F où cette droite coupe SG; l'arc correspondant de l'intégrale seconde est une parabole qui prolongée coupe l'ordonnée SG au point F' que l'on obtient aisément par le polygone circonscrit F'IB''; F'G' représente la surface d'un triangle de base x et de hauteur αx, donc :

$$F'G' = \frac{\alpha x^2}{2}.$$

C'est, d'après cette équation, que l'on doit déterminer x. Si x était connu, on construirait $\frac{\alpha x^2}{2}$ d'après la méthode générale qui permet de construire un polynome (253); on

prendrait $PF' = \frac{\alpha}{2}$, $PQ = 1$, $QR = x$; on mènerait PRL, puis LG' perpendiculairement à PL, on aurait :

$$F'L = \frac{\alpha}{2} \times x, \qquad F'G = \frac{\alpha x^2}{2},$$

De cette figure on connaît $F'P = \frac{\alpha}{2}$; car si on prend la base d'intégration des maçonneries comme unité de longueur, on a $\alpha = hh'$, d'où $F'P = \frac{hh'}{2}$. Si on décrit sur PG comme diamètre une demi-circonférence on obtient le point L, la droite PL, et par suite l'épaisseur $x = QR$ du troisième tronçon.

§ 5. Murs de soutènement avec contreforts.

315. Murs avec contreforts extérieurs. — Soit (fig. 153) ABCD le plan d'une certaine longueur d'un mur rectangulaire; AD est l'arête de rotation autour de laquelle on évalue le moment résistant; on est naturellement conduit à augmenter les bras de levier, en reportant la matière à une plus grande distance de l'axe des moments; on obtient la forme KLEFGHIM : c'est le mur à contrefort extérieur. Pour un même poids de maçonnerie, ce mur est plus résistant; pour une même résistance, il est donc plus économique. Il est difficile de calculer l'épaisseur du masque : la maçonnerie travaille comme dans une plate-bande; sa résistance dépend en grande partie du mode de construction. M. l'ingénieur Foy (1) propose de donner aux contreforts une largeur de 1 mètre et de les espacer de 4 mètres; il admet une saillie des contreforts égale à l'épaisseur du masque. Il nous semble que ces chiffres sont trop absolus; la distance des contreforts doit évidemment dépendre de l'épaisseur du masque; aussi nous admettrons simplement que la largeur du contrefort soit le

(1) *Nouvelles annales de construction.* 1865.

tiers du vide qui sépare les contreforts voisins ; nous reviendrons tantôt sur l'espacement des contreforts. Adoptons ces proportions ; égalons le moment de la figure KLEFGHIM à celui du rectangle ABCD ; soient : e l'épaisseur du mur rectangle, $e_1 = 2x$ celle du mur avec contrefort, x l'épaisseur du masque ; on trouve $4 \times (2x)^2 - 3x^2 = 4e^2$, d'où :

$$x = e\sqrt{\frac{4}{13}}, \qquad e_1 = e\sqrt{\frac{16}{13}}.$$

On obtient l'épaisseur e_1 par le tableau de la figure 138 de la même manière que l'épaisseur e ; il suffit de prendre l'épaisseur e_1 sur une ligne inclinée OK ; on obtient cette ligne en portant $OK = \sqrt{\frac{16}{13}}$ ou $xK = \sqrt{\frac{3}{13}}$.

On réalise une grande économie en remplaçant un mur rectangle par un mur à contreforts ; l'épaisseur moyenne e de ce dernier est

$$e' = \frac{2x + 3x}{4} = e\,\frac{5}{2\sqrt{13}} = 0{,}70\,e\,;$$

on réalise donc une économie de 30 pour cent.

Distance des contreforts. — Le masque MNPQ supporte la poussée des terres, il est soutenu par les contreforts ; si MN et PQ étaient deux joints, le masque devrait avoir l'épaisseur du mur ordinaire et il n'y aurait aucun avantage à employer des contreforts ; nous supposerons les matériaux enchevêtrés de telle façon que si les piliers résistent, la rupture du masque ne puisse se produire que suivant les lignes moyennes MM', PP' faisant avec la normale au mur un angle θ qui dépend du mode de construction. Le massif MM'P'P est sollicité par la poussée qui se développe sur la longueur M'P' égale à $l - 2x \operatorname{tang} \theta$. Dans le moment résistant du masque, il faudrait tenir compte des efforts nécessaires pour produire la séparation suivant MM' et NN' ; nous en tiendrons compte en supposant que le moment résistant du masque soit celui du massif MNPQ. On a alors en exprimant le moment de la poussée des terres au moyen de l'épaisseur e du mur rectangle :

$$lx^2 = (l - 2x \operatorname{tang} \theta)\, e^2.$$

Supposons tang $\theta = 1$, nous aurons :

$$l = \frac{2xe^2}{e^2 - x^2}.$$

Nous avons trouvé $x = e\sqrt{\frac{4}{13}}$; éliminons e de la valeur de l, on trouve :

$$l = \frac{26}{9}x, \quad \text{soit } l = 3x.$$

La largeur l' du contrefort est :

$$l' = \frac{1}{3}l = x.$$

Le pilier a donc une forme carrée. En résumé, on obtient l'épaisseur totale du mur sur la ligne OK (fig. 138) ; le masque a la moitié de l'épaisseur, le pilier a une forme carrée ; le vide entre deux contreforts est égal à trois fois l'épaisseur du masque : cela permet de déterminer immédiatement toutes les dimensions du mur.

Hauteur limite. — Considérons la partie du mur KLFGHIM ; la section horizontale de cette partie du mur a un axe de symétrie OX ; nous pouvons donc, pour étudier les pressions, appliquer la première méthode du numéro 252. Nous avons représenté (fig. 154) la moitié de cette section, située au-dessus de l'axe de symétrie ; on trouve les trois intégrales ABD, A'B'D', A''B''D'' ; les tangentes aux points D' et A' se coupent sur la verticale du centre de gravité O de la section ; en divisant OA en deux parties égales (244), on trouve le centre de pression ; il s'agit de déterminer l'axe neutre par tâtonnement. Si on prend Dd comme axe neutre, on mène la tangente D''δ' au point D'' ; on porte $d''\delta' = \delta'\delta''$; on obtient le centre de pression en δ. Pour l'axe neutre Bb, on trouve un centre de pression au tiers de Ab. Le véritable axe neutre est compris entre Bb et Dd ; si on essaie l'axe Cc situé au milieu de l'intervalle entre les deux précédents, on trouve que cet axe convient sans qu'il soit nécessaire de procéder à une interpolation. Supposons que le mur ait la hauteur

limite h, la pression en A sera égale à la limite R'; la pression à une distance x de l'axe neutre sera $\frac{R}{a}x$, si a est la longueur Ac; la pression totale est $\pi'\omega h$; on a donc l'équation :

$$\pi'\omega h = \frac{R'}{a} \int x d\omega.$$

Remplaçons R' par $\pi' H$, $\int x d\omega$ par M, on trouve :

$$\frac{h}{H} = \frac{M}{\omega a}.$$

La valeur du second membre est un rapport que l'on peut obtenir sans connaître les dimensions absolues de la section du mur dont la hauteur est égale à la hauteur limite; nous pouvons obtenir ce rapport en traçant la forme de la section à une échelle arbitraire; la figure 154 a été obtenue de cette façon. On a : $M = C'c'$; le produit ωa s'obtient par la tangente en D'', cette tangente est le lieu des moments de la section totale ω; l'accroissement de l'ordonnée de cette droite pour un déplacement d'abscisse égal à a est le produit ωa; en utilisant une parallèle EF à cette tangente, on trouve $\omega a = Ff$, d'où

$$\frac{h}{H} = \frac{C'c'}{Ff}.$$

On trouve en effectuant une nouvelle division graphique :

$$\frac{h}{H} = mn.$$

Soit approximativement $h = \frac{1}{5} H$.

On pourrait aussi trouver la longueur $\frac{M}{\omega} = a'$, d'où

$$\frac{h}{H} = \frac{a'}{a}.$$

316. Murs avec contreforts intérieurs. — Lorsqu'il est indispensable d'avoir un parement extérieur uni, il faut renoncer au mur à contreforts extérieurs; on peut employer, dans ce cas, des murs à contreforts intérieurs. Leur forme

est encore celle de la figure 153, mais il faut supposer les terres du côté des piliers. On suppose le masque invariablement lié aux contreforts; on reconnaît facilement que ces murs sont plus économiques que les murs pleins, mais moins économiques que les murs que nous avons étudiés dans le numéro précédent; en effet, à poids égal le moment résistant ne dépend que des bras de leviers; en mettant des contreforts intérieurs, on augmente déjà ces bras de leviers; mais ils augmentent davantage si on déplace le masque vers l'intérieur jusqu'à ce qu'on obtienne un mur à contreforts extérieurs. Supposons encore comme précédemment que l'épaisseur x du masque soit égale à la saillie du contrefort, que la largeur de ce dernier soit le tiers du vide entre deux piliers voisins; soient e l'épaisseur du mur rectangle, e_1 l'épaisseur $2x$ du mur que nous voulons calculer, on trouve :

$$3x^2 + (2x)^2 = 4e^2,$$

d'où $$x = e\sqrt{\frac{4}{7}}, \quad e_1 = e\sqrt{\frac{16}{7}}.$$

L'épaisseur e_1 s'obtiendra sur la droite OL de la figure 138 cette droite OL étant déterminée par la condition :

$$\mathrm{OL} = \sqrt{\frac{16}{7}} \text{ ou } x\mathrm{L} = \sqrt{\frac{9}{7}}.$$

L'épaisseur moyenne est :

$$e' = \frac{5x}{4} = e\frac{5}{2\sqrt{7}} = 0{,}93e.$$

L'économie sur le mur plein est donc de 7 pour cent.

Espacement des contreforts. — Le masque pour se renverser doit entraîner une partie de la maçonnerie du pilier; on peut admettre qu'une longueur $l + 2x$ du masque résiste à la poussée qui se produit sur la longueur l qui mesure l'espacement des contreforts; on trouve :

$$l = \frac{2x}{e^2 - x^2}.$$

voûtes de décharges, il faudrait empêcher la poussée de se transmettre sous les voûtes; il suffit pour cela d'établir un masque intérieur; nous sommes ainsi conduits à proposer la disposition suivante.

318. Murs à deux masques. — Formons le mur d'une série de piliers reliés par des voûtes et par deux masques, l'un intérieur, l'autre extérieur. Remplissons les vides par de la terre ou, ce qui vaut mieux, par des bricaillons ou des décombres. Le masque extérieur supporte une poussée très faible provenant des massifs logés sous les voûtes, le masque intérieur supporte la poussée des terres, mais comme ils sont maintenus par les contreforts et les voûtes, on peut donner aux deux masques une épaisseur totale égale à celle du masque unique des murs à contreforts, c'est-à-dire une épaisseur égale au vide. Soient x l'épaisseur totale des deux masques, n le nombre d'étages de voûte; on donnera au masque extérieur une épaisseur $x' = \frac{x}{n}$, car le masque extérieur supporte un massif d'une hauteur n fois plus petite que la hauteur du mur. Nous admettons encore que la largeur des contreforts soit le tiers du vide qui les sépare; nous admettrons de même que l'épaisseur des voûtes soit le tiers du vide qui les sépare. Les vides occupent donc les $\frac{3}{4}$ de la largeur, les $\frac{3}{4}$ de la hauteur, la moitié de l'épaisseur, soit une fraction $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{32}$ du volume total. Soient π' le poids spécifique des maçonneries; q la différence entre le poids spécifique des maçonneries et celui des matériaux qui remplissent les vides; déterminons le poids spécifique π_1 qu'il faut attribuer au volume total pour que le moment résistant ne soit pas changé; on a :

$$\pi_1 x = \pi' x - q \cdot \frac{9}{32}\left(\frac{x}{n} + x\right)$$

d'où

$$\pi_1 = \pi' - q\,\frac{9}{64}\left(1 + \frac{1}{2n}\right).$$

Si on entre dans le tableau de la figure 138 par la valeur π_1 au lieu de la valeur π', on obtiendra l'épaisseur e du mur par une hauteur égale à l'unité ; soit h la hauteur du mur, on aura :

$$2x = eh, \qquad x' = \frac{eh}{2n}, \qquad x'' = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{eh}{2}.$$

x', x'' sont les épaisseurs des deux masques. Soit $h' = \frac{h}{n}$ la hauteur d'un étage de voûte, on a aussi :

$$x' = \frac{eh'}{2}, \qquad x'' = (n-1)\frac{eh'}{2}.$$

La hauteur $h' = \frac{h}{n}$ pourrait être diminuée autant qu'on le voudrait, mais il convient que x' ne descende pas en dessous d'une certaine limite ; on peut admettre $x' = 0{,}30$ et déterminer h', puis n.

La hauteur limite que l'on peut atteindre dépend de la forme de la section et du poids des matériaux employés pour remplir les vides ; il faudra donc déterminer dans chaque cas particulier la pression maxima qui se développe pour être certain que l'écrasement des matériaux ne soit pas à craindre ; il faut un tracé graphique analogue à celui de la figure 154 pour chaque système de valeurs de n et de q.

Considérons, par exemple, le cas extrême où les matériaux de remplissage soient de même densité que la maçonnerie ; supposons le cas limite d'un nombre infini d'étages ; on a alors $x' = 0$ et la figure 154 peut être utilisée. On trouve comme précédemment :

$$\frac{h}{H} = \frac{M}{\omega a}.$$

La valeur de M s'obtient par un tracé que nous n'avons pas représenté sur la figure, mais qui ne diffère pas de ceux que nous avons déjà employés ; la surface ω est la surface de la section totale du mur, vide compris ; on trouve approximativement :

$$h = \frac{H}{11}.$$

On voit que la hauteur limite est plus petite que dans les murs précédents. En général, plus on obtient d'économie, plus les pressions augmentent, plus l'écrasement est à craindre. On augmente en quelque sorte la stabilité statique aux dépens de la résistance à l'écrasement. C'est dire que ces dispositifs ne sont recommandables que lorsque l'on a des matériaux de choix. Dans le cas contraire, les murs à sections pleines doivent être employés ; pour les grandes hauteurs, il faut même augmenter les dimensions de parties inférieures pour que les pressions limites ne soient pas dépassées ; on est amené alors à calculer une forme d'égale résistance à l'écrasement. Nous allons montrer comment on peut déterminer graphiquement une pareille forme ; nous choisirons le cas d'un mur de réservoir.

§ 6. Forme d'égale résistance à l'écrasement.

319. Problème à résoudre. -- C'est M. l'ingénieur Delocre qui a exposé le premier les principes au moyen desquels on devait déterminer la forme d'un mur de réservoir de grande hauteur (1). A un point de vue théorique on peut donner une épaisseur nulle au sommet du barrage ; les parements extérieurs et intérieurs doivent être établis suivant des profils d'égale résistance, c'est-à-dire suivant des profils déterminés par la condition qu'en chacun de leurs points la pression maxima soit égale à la limite admise R' ; on obtient les pressions maxima à l'extérieur quand le réservoir est rempli ; on obtient les pressions maxima à l'intérieur quand le réservoir est vide.

En général, il est indispensable d'établir une route sur le barrage ; aussi on s'éloigne notablement de la forme théorique en donnant une certaine épaisseur à la crête du barrage. Le barrage comprend alors trois parties : dans la partie supérieure les deux parements sont verticaux ; dans la partie moyenne, le parement extérieur est établi suivant un profil d'égale résistance, le parement intérieur reste vertical ; dans la partie inférieure, les deux parements sont établis suivant des courbes d'égale résistance.

(1) *Annales des ponts et chaussées*. 1866.

M. Delocre a établi les équations différentielles de ces courbes; mais elles sont trop complexes pour pouvoir s'en servir aisément; aussi a-t-il imaginé de remplacer les profils courbes par des profils polygonaux à déterminer de manière à atteindre la pression limite aux sommets. Le barrage est alors formé de tronçons de forme trapèze (fig. 155) dont on détermine successivement les dimensions par tâtonnements. L'intégration graphique permet d'abréger considérablement ces calculs; elle donne le moyen de calculer graphiquement la poussée, les poids résistants, les centres de pression. Le problème du numéro 248 nous permettra de déterminer les dimensions presque sans tâtonnement.

Soit (fig. 155) à déterminer la forme d'un mur de réservoir de 50 mètres de hauteur; l'épaisseur AA' à la crête est de 8 mètres; le niveau de l'eau est à $2^m.50$ du sommet du barrage; le poids spécifique des maçonneries est de 2200 kilogrammes; la limite des pressions est $R' = 6$ kilogrammes par centimètre carré. La hauteur du mur est divisée en tronçons de 5 mètres; il s'agit de déterminer les dimensions de ces tronçons pour que les pressions maxima soient égales à 6 kilogrammes par centimètre carré, sauf toutefois sur les parements verticaux où les pressions peuvent être moindres.

Avant d'aborder ce problème, nous indiquerons d'abord le moyen de déterminer les pressions dans un mur de forme donnée.

320. Bases d'intégration. — On considère une longueur de mur égale à 1 mètre; les poids des maçonneries et les poids des volumes liquides qui reposent sur le parement intérieur sont représentés par des surfaces. Soient $\pi = 1000$ kilogrammes, $\pi' = 2200$ kilogrammes les poids spécifiques de l'eau et des maçonneries; une surface ω représente un poids $\pi\omega$ ou $\pi'\omega$ selon que cette surface représente un volume liquide ou un volume de maçonneries; les bases d'intégration qu'il faut choisir pour obtenir directement les poids $\pi\omega$ ou $\pi'\omega$ sont (55) :

$$\lambda = \frac{ab}{c\pi}, \qquad \lambda' = \frac{ab}{c\pi'}.$$

Si on exprime toutes les longueurs en prenant pour unité la longueur qui représente le mètre, on a : $a = b = 1$, d'où l'on a :

$$\lambda = \frac{1}{c\pi}, \qquad \lambda' = \frac{1}{c\pi'}.$$

L'échelle des forces peut être choisie arbitrairement; mais nous savons qu'il est avantageux de choisir une échelle particulière. Une pression N sur un joint de longueur $3a$, soumis à la loi du triangle, produit la pression limite R', si l'on a :

$$R' = \frac{2N}{3a}, \qquad \text{d'où } a = \frac{2N}{3R'}.$$

Nous avons recommandé (248) de choisir l'échelle des forces de manière que N soit représenté par la même longueur que a; cette échelle ne convient pas ici, parce que l'on trouve des bases d'intégration trop grandes, sortant des limites de l'épure; nous choisirons l'échelle des forces de manière que N soit représenté par $3a$; on obtiendra a connaissant N en prenant le tiers de la longueur qui représente N, au moyen du compas de proportion. L'unité de force est représentée par c, la force N par Nc, on a donc :

$$Nc = 3a, \qquad \text{d'où } a = \frac{Nc}{3}.$$

En comparant cette valeur de a avec la précédente, on trouve :

$$c = \frac{2}{R'}.$$

Les valeurs de λ et de λ' deviennent :

$$\lambda = \frac{R'}{2\pi}, \qquad \lambda' = \frac{R'}{2\pi'}.$$

L'unité de longueur que nous avons admise est le mètre; on a donc R' = 60.000 kilogrammes; il vient :

$$\lambda = 30 \text{ mètres}, \qquad \lambda' = \frac{30}{2,2} \text{ mètres}.$$

Ces bases d'intégration sont :

$$\lambda = SU, \qquad \lambda' = S'U,$$

321. Poussée de l'eau. — Il faut déterminer la poussée de l'eau sur toutes les hauteurs qui comprennent un certain nombre de tronçons. On peut opérer comme nous l'avons fait au numéro 314 pour déterminer la poussée des terres; la poussée est égale au poids d'un prisme triangulaire de liquide; ce poids est représenté par la surface d'un triangle; on obtient les différentes poussées en intégrant une droite avec la base d'intégration relative aux poids des volumes liquides. Dans la figure 155, nous avons remplacé l'intégration par une multiplication; sur une hauteur $h = On$, la poussée est le poids d'un volume liquide que l'on peut représenter par un triangle ou bien par un rectangle de hauteur deux fois moindre; ce rectangle a pour base h, et pour hauteur $\overline{nn'} = \frac{h}{2}$; il en est de même pour d'autres profondeurs, mais les hauteurs des rectangles que l'on doit considérer sont les ordonnées de la droite On', si on prend la verticale On comme axe d'abscisses. On doit donc multiplier les ordonnées d'une droite par ses abscisses; on doit évidemment prendre pour base d'intégration la base λ qui convient pour l'évaluation des poids des volumes liquides. Soient : $OT = \lambda$, Ty l'axe du diagramme des inclinaisons, $T\nu = nn'$; joignons $O\nu$; on obtient le point n''; on a $q = nn''$. On trouve de même les autres points de la courbe On''. On sait que les poussées agissent aux deux tiers des profondeurs; elles sont donc déterminées en grandeur et en position.

322. Poids des volumes liquides. — Les poids des volumes liquides qui reposent sur le parement intérieur sont représentés par les surfaces comprises entre le profil de ce parement et la droite OX qui représente le niveau liquide; on obtient donc ces poids en intégrant graphiquement le contour OB'C'N' rapporté à l'axe OX; on intègre par polygone circonscrit; les directions des côtés sont S2, S3, S4.... S8.

323. Poids des maçonneries. — Il faut déterminer les poids des différents tronçons; chaque tronçon est un trapèze de hauteur égale à 5 mètres; on peut le transformer en un

rectangle de même hauteur dont la base est la distance des milieux des côtés non parallèles du trapèze; on est donc ramené à intégrer une droite unique $y = 5$ mètres; l'intégrale est la droite VW parallèle à S'K, si UK = 5; cette droite unique permet de trouver les poids de tous les tronçons, il suffit de prendre l'accroissement de l'ordonnée de cette droite pour un accroissement d'abscisse égal à la largeur moyenne du tronçon. On trouve ainsi les poids P_1, P_2, P_3, P_4.... P_8; le poids P_1 doit être répété trois fois pour obtenir le poids de la partie rectangulaire du barrage.

324. Centres de pressions. — Soit à chercher les pressions sur le joint NN'; supposons d'abord le réservoir rempli d'eau; il s'agit de composer la poussée Q8 avec les poids des volumes liquides et les poids des maçonneries. On doit tracer une ligne des résultantes; cette ligne est une intégrale seconde (133). Pour composer la poussée Q8 avec les poids des volumes liquides, il faut intégrer la ligne ON'' en prenant une base d'intégration égale à la poussée et en prenant la ligne d'action de cette poussée comme premier élément de l'intégrale. On intègre par polygone circonscrit avec côtés auxiliaires (69); pour chaque côté du profil, nous avons obtenu deux côtés dans l'intégrale première, nous obtiendrons trois côtés dont deux tangents à l'intégrale seconde; des simplifications que nous ferons connaître tantôt ont été apportées dans le tracé des lignes de résultantes représentées sur la figure. Le dernier élément de l'intégrale seconde dont nous venons de nous occuper, est la ligne d'action de la résultante des pressions de l'eau; cette résultante est représentée en grandeur et direction par 80 sur le diagramme des résultantes auxiliaires. On doit ensuite composer cette force avec les poids des maçonneries; ces poids sont des forces isolées P_1, P_2, P_3, etc., connues en grandeur et en position; on porte ce poids sur l'axe On en OR_1, R_1R_2, R_2R_3, etc...; on obtient sans difficulté la ligne des résultantes de ces poids: le dernier côté de cette ligne est la ligne d'action de la résultante de toutes les forces qui sollicitent le massif qui repose sur le joint NN'; ce côté coupe le joint NN' au point α; c'est

le centre de pression dans l'hypothèse du réservoir plein. Lorsque le réservoir est vide, la force sollicitante ne comprend que le poids des maçonneries; on prolonge les côtés de la ligne des résultantes qui comprennent entre eux les poids des maçonneries; on obtient (131) le poids résultant et le centre de pression α'. Si on examine la ligne des résultantes tracée sur la figure, on remarque que le nombre de côtés est beaucoup moindre que celui que l'on obtiendrait si on appliquait la méthode que nous venons d'exposer; cela provient de ce que nous avons profité de certains résultats acquis avant de tracer la ligne Q8. Supposons que tous les tracés relatifs au joint MM' soient effectués; la ligne des résultantes Q7 est tracée; en introduisant le poids P_8, on obtient le côté pointillé; on peut obtenir le poids résultant des maçonneries qui reposent sur le joint NN'; on peut obtenir aussi (131) la résultante des poids des volumes liquides qui reposent sur le parement B'M'; c'est pour ce motif que la ligne des résultantes Q8 ne comprend que quatre sommets : deux sommets pour le nouveau volume liquide, un sommet pour le poids résultant des volumes liquides déjà calculés, un sommet pour le poids résultant des maçonneries.

395. Calcul graphique des dimensions. — Les tronçons se calculent successivement en commençant par le haut. Montrons, par exemple, comment on détermine les dimensions du joint NN'. Le joint MM' est connu; la ligne des résultantes Q7 est tracée. On mène les lignes MN et M'N' en s'inspirant de la forme du profil déjà calculé. On détermine le poids P_8 du nouveau tronçon; on introduit ce poids dans la ligne Q7, on obtient le côté pointillé; on détermine comme nous l'avons dit précédemment le centre de pression α' dans l'hypothèse du réservoir vide. Les points N et N' ne sont pas encore déterminés exactement, mais les petits déplacements que ces points pourront subir dans la suite du calcul exerce une si faible influence sur le poids résultant des maçonneries que l'on peut considérer ce poids résultant et son point d'application α' comme fixés invariablement. On détermine la position du point N' par la construction graphique connue (248) ou bien au moyen du tableau de la figure 109 (249).

Le point N' étant connu, on continue l'intégrale des poids des volumes liquides en y introduisant le trapèze qui repose sur la face M'N'; on peut alors tracer la ligne des résultantes Q8; on obtient le centre de pression α. Le déplacement que l'on devra peut-être faire subir au point N, ne produira sur N' qu'un déplacement insensible; on peut considérer la résultante appliquée au point α comme fixée invariablement; on obtient le point N par le même procédé que celui que nous avons employé pour obtenir le point N'. Si les déplacements à faire subir aux points N et N' étaient quelque peu sensibles, on devrait corriger l'évaluation des forces, la détermination des points α et α'; on recommencerait la détermination des points N' et N; mais presque toujours ces tâtonnements sont inutiles.

Il est utile de remarquer que certaines lignes de la figure 155 peuvent être tracées définitivement avant de passer à la détermination des dimensions des tronçons; ce sont: la courbe des poussées On'', les diagrammes des inclinaisons des intégrales premières et secondes des poids des volumes liquides, la ligne VW intégrale du poids d'un tronçon; les autres lignes se déterminent de proche en proche.

326. Autre méthode. — On peut perfectionner le procédé que nous venons d'employer pour déterminer les dimensions d'un joint NN', en résolvant le problème suivant: on donne dans deux hypothèses extrêmes les pressions résultantes P en α, P' en α'; on demande de calculer le joint NN'.

On doit avoir à la fois les deux équations (248):

$$z^2 + az = ab \qquad (1)$$

$$z^2 + a'z = a'b'. \qquad (2)$$

L'inconnue z représente le tiers de la longueur du joint; les longueurs a et a' sont proportionnelles à P et P'; en adoptant les mêmes échelles que tantôt

$$a = \frac{1}{3}\mathrm{P}, \qquad a' = \frac{1}{3}\mathrm{P}';$$

les longueurs b et b' sont $b = \alpha\mathrm{N}'$, $b' = \alpha'\mathrm{N}$; si on pose

$$n = \overline{\alpha\alpha}$$

on a l'équation de condition :

$$b + b' = 3z - n. \qquad (3)$$

Si on élimine b et b' entre les équations (1), (2), (3), on trouve :

$$z^2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right) - z + n = 0.$$

Posons :

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}. \qquad (4)$$

Il vient :

$$z^2 - mz + nm = 0. \qquad (5)$$

L'équation (5) ressemble beaucoup aux équations (1) ou (2); on trouverait aisément comme aux numéros 248 et 249 une construction géométrique et un tableau graphique permettant d'obtenir la valeur de z. On obtiendrait b par l'équation (1) ou le tableau de la figure 109.

La valeur de m donnée par l'équation (4) s'obtient très facilement; on a :

$$3a = r_3 R_3, \qquad 3a' = OR_3;$$

déterminons le conjugué harmonique L du point R_3 par rapport à la droite Or_3; on démontre aisément que :

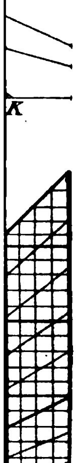
$$\frac{1}{LR_3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{OR_3} + \frac{1}{R_3 r_3}\right),$$

d'où l'on déduit $\qquad m = \frac{1}{6} LR_3.$

L'expérience nous a indiqué que la méthode du numéro précédent suffisait; c'est pourquoi nous laissons au lecteur le soin d'appliquer celle-ci.

(*A continuer.*)

T S



MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION GRAPHIQUE ET SES APPLICATIONS,

PAR

J. MASSAU,

Ingénieur des ponts et chaussées, à Gand.

(Extrait des *ANNALES DE L'ASSOCIATION DES INGÉNIEURS* sortis des Écoles spéciales de Gand.)

CHAPITRE III.

Problèmes sur l'équilibre des voûtes.

§ 1. Généralités.

327. Polygones des pressions. — Soit (pl. 5, fig. 156) *efbcda* une voûte ordinaire en berceau ; il suffit d'en considérer une longueur égale à 1 mètre mesurée suivant les génératrices du berceau. Si, par la pensée, on enlève la culée *ef*, il faudra, pour maintenir l'équilibre de la voûte, introduire une réaction R ; on obtiendra la pression sur un joint quelconque *th*,

en composant la réaction R avec le poids du massif *efih* et la surcharge qui repose sur cette partie de voûte. Composons la réaction R avec les différents poids que l'on rencontre en passant du joint *ef* aux suivants; nous obtiendrons successivement les pressions sur ces joints. Ces pressions forment un polygone qui n'est autre que la ligne des résultantes auxiliaires des poids des voussoirs avec leurs surcharges, en prenant la réaction R comme force auxiliaire (130).

Connaissant la réaction R, on obtiendra le polygone des pressions par un tracé connu (136). On porte Q 1 = R; on porte les poids en 12, 23, 34...; on obtient en Q2, Q3, Q4,... les pressions sur les différents joints; on trace le polygone des pressions en menant successivement ses côtés parallèlement aux rayons Q1, Q2, Q3,.., les sommets du polygone se trouvent sur les verticales des centres de gravité des poids des voussoirs et de leur surcharge.

Généralement, il existe un plan de symétrie *ab* par rapport à la voûte et aux charges qu'elles supportent. Imaginons un joint fictif *ab* dans ce plan; la pression sur ce joint est horizontale par raison de symétrie : cette pression est la *poussée* de la voûte. Dans ce cas, il suffit de considérer la demi-voûte *abcd*. Enlevons, par la pensée, l'autre demi-voûte; il faut introduire la *poussée q* sur le joint *ab*. Si on construit la ligne des résultantes de la poussée *q* avec les poids que l'on rencontre en marchant de gauche vers droite, on obtient le polygone des pressions en ABD.

328. Courbe des centres de pression. — Sur chaque joint, on obtient un centre de pression. Si on imagine des joints fictifs infiniment rapprochés, le lieu des centres de pression est une courbe que M. Méry a appelé courbe des centres de pression ou simplement *courbe de pression*.

329. Ligne de pression. — Lorsque les joints sont infiniment voisins, le polygone des pressions a pour limite une autre courbe que nous appellerons *ligne des pressions*. Cette courbe est la ligne des résultantes auxiliaires des poids continûment répartis de la voûte et de la surcharge, en prenant l'une des pressions ou la poussée à la clef comme force auxi-

liaire. Nous avons démontré (133) que cette courbe est l'intégrale seconde de la charge qu'il faut introduire par unité de longueur horizontale.

Objet de ce chapitre. — Dans le paragraphe 2, nous donnerons le tracé graphique d'une ligne de pression, connaissant la poussée et le centre de poussée. Le tracé du polygone des pressions que nous avons rappelé au numéro 327, ne répond qu'en partie à cette question, car il suppose connus les centres de gravité et les poids des voussoirs et de la surcharge. En considérant la ligne des pressions comme une intégrale, on peut résoudre la question d'une manière plus complète.

Nous avons montré précédemment comment on détermine une ligne des résultantes, étant données trois conditions dont une de position (135, 144). Tous ces problèmes s'appliquent à la détermination des lignes des pressions dans la voûte non symétrique. Dans une voûte symétrique, deux conditions suffisent : ce cas particulier sera traité dans le paragraphe 3.

Les relations entre la courbe de pression et la ligne des pressions ainsi que les problèmes qui s'y rapportent feront l'objet du paragraphe 4.

Le paragraphe 5 contient la théorie des courbes des pressions normales conjuguées aux courbes des poussées.

§ 2. Tracé graphique d'une ligne des pressions.

330. Joints verticaux. — Soit (fig. 157) la voûte *cabd* supportant un massif *cdgf*. Les forces verticales peuvent être considérées comme les poids des éléments des surfaces *cdba* et *cdgf*; on doit attribuer à ces surfaces deux poids spécifiques différents : à la première le poids spécifique des maçonneries, à la seconde le poids spécifique moyen des terres et matériaux supportés. Menons des joints suffisamment voisins pour assimiler les surfaces comprises entre ces joints à des trapèzes; on intègre alors par la méthode du polygone

circonscrit; les sommets du polygone AB circonsrit à la première intégrale se trouve au milieu des intervalles qui séparent les joints voisins. On obtient les directions des côtés en suivant une méthode déjà employée applicable aux cas où les aires ont des poids spécifiques différents. Les bases d'intégration (55) et 312) sont dans le rapport inverse des poids spécifiques :

$$\frac{OP}{OP'} = \frac{\pi'}{\pi}.$$

La direction de l'élément de l'intégrale au point N qui correspond au joint mn serait Pn' s'il n'y avait que la surcharge; cette inclinaison correspond à la hauteur $p'n'$ de maçonnerie; on trouve pm' pour l'inclinaison cherchée.

On obtiendra la ligne des pressions en traçant l'intégrale seconde pour une base d'intégration égale à la poussée (133); on peut intégrer par la méthode du polygone circonscrit avec un côté auxiliaire comme l'indique la figure.

Si les joints sont très rapprochés, on peut aussi assimiler les arcs de l'intégrale première à des droites et supprimer ce côté auxiliaire. Si au contraire les joints sont assez éloignés, on pourra assimiler les arcs de l'intrados et de l'extrados à des paraboles du 3e degré que l'on déterminera par les tangentes extrêmes; l'intégrale première comprendra pour chaque arc deux côtés auxiliaires; l'intégrale seconde en comprendra trois (69).

Dans le cas qui nous occupe, la courbe des centres de pression est identique avec la ligne des pressions; nous allons voir qu'il n'en est plus de même dans le cas ordinaire où les joints sont obliques.

331. Joints quelconques. — Montrons tout d'abord que la ligne des pressions diffère de la courbe des centres de pression. Soient : (fig. 156) mn, un joint quelconque, $m'n'$ un joint infiniment voisin; en passant du joint mn au joint $m'n'$, il faut introduire un poids élémentaire qui est la résultante du poids du voussoir infiniment petit $mnm'n'$ et, s'il y a lieu, de la surcharge qui repose sur nn'. Soient : FE, la

ligne d'action de cette résultante; αE, la pression sur le joint mn; en composant ces deux forces, on obtient une résultante $\alpha' E$, c'est la pression sur le joint $m'n'$. Le point E est l'intersection de deux tangentes infiniment voisines de la ligne des pressions; il a pour limite le point de contact de la pression et de son enveloppe. Convenons d'appeler *centre de gravité d'un joint* la limite du centre de gravité d'un voussoir infiniment petit et de la surcharge; nous pouvons dire que *la pression sur un point touche son enveloppe sur la verticale du centre de gravité de ce joint.*

Il résulte de là que pour obtenir un centre de pression, il faut prolonger la tangente à la ligne des pressions jusqu'au joint dont le centre de gravité se trouve sur la verticale du point de contact. La courbe de pression est toujours à l'extérieur de la ligne des pressions Ces deux courbes ne se confondent que dans deux cas : 1° si les joints sont verticaux; 2° si le point α coïncidait avec le point F. Le premier cas ne se présente jamais; le second cas ne peut se présenter que pour une forme de voûte calculée à cette fin.

Nous indiquerons la manière de tracer la ligne des pressions dans les différents cas; on en déduira facilement la courbe des centres de pression.

332. Surcharge nulle. — *Première méthode.* — Soit la voûte de la figure 158; on mène des joints assez rapprochés; les poids des voussoirs sont représentés par des figures curvilignes mais que l'on peut assimiler à des quadrilatères; on obtient le centre de gravité par la méthode de Poncelet. Considérons le voussoir *abcd*; soit bh la projection de la diagonale bd sur une perpendiculaire à la diagonale ac; la la surface S du quadrilatère se compose de deux triangles de base ac; bh est la somme des hauteurs; on a donc :

$$S = \frac{ae}{2} \times bh.$$

Portons les moitiés des diagonales ac, de... en $\alpha\beta$, $\beta\gamma$,...; portons les hauteurs analogues à bh en ordonnées; les poids des voussoirs sont les poids des rectangles $A\alpha\beta$, $B\beta\gamma$...; on

les obtient par une intégration. Les poids des différentes parties de la voûte sont les ordonnées 01, 02, 03... de l'intégrale première $\alpha B'C'D'E'$. Soit Q0 la poussée; Q0123 est le diagramme des pressions; on obtient la ligne des pressions 01234 par la construction connue.

Au lieu de porter en abscisse les demi-diagonales, on peut porter les diagonales entières, sauf à prendre une base d'intégration deux fois plus grandes.

Deuxième méthode. — La ligne des pressions est l'intégrale seconde de la charge par unité de longueur horizontale (133); proposons-nous d'abord de déterminer l'intégrale première ou la ligne des charges totales. Soient : (fig. 159) ρ le rayon de courbure de l'intrados ou plus généralement la distance à l'intrados de l'intersection de deux joints infiniment voisins,

e l'épaisseur de la voûte,

$d\theta$ l'angle de deux joints,

dP le poids élémentaire qu'il faut introduire entre ces deux points : on a :

$$dP = \pi' \frac{(\rho+e)^2 - \rho^2}{2} d\theta = \pi' e \left(\rho + \frac{e}{2}\right) d\theta.$$

Portons sur l'axe $A'x$ des longueurs proportionnelles à $d\theta$:

$$x = R\theta, \qquad dx = R\,d\theta.$$

Dans le cas d'un intrados circulaire, on prendra R égal au rayon de l'intrados. Portons en ordonnée :

$$y = \left(\rho + \frac{e}{2}\right) \frac{e}{R}.$$

On a :

$$dP = \pi' y\, dx.$$

On est ramené à une intégration graphique ordinaire (1).

(1) On pourrait supposer P porté en rayon vecteur et θ en argument. On est amené à effectuer une intégration graphique en coordonnées polaires. On intègre par éléments en se servant de la sous-normale :

$$\frac{dP}{d\theta} = \pi' e \left(\rho + \frac{e}{2}\right).$$

Prenons, par exemple, le joint ab; on obtient y par une quatrième proportionnelle :

$$Oa = R, \quad af = e, \quad Oc = \rho + \frac{e}{2}, \quad y = ch = B\beta.$$

Les abscisses s'obtiennent en développant les arcs $R\theta$ de la circonférence de rayon R. On trouve ainsi la courbe AB.

En intégrant cette courbe, on obtient A'B' dont les ordonnées donnent les valeurs de P. La ligne A'B' n'est pas encore la ligne des charges totales ou la dérivée de la ligne des pressions; pour obtenir cette dernière courbe, il faut déplacer convenablement les ordonnées de l'intégrale A'B'. Ainsi l'ordonnée $B'\beta$ qui représente le poids de la partie de voûte comprise entre la clef et le joint ab, doit être déplacée jusqu'à ce qu'elle passe par le centre de gravité du joint ab; car c'est en ce point que s'introduit le poids élémentaire dP quand on passe du joint ab à un joint infiniment voisin. On obtient ainsi la courbe ponctuée qu'il suffit d'intégrer pour obtenir la ligne des pressions. On doit évidemment effectuer les deux intégrations par approximation; on assimilera les courbes à des suites d'arcs de paraboles; on obtiendra une plus grande exactitude que par la méthode précédente où nous avons assimilé les voussoirs à des quadrilatères.

Il est nécessaire de déterminer le centre de gravité des joints.

Soit (fig. 160) le joint AB; il s'agit de déterminer le centre de gravité du voussoir infiniment petit ABB'A' au moment où A'B' vient se confondre avec AB. Nous savons déjà que ce point se trouve sur AB; cherchons la ligne d'action du poids de la surface ABB'A' dans l'hypothèse où ce poids agirait suivant une normale au joint AB. Cette ligne d'ac-

---

Soit le joint cd; t, son milieu; kd la base d'intégration des maçonneries; tm une perpendiculaire sur kc; om une perpendiculaire sur on; mn est la sous-normale de la courbe des P. Les forces P peuvent être portées à partir du pôle O, ou à partir d'une circonférence de rayon quelconque.

tion ne sera pas changée si on augmente dans un même rapport les dimensions de la surface dans le sens d'une normale à AB; on est amené à chercher le poids d'une aire finie, si on choisit convenablement ce rapport; cette aire est le trapèze BB''A''A, lorsque l'on supprime les aires infiniment petites qui s'annulent au moment où A'B' vient en AB. On déduit de là la construction suivante : menons, par l'intersection de deux joints infiniment voisins, la droite A''B''; joignons les points A'' et B'' aux points e, e' qui divisent AB en trois parties égales; projetons sur AB le point d'intersection i des droites A''e et B''e'; la projection ainsi obtenue est le centre de gravité du joint. En appliquant cette construction aux différents joints, on obtient le lieu géométrique des centres de gravité des joints; on voit (fig. 159) que ce lieu diffère peu du lieu des milieux des joints.

Troisième méthode. — Déterminons pour chaque joint la charge par unité de longueur; on obtiendra (133) la ligne des pressions par une double intégration. Soient (fig. 160) : AB, un joint quelconque; ab, le lieu des centres de gravité des joints; ac, la projection horizontale de ab. Le poids du voussoir ABB'A' doit être réparti sur la longueur ac; nous assimilerons ce poids à une charge de hauteur y de maçonnerie; on a :

$$y \times ac = \text{AB} \times hf,$$

hf étant la perpendiculaire élevée au milieu de AB.

On en déduit :

$$y = \text{AB} \times \frac{hf}{ac}.$$

Mais on peut remplacer le rapport $\frac{hf}{ac}$ par un rapport entre de longueurs finies; portons suivant ac une longueur arbitraire ac'; menons la verticale $c'b'$ qui coupe en b' la tangente ab au lieu des centres de gravité des joints; menons parallèlement au joint A'B' ou AB la droite $b'd'$ qui coupe

en d' la normale ad' au joint; joignons le point d' au point de rencontre des joints AB et A'B'; on a successivement :

$$\frac{ac'}{ac} = \frac{ab'}{ab} = \frac{ad'}{ad} = \frac{hf'}{hf},$$

d'où

$$\frac{hf}{ac} = \frac{hf'}{ac'}.$$

La valeur de y devient :

$$y = \mathrm{AB}\frac{hf'}{ac'}.$$

Nous avons dit que ac' était arbitraire; prenons $ac' = \mathrm{AB}$; on a :

$$y = hf'.$$

Si l'on porte y en ordonnées sur la verticale passant par le centre de gravité a du joint; si on opère de même pour des joints suffisamment rapprochés, on obtient la courbe des charges; la ligne des pressions est l'intégrale seconde de cette courbe.

333. Voûte en arc de cercle d'épaisseur constante. — Supposons (fig. 163) que l'extrados et l'intrados soient établis suivant deux cercles concentriques; les joints passent par le centre de ces deux cercles, les milieux des joints se trouvent sur une circonférence dont le rayon est la demi-somme des rayons de l'intrados et de l'extrados. Soient : ds, l'élément de cette circonférence compris entre deux joints infiniment voisins; e, l'épaisseur de la voûte. Le poids du voussoir infiniment petit compris entre les deux joints est $\pi' eds$. Développons l'arc s sur l'axe AB; portons $\mathrm{AD} = e$; $\pi' es$ est le poids du rectangle ABCD. Soit AF la base d'intégration, on obtient l'intégrale AE; BE est le poids total; les ordonnées de la droite AE donnent les poids des différentes parties de la voûte comprise entre la clef et un joint quelconque. Soit QO la poussée; Q0123 est le diagramme des pressions; menons les verticales des centres des gravités des voussoirs; on obtient la ligne des pressions 0 1 2 3.

Le lieu des centres de gravité des joints est ici une circon-

férence ayant pour centre le centre de l'intrados et de l'extrados; il suffit de déterminer le centre de gravité d'un joint pour avoir tous les autres. On peut décomposer un voussoir quelconque en voussoirs infiniment petits; les poids de ces voussoirs se répartissent uniformément sur la circonférence des centres de gravité des joints; on obtient donc le centre de gravité d'un voussoir en cherchant le centre de gravité d'un arc de cette circonférence.

Donnons quelques détails sur la manière de développer un arc de cercle, et d'en chercher le centre de gravité.

334. Développement d'un arc de cercle. — En divisant l'arc en arcs assez petits, on peut les remplacer par leurs cordes; l'erreur relative ε, c'est-à-dire le rapport entre l'erreur absolue et l'arc à mesurer se calcule par la formule suivante.

Soient (fig. 161) $\theta = 2\varphi$ l'angle au centre du petit arc, R le rayon; on a :

$$\varepsilon = \frac{2R\sin\varphi - 2R\varphi}{2R\varphi} = -\frac{\varphi^2}{6} + \frac{\varphi^4}{120} \cdots$$

On obtient $\varepsilon = 0{,}001$ pour $\varphi = \frac{\pi}{40}$ ou $\theta = \frac{\pi}{20}$; en prenant des dixièmes de cadran, l'erreur est donc assez petite pour pouvoir être considérée comme nulle dans les applications.

Deuxième méthode. — L'erreur commise par la méthode précédente peut s'exprimer en fonction de la flèche $CD = f$:

$$f = R(1 - \cos\varphi) = R\frac{\varphi^2}{2} + \ldots$$

En négligeant les termes en φ^4, on trouve :

$$\varepsilon = -\frac{1}{3}\frac{f}{R}.$$

On corrigera la partie principale de l'erreur en prenant :

$$s = c\left(1 + \frac{1}{3}\frac{f}{R}\right). \qquad (1)$$

On peut prendre aussi :

$$s = c\left(1 + \frac{1}{3}\frac{f}{OD}\right). \qquad (2)$$

Soit DE le tiers de la flèche CD ; menons par E la droite HK parallèle à la corde AB : la formule (2) donne :

$$s = HK.$$

On trouve que l'erreur commise par cette méthode est :

$$\varepsilon = \frac{EK - R\varphi}{R\varphi} = \frac{\varphi^4}{20} + \ldots = \frac{\theta^4}{320} + \ldots$$

Troisième méthode. — La formule (1) conduit à la solution suivante. Soient CE' une droite égale au tiers de CD ; A'B' une droite égale et parallèle à la corde menée par le point C; on trouve :

$$s = H'K'.$$

L'erreur relative commune est :

$$\varepsilon = \frac{\sin\varphi}{\varphi}\left[1 + \frac{1 - \cos\varphi}{3}\right] - 1 = -\frac{\varphi^4}{30} + \ldots = -\frac{\theta^4}{480} + \ldots$$

Quatrième méthode. — Les deux constructions précédentes ne diffèrent que par la position à donner au tiers de la flèche; dans la première, on le porte en DE, dans la seconde, on le porte en CE'. Portons le tiers de la flèche dans une position intermédiaire FM; déterminons cette position de manière à annuler le terme en φ^4 de l'erreur relative. On trouve :

$$CM = \frac{1}{15}\,CD.$$

$$CF = \frac{2}{5}\,CD.$$

L'erreur relative devient alors :

$$\varepsilon = -\frac{\varphi^6}{1.2.3.4.5} = -\frac{\theta^6}{7680}.$$

335. Centre de gravité d'un arc de cercle. — Le centre de gravité d'un arc de cercle ACB (fig. 162) se trouve sur l'axe de symétrie OC et à une distance du centre déterminée

par la formule suivante qui se trouve dans tous les traités de mécanique :

$$x = \mathrm{R} \times \frac{\text{corde}}{\text{arc}}.$$

$$x = \mathrm{R}\,\frac{\sin\varphi}{\varphi} = \mathrm{R}\left[1 - \frac{\varphi^2}{6} + \frac{\varphi^4}{120}\,..\right]$$

Soit f la flèche de l'arc :

$$f = \mathrm{R}\,(1 - \cos\varphi) = \mathrm{R}\left[\frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^4}{24}\,..\right]$$

Prenons comme valeur approchée de x :

$$x_1 = \mathrm{R} - \frac{f}{3}.$$

L'erreur relative commise en prenant cette valeur est :

$$\varepsilon = \frac{x - \mathrm{R} + \frac{1}{3}f}{x} = -\frac{6^4}{1920} + \ldots$$

Donc en divisant la flèche d'un arc de cercle en trois parties égales, le point de division le plus rapproché de la circonférence diffère peu du centre de gravité de l'arc.

L'erreur relative commise varie comme la quatrième puissance de l'arc; pour l'arc de l'hexagone régulier et du dodécagone régulier, on trouve respectivement :

$$\theta = \frac{2\pi}{6}, \qquad \varepsilon = \frac{1}{1600},$$

$$\theta = \frac{2\pi}{12}, \qquad \varepsilon = \frac{1}{25600}.$$

On peut d'ailleurs déterminer le centre de gravité d'un arc quelconque avec une approximation aussi grande que l'on veut en opérant comme il suit. Divisons l'arc ACB en deux parties égales; les poids des deux moitiés AC et CB sont symétriquement placés par rapport à l'axe de symétrie OC; donc le centre de gravité de l'arc ACB est la projection orthogonale sur OC du centre de gravité de l'arc CB. Si on

détermine le centre de gravité de l'arc CB par la méthode précédente, on commet une erreur relative de :

$$\varepsilon = -\frac{\left(\frac{1}{2}\theta\right)^4}{1920} = -\frac{\theta^4}{30720}.$$

En divisant l'arc CB en deux parties égales, en projetant le centre de gravité de l'arc C'B sur OC' et le point ainsi obtenu sur OC, on obtient le centre de gravité avec une approximation 16 fois plus grande encore. On peut, en poussant plus loin la division, obtenir une approximation aussi grande que l'on veut.

336. Autre manière de trouver la longueur d'un arc de cercle. — Nous avons rappelé la formule :

$$x = R\frac{c}{s},$$

on en déduit :

$$s = c\frac{R}{x}.$$

Soit E le centre de gravité de l'arc; portons A'B' = AB; on trouve :

$$s = HK.$$

L'erreur relative que l'on commet sur s, en faisant une erreur relative égale à ε sur x, est :

$$\varepsilon' = \frac{\frac{Rc}{x+\varepsilon x} - \frac{Rc}{x}}{\frac{Rc}{x}} = -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

ou approximativement :

$$\varepsilon' = -\varepsilon.$$

Donc en prenant le tiers de CD comme centre de gravité, on commet une erreur relative sur s de :

$$\varepsilon' = +\frac{\theta^4}{1920}.$$

En prenant le tiers de C'D', l'erreur est :

$$\varepsilon' = +\frac{\theta^4}{30720}.$$

On peut obtenir la longueur de l'arc avec une approximation aussi grande que l'on veut.

On peut de cette manière chercher la longueur d'une circonférence de rayon R. Dans une circonférence de rayon 3 R, l'arc de l'hexagone régulier est πR. Soit (fig. 162) OAB un triangle équilatéral ayant 3 R pour côté; A'B' est la longueur πR de la demi-circonférence de rayon R. Selon que l'on déterminera le point E en prenant le tiers de CD ou le tiers de C'D', on commettra les erreurs relatives de :

$$\theta = \frac{2\pi}{6}, \qquad \varepsilon' = \frac{1}{1600},$$

$$\theta = \frac{2\pi}{12}, \qquad \varepsilon' = \frac{1}{25600}.$$

337. Extension à une voûte quelconque. — Si la voûte n'est pas circulaire, les déterminations qui précèdent ne sont plus applicables. Mais si on divise la voûte en arcs assez petits, la courbure variera faiblement; on conçoit qu'en appliquant encore les constructions précédentes, on ne commettra pas une grande erreur.

Lorsque l'épaisseur de la voûte varie, en général elle varie faiblement dans l'étendue d'un voussoir de peu de longueur; on est amené à chercher le centre de gravité d'un arc de cercle dont la densité varie peu. Soit (fig. 162) ACB cet arc; supposons que AM et BN représentent les épaisseurs de la voûte en A et B; supposons que le poids de l'arc par unité de longueur, estimée suivant la corde, varie comme les ordonnées de la droite MN; on obtient le centre de gravité E' de l'arc en menant par le centre de gravité de l'arc homogène une parallèle à la corde AB et en projetant sur cette parallèle le centre de gravité du trapèze AMNB.

On peut appliquer ce procédé à la figure 159; ayant tracé (331) l'intégrale A'B' dont les ordonnées donnent le poids P,

on détermine, comme on vient de le dire, les lignes d'action des poids des voussoirs; c'est sur ces lignes que se coupent les tangentes consécutives de la ligne de pression. On peut tracer cette ligne de pression sans se servir de la ligne ponctuée, dérivée de la ligne de pression.

338. Cas où l'intrados et l'extrados sont deux arcs de cercle non concentriques. — Soit à déterminer le poids et le centre de gravité du voussoir ABDC (fig. 164). Soient : R, s, Δx le rayon, la longueur et la projection horizontale de l'arc CD; R', s' le rayon et la longueur de l'arc AB; on a :

$$\text{ABCD} = \text{O'CD} + \text{O'OC} - \text{OO'D} - \text{OAB},$$

$$\text{O'CD} = \frac{\text{R}\,s}{2}, \qquad \text{OAB} = \frac{\text{R'}s'}{2},$$

$$\text{OO'D} - \text{OO'C} = \text{O'FD} = \frac{\text{OO'} \times \Delta x}{2}.$$

D'où l'on tire :

$$\text{ABCD} = \frac{\text{R}\,s}{2} - \frac{\text{R'}s'}{2} - \frac{\text{OO'} \times \Delta x}{2}.$$

En portant s en abscisse, on obtient $\frac{\text{R}\,s}{2}$ pour une intégrale rectiligne; on obtient de même $\frac{\text{R'}s'}{2}$ et $\frac{\text{OO'} \times \Delta x}{2}$.

Le poids du voussoir est la résultante de trois forces parallèles : le poids du secteur O'CD, les poids négatifs du secteur OAB et du triangle O'FD; il est inutile de composer ces forces, il suffit de les introduire successivement dans la ligne de pressions.

339. Voûte avec surcharge. — Considérons séparément le poids de la voûte et de la surcharge; on obtiendra le poids de la voûte par l'une ou l'autre des méthodes précédentes; on obtiendra le poids de la surcharge par une intégration graphique ordinaire. On peut construire la ligne des pressions de deux manières.

Première méthode.— On introduit successivement et dans l'ordre convenable les poids des voussoirs et de la surcharge.

Soient : (fig. 165) AB l'intégrale première de la surcharge, A'B' l'intégrale des poids des voussoirs portés vers le haut, QQ' la poussée. On porte en Q'β' les poids de la surcharge, en Qβ les poids des voussoirs, $\beta\beta'$ est évidemment l'une des résultantes ; on obtient toutes les résultantes en joignant les poids de Qβ, aux poids correspondants de Q'β'. La ligne des pressions se trace par les méthodes connues.

Deuxième méthode. — On construit séparément la ligne des pressions dans l'hypothèse d'une surcharge nulle et dans l'hypothèse de la surcharge seule ; en ajoutant les ordonnées de ces courbes, on obtient évidemment l'intégrale seconde totale, c'est-à-dire la ligne des pressions cherchée. Soient : (fig. 166) A'C'E' et ABDE les intégrales secondes de la charge et de la surcharge. Portons :

$$aA'' = aA + aA',$$
$$bB'' = bB + bB',$$

on obtient le côté A''B'' de l'intégrale totale. On applique cette construction aux côtés tels que A''B'' et D''E'' suivant lesquels agissent les pressions sur les joints; il est inutile de considérer les côtés auxiliaires tels que BD introduits dans l'intégration.

On peut modifier cette opération de bien des manières. On peut utiliser les points des droites situés sur l'axe *ab*. On peut aussi déterminer le point d'intersection des côtés A''B'' et D''E'' par une construction graphique :

Portons : $C'\delta = \alpha\beta$;

$\gamma'\beta$ et A'B' se coupent sur la verticale cherchée.

Portons : $fF''_{\cdot} = fF + fF'$,

on obtient un sommet du polygone des pressions. On peut les déterminer tous de cette manière et tracer le polygone des pressions.

340. Remarque. — Dans les tracés qui font l'objet des numéros précédents, on intègre par assimilation. Si l'arc a une courbure insensible, on l'assimile à une droite; s'il a une courbure sensible, on l'assimile à une parabole du

second degré; si on connaît les tangentes extrêmes, on l'assimile à une parabole du troisième degré. Il est quelquefois plus exact de recourir à d'autres assimilations; montrons-le par l'exemple suivant. Dans l'évaluation du poids de la surcharge, on peut rencontrer un arc AB (fig. 167) dont la tangente en B soit verticale; il est peu rationnel de l'assimiler à un arc de parabole du deuxième ou du troisième degré par rapport aux abscisses horizontales, car ces courbes n'ont pas de tangente verticale. On obtiendra évidemment une plus grande exactitude, en assimilant cet arc à une parabole de l'espèce :

$$x = a + by + cy^2 + dy^3.$$

Si on ne connaît pas la tangente en A, on considère l'arc AB comme une parabole du second degré; l'abscisse moyenne est l'abscisse du centre de gravité du triangle ATB, obtenu en portant $BT = \frac{1}{2}AC$: c'est l'abscisse du second tiers de ab.

Si on connaît la tangente en A, on peut considérer l'arc AB comme un arc d'une parabole du troisième degré et appliquer la construction du numéro 25. L'intégrale première sera ainsi déterminée par ses deux tangentes extrêmes; on obtiendra l'intégrale seconde en considérant l'intégrale première comme une parabole du troisième degré en x. On pourrait toutefois persister dans la première assimilation et construire géométriquement l'intégrale seconde; ainsi si l'arc AB est assimilé à une parabole du second degré en y, on trouve les constructions suivantes que le lecteur est prié de démontrer :

1° On intègre l'arc A'T'B' en y substituant :

$y = A'a$ sur $\frac{ab}{2}$,

$y = Db$ sur $\frac{2}{5}\ \frac{ab}{2}$,

$y = B'b$ sur $\frac{3}{5}\ \frac{ab}{2}$;

2° Soit S le point de T'B' à égale distance des ordonnées extrêmes. On substitue à l'arc A'B' :

$$y = \mathrm{A}'a \qquad \text{sur} \qquad \frac{2}{5}ab,$$

$$y = \mathrm{S}s \qquad \text{sur} \qquad \frac{1}{5}ab,$$

$$y = \mathrm{B}'b \qquad \text{sur} \qquad \frac{2}{5}ab.$$

§ 3. Problèmes sur la détermination des lignes des pressions.

341. Problèmes divers. — La ligne des pressions d'une voûte est une intégrale seconde, un lieu de moments fléchissants (121), une ligne des résultantes (133). La poussée est la base de la seconde intégration ; dans une voûte symétrique, la poussée reste horizontale ; le pôle du diagramme se déplace horizontalement. La propriété du numéro 56 devient la suivante :

Deux lignes ou polygones de pression ont leurs tangentes, leurs cordes et leurs côtés correspondants qui se coupent sur une horizontale ; en prenant cette horizontale comme ligne de repère, on passe d'une ligne de pression à une autre par un changement de l'échelle des ordonnées.

Les problèmes sur la détermination d'une ligne de pression rentrent dans l'énoncé général du numéro 135 ; mais, comme la direction de la poussée est connue, cet énoncé se transforme dans le suivant :

Construire une ligne de pression satisfaisant à deux conditions dont une de position.

Nous avons donné (135) la méthode générale pour résoudre ces problèmes ; les exemples suivants serviront d'applications.

342. Construire une ligne de pression connaissant la grandeur de la poussée et un centre de pression. —

On construit le diagramme des pressions; on trace la pression qui passe par le centre de pression connu; on mène successivement les côtés qui précèdent et qui suivent. En d'autres termes, on part du centre de pression connu comme on partait du centre de poussée connu dans les tracés du paragraphe précédent.

343. Connaissant deux centres de pression, tracer la ligne des pressions. — Soient (fig. 165) α α' les centres de pression dans les joints *mn* et *cd*. Traçons une ligne de pression quelconque; la corde $\alpha\alpha'$ de ligne inconnue correspond à une corde MM' de la ligne connue; les points M et M' sont les points des pressions sur les joints *mn* et *cd* situés sur les verticales des points α et α'. Soit qO la poussée pour la ligne connue; menons qR parallèlement à la corde MM'; on sait que si la poussée change, le pôle q vient en q', la droite qR pivote autour de R et vient en q'R; pour que la corde MM' vienne en $\alpha\alpha'$, la poussée doit être telle que q'R soit parallèle à $\alpha\alpha'$. Donc menons Rq' parallèlement à $\alpha\alpha'$, q'O est la poussée cherchée. On connaît alors la poussée et un centre de pression; on est ramené au problème précédent.

Autres solutions. — 1° On prolonge les cordes correspondantes $\alpha\alpha'$ et MM'; on obtient la droite XY des points d'intersection des côtés correspondants; on opère alors comme au numéro précédent.

2° Prenons la droite XY comme ligne de repère; on obtiendra la nouvelle ligne des pressions en réduisant les ordonnées de la ligne connue dans le rapport inverse des poussées; cette opération se fait rapidement au moyen d'un compas de réduction.

CAS PARTICULIER. — *On donne le centre de poussée et un centre de pression.* Les trois solutions qui précèdent s'appliquent à ce cas particulier; mais il existe une solution bien connue de ce problème facile. Déterminons par un procédé quelconque le poids P (fig. 174, pl. 6) compris entre la clef *ab* et le joint *cd* dans lequel se trouve le centre de pression *n* qui est donné. La poussée inconnue en grandeur, mais connue en position, coupe le poids P en *m'*; ces deux forces se com-

posent en une résultante qui doit passer par n; il suffit donc de décomposer le poids P suivant les droites mm' et $m'n$; on obtient en même temps la poussée et la pression sur le joint cd.

Cette décomposition peut se faire par le parallélogramme des forces; elle peut aussi se faire par le triangle des forces QOR; on mène OR = P, RQ et OQ parallèlement à mm' et $m'n$.

Cette construction rentre aussi dans la méthode générale du numéro 135. En concentrant le poids P, la ligne des résultantes devient $mm'n$; connaissant la direction d'une tangente $m'n$, on mène RQ suivant cette direction, on détermine le pôle Q.

344. Construire une ligne de pression connaissant un centre de pression et la composante normale de la pression sur un joint. — Au moyen de la composante normale (condition de grandeur) on peut (135) déterminer le diagramme des pressions. Soient: (fig. 168) OP le poids compris entre la clef et le joint que l'on considère, PN la composante normale à ce joint. Le pôle du diagramme doit se trouver à l'intersection de l'horizontale du point O et de la droite NQ parallèle au joint; on obtient ainsi la poussée; on est alors ramené au problème du numéro 342.

§ 4. Tangentes à la courbe de pression.

345. Relation entre la pression et la tangente à la courbe de pression. — Soient: (fig. 170) ab et cd deux joints infiniment voisins; AM la pression sur le joint ab. Composons cette pression avec le poids dP du voussoir infiniment petit $abdc$ et de la surcharge $bghd$; on obtient la pression BM sur le joint cd; la tangente à la courbe des centres de pression est le prolongement de l'élément infiniment petit AB.

Nous obtiendrons une équation qui déterminera l'élément AB, en prenant le point A comme centre des moments et en exprimant que le moment de la pression BM est égal à la

somme des moments de ses deux composantes : la pression AM et le poids dP. Le moment de la pression AM est nul, on a donc :

$$\text{Moment de BM} = \text{Moment de } d\text{P}.$$

Soit dM le second membre ou $d\text{P} \times \text{AK}$; nous poserons :

$$d\text{M} = d\text{P} \times \text{AK} = p \times \text{AD}$$

ou

$$p = \frac{d\text{P}}{\text{AD}} \times \text{AK}.$$

La force p est une *force fictive* dirigée parallèlement au joint, appliquée au point D et dont le moment autour du centre de pression A est égal au moment de la charge élémentaire dP.

Pour exprimer le moment de la pression BM, supposons la transportée au point F sur l'horizontale du centre de pression et décomposée en deux composantes : une composante horizontale qui est la poussée q et dont le moment est nul, une composante verticale qui est le poids P du massif compris entre la clef et le joint AB ; on a :

$$\text{Moment de BM} = \text{P} \times \text{AF}.$$

L'équation de moment devient donc :

$$\text{P} \times \text{AF} = p \times \text{AD},$$

d'où

$$\frac{\text{AF}}{\text{AD}} = \frac{p}{\text{P}}.$$

Cette proportion prouve qu'il est possible de construire un quadrilatère opRP (fig. 169) semblable au quadrilatère AFBD et tel que les côtés AF et AD aient pour côtés homologues des côtés égaux à p et à P. Ce quadrilatère donne la solution de la question. On le construit en portant horizontalement $op = p$ (nous verrons plus loin comment on détermine p) ; on porte ensuite $o\text{P} = \text{P}$ suivant une parallèle à AD ou une normale au joint ; on mène PR parallèlement au joint cd ou plus exactement parallèlement au joint ab, limite de cd. Si on donne la direction de la pression, on connaît pR, on obtient immédiatement la direction

oR de la tangente à la courbe des centres de pression. Si, réciproquement, on connaît la direction oR, on obtient la direction pR de la pression.

La force fictive p dépend de la position du centre de pression A; supposons ce centre fixe; on peut se donner arbitrairement la direction pR de la pression et obtenir la direction oR de la tangente oB; l'angle de ces deux directions varie avec la direction pR. Menons une circonférence passant par les deux points o et p et touchant la droite PR; soit R' le point de contact; le maximum de l'angle ORp est l'angle OR'p. En effet l'angle ORp a, dans la circonférence OpR', une mesure plus petite que celle de l'angle OR'p.

346. Autre relation. — *La tangente à la courbe des centres de pression est la direction de la résultante de la pression correspondante et de la force fictive* p *prise en sens contraire.*

Soient : (fig. 168) QOP le diagramme des pressions; QO la poussée; OP le poids P. Portons PP' = p; il faut démontrer que QP' est la direction de la tangente à la courbe des centres de pression. Reprenons l'équation de moment :

$$\text{Moment de BM} = \text{Moment de } d\text{P}.$$

Exprimons encore le second membre par $p \times$ AD. Pour obtenir le premier membre, transportons la pression BM au point H situé sur le joint AB; décomposons cette pression en une pression tangentielle et une pression normale au joint. La pression tangentielle a un moment nul, la pression normale N a pour moment N $\times$ AH. L'équation de moment devient :

$$\text{N} \times \text{AH} = p \times \text{AD},$$

d'où

$$\frac{\text{AH}}{\text{AD}} = \frac{p}{\text{N}}.$$

Cette proposition prouve que l'on peut construire un triangle semblable au triangle AHB, en prenant PP' = p comme homologue de AH et en prenant, comme hauteur du nouveau triangle, N au lieu de AD, qui diffère infiniment peu de la hauteur du triangle ABH. Ce triangle est QPP',

car QP est parallèle à la direction AM, limite de BH, et la hauteur QN′ est précisément N ; il résulte de là que QP′ est parallèle à la tangente AB : c'est ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. — *La direction de la tangente à la courbe des centres de pression s'obtient en déplaçant le pôle de la pression, de la force fictive* p.

Soit (fig. 168) QP la pression ; déplaçons le pôle de $QQ' = p$; il faut démontrer que Q′P est la direction de la tangente à la courbe des centres de pression. En effet nous venons de démontrer que QP′ donne la direction cherchée ; or la figure QQ′PP′ est un parallélogramme ; donc Q′P donne aussi cette direction.

347. Détermination de la force fictive p. — Nous avons posé :

$$p = d\mathrm{P} \times \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AD}}.$$

En négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, on a (fig. 170) :

$$d\mathrm{P} = \text{poids}\,(abfc + bgh\delta),$$

d'où

$$p = \text{poids}\,(abfc + bgh\delta) \times \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AD}}.$$

Portons AL = AK sur le prolongement de AD : joignons le point L au point d'intersection des joints infiniment voisins ; nous obtenons l'aire $abf'c'$; il est facile de voir que l'on a :

$$abf'c' = abfc \times \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AD}}.$$

Menons $f'd'$ parallèlement à fd ou à la direction limite ab ; $g'h'$ parallèlement à bg ; nous obtenons l'aire $bgh'\delta'$; on démontre ainsi que l'on a :

$$bgh'\delta' = bgh\delta \times \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AD}},$$

l'où l'on tire :

$$p = \text{poids}\,(abf'c' + bgh'\delta'),$$

On obtiendra donc la valeur de p en mesurant les deux aires $abf'c'$ et $bgh'\partial'$; la première doit être mesurée avec la base d'intégration des maçonneries, la seconde avec la base d'intégration de la surcharge.

Nous avons supposé dans la construction précédente que l'on connaissait le centre de gravité du joint y compris la surcharge; si ce point n'est pas connu, on divise le poids dP en deux parties : le voussoir et la surcharge, et on remplace le moment dP × AK par la somme des moments des deux parties; au lieu de porter AL = AK on porte successivement AL égale à chacun des bras de levier; on est encore ramené à évaluer deux aires. Les considérations qui suivent simplifient beaucoup la détermination de la force fictive p.

348. Connaissant les valeurs de p pour deux positions du centre de pression trouver toutes les autres. — Nous avons posé :

$$p = d\mathrm{P} \times \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AD}}.$$

Prenons le point d'intersection des deux joints ab, cd comme origine. Soient : x la distance du centre de pression; a la distance du point G du joint situé sur la verticale du centre de gravité du joint; φ l'angle du joint avec la verticale. On a :

$$\mathrm{AD} = x\,d\varphi$$
$$\mathrm{AK} = \mathrm{AG}\sin\varphi = (a - x)\sin\varphi.$$

La valeur de p devient :

$$p = \frac{d\mathrm{P}}{d\varphi}\,\frac{a-x}{x}\sin\varphi.$$

En portant p en ordonnée normalement au joint, on trouvera une hyperbole TU; c'est cette hyperbole qu'il faut construire. Son équation est de la forme :

$$y = \frac{m}{x} + n.$$

Il suffit d'en connaître deux points (99). Soient : (fig 172) ab le joint; Aa, Bb deux valeurs de p; construisons d'abord :

$$y_1 = yx = m + nx.$$

C'est l'équation d'une droite ; en prenant Oa comme base d'intégration, on obtient deux points A et B' de cette droite ; on obtient alors toutes les ordonnées de la courbe cherchée

$$y = \frac{y_1}{x}$$

par une construction connue.

En général, l'épaisseur ab de la voûte est petite par rapport au rayon Oa de l'intrados : dans ce cas l'arc d'hyperbole diffère très peu d'une droite ; on peut se contenter de joindre deux points de cet arc.

349. Valeurs simples de la force fictive p. — 1° Si on se place à l'extrados, on obtient facilement la valeur de p, parce que le moment de la surcharge est nul ; il suffit de calculer une seule surface ;

2° Si on se place au centre de gravité du voussoir élémentaire, le moment du poids du voussoir est nul ; la valeur de p est encore représentée par une seule aire.

Ces deux valeurs de p suffisent pour déterminer toutes les autres.

350. Autre méthode. — Le problème serait résolu si on trouvait la droite AB' (fig. 172) ; l'équation de cette droite est :

$$y_1 = yx = px.$$

Supposons que la base d'intégration soit le rayon r de l'intrados ; on a en réalité (51) :

$$y_1 = \frac{px}{r}.$$

Nous avons posé :

$$p = \frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{AD}}.$$

On a donc :

$$y_1 = \frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{AD}} \times \frac{x}{r}.$$

Mais (fig. 170) on a évidemment :

$$\frac{x}{r} = \frac{\mathrm{AD}}{ac}.$$

La valeur de y_1 devient :

$$y_1 = \frac{dM}{ac} = dP \times \frac{AK}{ac}.$$

Les valeurs de y_1 se trouveront comme les valeurs de p; mais au lieu de porter le bras de levier sur AD, on le portera sur ac.

Cherchons les valeurs de y_1 pour le point b et le centre de gravité G' du voussoir.

Au point b, le moment de la surcharge est nul :

$$y_1 = -\text{ poids } (abcd) \times \frac{G'K'}{ac} = -\text{ poids } (abf''c'').$$

Au point G', c'est le moment du voussoir qui est nul; on a donc :

$$y_1 = \text{poids } (bghg) \times \frac{G'K'}{ac} = \text{poids } (bgh''\delta'').$$

Ces deux aires s'obtiendront chacune par une intégration facile; mais, en général, cette intégration est inutile. Ainsi l'aire $bgh''\delta''$ a un poids S'S si RS est la tangente à l'intégrale de la surcharge. De même, le poids $abf''c''$ est le poids d'un voussoir d'une certaine longueur, et on l'obtiendra sur l'intégrale des poids des voussoirs. Il est plus avantageux, pour cette construction, de prendre, au lieu de Oa (fig. 172), une base d'intégration égale au rayon moyen $\frac{Oa + Ob}{2}$: la force fictive au point b se trouve plus facilement.

351. Variation de p dans les différents joints d'une voûte en arc de cercle d'épaisseur constante. — 1° *Extrados.* La formule générale qui donne la valeur de p est :

$$p = \frac{dP}{d\varphi} \frac{a - x}{x} \sin\varphi.$$

A l'extrados, la surcharge n'exerce pas d'influence; donc on peut poser :

$$p' = \frac{dP}{d\varphi} \frac{a - x}{x},$$

p' étant une constante. On a donc :

$$p = p' \sin\varphi.$$

Portons (fig. 171) $SQ = p'$; projetons S sur la direction QQ' du joint; on a :

$$p = QQ'.$$

Le lieu des points Q' est une circonférence décrite sur SQ comme diamètre. Toutes ces valeurs de p et de p' sont négatives. Nous avons représenté la force fictive prise en sens contraire telle qu'il faut la porter pour la composer avec la charge P.

On obtient facilement la grandeur de p'. Soit k le poids d'un voussoir, dont la longueur à l'extrados est égale à l'unité; on a :

$$\frac{dP}{d\varphi} = \frac{kx\,d\varphi}{d\varphi}.$$

La valeur de p' devient :

$$p' = \frac{k(a-x)}{2};$$

c'est le poids d'un voussoir dont la longueur à l'extrados est $\frac{a-x}{2}$.

2° *Intrados.* — Si la surcharge est nulle, on trouve comme précédemment :

$$p = \frac{dP}{d\varphi}\,\frac{a-x}{x}\sin\varphi = p''\sin\varphi.$$

En portant les valeurs de p comme rayon vecteur, on obtient encore une demi-circonférence décrite sur $QB = p''$ comme diamètre. La valeur de p'' s'obtient comme celle de p' :

$$p'' = \frac{k(a-x)}{2},$$

x devenant ici le rayon de l'intrados.

3° *Intrados dans le cas d'une surcharge.* — La valeur de p comprend : 1° la valeur $p''\sin\varphi$ que l'on obtiendrait s'il

n'y avait pas de surcharge; 2° la valeur de p due à la surcharge seule. On trouve pour cette dernière (fig. 170) :

$$\pi \frac{(bgh\delta) \times ab \sin\varphi}{ac},$$

expression de la forme :

$$(m - n\cos\varphi)\sin\varphi . \cos\varphi.$$

On a donc :

$$p = p'' \sin\varphi + (m - n\cos\varphi)\sin\varphi\cos\varphi.$$

On déduit de là la construction suivante :

Portons $QB = p''$; suivant une perpendiculaire au joint, portons $BC = m$; portons ensuite $CD = n$. Projetons le point D sur BC, la projection E sur QB, cette seconde projection F sur la direction du joint QQ''; on a :

$$\begin{aligned} QQ'' &= QF\sin\varphi, & QF &= QB + BF, \\ BF &= BE\cos\varphi, & BF &= m - EC, \\ EC &= n\sin\varphi, & \text{d'où } QQ'' &= p. \end{aligned}$$

La courbe que l'on obtient n'est plus un cercle, mais cependant sa forme n'en diffère pas beaucoup. On peut se demander quelle devrait être la forme d'une voûte d'épaisseur constante pour que la courbe des valeurs de p soit un cercle pour l'intrados comme pour l'extrados. Soient : e l'épaisseur de la voûte; x, y les ordonnées de l'extrados, ρ le rayon de courbure; on doit avoir (fig. 170).

$$\pi \frac{(bgh\delta) \times ab \sin\varphi}{ac} = p''' \sin\varphi$$

ou
$$\frac{\pi y\, dx \times e}{(\rho - e)\, d\varphi} = p'''$$

ou
$$\pi e y \frac{dx}{ds} = p''' \frac{\rho - e}{\rho}.$$

Approximativement $\dfrac{\rho - e}{\rho} = 1$;

il vient :
$$\pi e y \frac{dx}{ds} = p'''\,;$$

c'est l'équation d'une chaînette dont le paramètre est :

$$a = \frac{p'''}{\pi e},$$

on a : $$p''' = \pi e a.$$

La force p''' est alors le poids d'un voussoir de longueur a, en attribuant à ce voussoir le poids spécifique π.

352. Construire une ligne des pressions connaissant un centre de pression et la tangente en ce point à la courbe de pression — Déterminons la force fictive p ; appliquons le théorème du numéro 346 ; soit (fig. 168) OP le poids compris entre la clef et le joint où l'on donne le centre de pression ; portons $PP' = p$; en menant P'Q parallèlement à la tangente à la courbe des centres de pression, on obtient le pôle Q du diagramme des pressions ; on est ramené au problème du numéro 342.

§ 5. Des courbes conjuguées.

353. Définition. — Si on se donne (fig. 173) la poussée Aa à la clef, on peut déterminer la pression résultante sur un joint $\gamma\delta$ et la composante normale A'a' de cette pression. Nous dirons que les points A et A' sont deux *points conjugués*. Si l'on fait varier la poussée en grandeur et position d'après une certaine loi, le point A décrit une courbe quelconque, le point A' décrit une autre courbe ; nous dirons que ces courbes sont conjuguées.

354. Théorème I. — *La conjuguée de* $q = 0$ *est un point unique* S ; *la conjuguée de* $N = 0$ *est un point unique* T. — En effet, si la poussée q est nulle, la pression sur le joint oblique se réduit au poids P de l'arc de voûte $\alpha\beta\delta\gamma$; la composante normale est toujours Ss, quel que soit le centre de poussée.

De même, pour avoir $N = 0$, il faut que la pression sur le joint oblique soit située dans ce joint ; il faut pour cela que la poussée soit négative, passe par le point s, et ait pour valeur Tt = S's ; la conjuguée de $N = 0$ est donc le point T.

355. Théorème II. — *La conjuguée d'une parallèle au joint vertical est une parallèle au joint oblique : les ordonnées* Aa *et* A'a' *des points conjugués engendrent deux rectangles équivalents* ABba *et* A'B'b'a'. Supposons que la poussée se déplace de Aa en Bb en restant constante ; la pression sur le joint oblique est la résultante de cette poussée et du poids P : elle reste aussi constante ; il en est de même de la composante normale N. Prenons le point K comme centre des moments ; le moment du poids P est nul ; on a :

$$\text{Moment de A}a = \text{Moment de la pression.}$$

Le premier membre est $q \times \text{MK}$. Pour obtenir le second membre, menons KL parallèlement au joint oblique ; supposons la pression transportée au point L et décomposée suivant une parallèle et une normale au joint ; le moment de la composante parallèle est nul, le moment de la composante normale est $\text{N} \times \text{KL}$. L'équation de moment devient :

$$q \times \text{KM} = \text{N} \times \text{KL}$$

ou

$$\text{A}a \times ab = \text{A}'a' \times a'b' ;$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

356. Théorème III. — *La conjuguée d'une perpendiculaire au joint vertical est une hyperbole équilatère ayant le joint oblique comme asymptote et son centre sur la direction de la poussée. Toutes ces hyperboles passent par un point fixe* S *conjugué de* $q = 0$.

En effet, prenons le point H où le joint oblique est coupé par la poussée pour centre des moments ; le moment de la poussée est nul ; le moment de la pression est égal au moment du poids P. Décomposons la pression appliquée au point a' suivant une normale et une parallèle au joint ; le moment de la pression est $\text{N} \times \text{H}a'$; on a donc :

$$\text{N} \times \text{H}a' = \text{P} \times \text{MH}.$$

Le second membre de cette équation est constant ; N et Ha' sont les coordonnées du point A' en prenant HO et Hy'' pour axes ; l'équation représente une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes. Cette hyperbole doit passer par S, car le point a, qui correspond à $q = 0$, a pour conjuguée S.

357. Théorème IV. — *La conjuguée d'une perpendiculaire au joint oblique est une hyperbole équilatère dont le joint vertical est l'asymptote et dont le centre est à la hauteur du centre de pression fixe du joint oblique. Les branches de ces hyperboles, qui correspondent aux poussées négatives, passent par le point fixe* T *conjugué de* N = 0.

Prenons pour centre des moments le point G situé au niveau du centre de pression fixe a'.

$$\text{Moment de } q = \text{Moment de P en } a'$$

ou bien $$q \times Ga = \text{constante}.$$

Les coordonnées du point A sont q et Ga en prenant pour axes G'G et Gx; elles satisfont à l'équation d'une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes. Le point a', qui correspond à N = 0, a pour conjuguée T; toutes les hyperboles doivent donc passer par ce point. Pour simplifier le langage, nous désignerons la conjuguée de la droite $a'A'$ sous le nom de *conjuguée du centre* a'.

COROLLAIRE 1. — On peut imaginer un joint quelconque $\varepsilon\eta$ autre que $\alpha\beta$, en deça ou au-delà du joint $\gamma\delta$ et construire par rapport à ce joint la conjuguée du centre a'. *Toutes les conjuguées du centre sont des hyperboles équilatères asymptotiques au joint et dont les centres se trouvent sur l'horizontale du point* a'.

En effet, prenons comme précédemment un centre des moments U dans le joint $\varepsilon\eta$ au niveau du point a'; soient a'' le centre de pression, N' la pression normale sur ce joint $\varepsilon\eta$; on a :

$$N' \times Ua'' = \text{constante}.$$

Cette équation démontre la proposition.

COROLLAIRE 2. — *Réciproquement, si sur un joint quelconque la force normale varie comme les ordonnées d'une hyperbole équilatère asymptotique au joint, les courbes de pression correspondantes passent par un point fixe situé sur l'horizontale du centre de l'hyperbole.*

En effet, traçons l'une des courbes de pression ; menons l'horizontale du centre de l'hyperbole qui coupe la courbe de pression en un point a'. L'hyperbole donnée est identique à la conjuguée du centre a', car ces deux hyperboles ont même asymptotes et un point commun, qui est celui qui comprend à la courbe de pression qui a permis de déterminer le point a'.

358. Théorème V. — *L'accroissement de la pression normale à un joint est égale à la projection de l'accroissement de la poussée sur la normale au joint.*

En effet, la composante normale s'obtient en projetant la pression ou ses composantes q et P ; si q augmente de Δq, N augmente de la projection de Δq :

$$\Delta N = \Delta q \times \cos\varphi.$$

359. Théorème VI. — *Si on fait tourner de* 180° *les sous-tangentes conjuguées autour des ordonnées conjuguées, les extrémités de ces sous-tangentes se placent au même niveau.*

Soient Ad et A'd' deux tangentes conjuguées, c'est-à-dire les tangentes à deux courbes coujuguées en des points correspondants ; rabattons les sous-tangentes ad et $a'd'$ en am et $a'n$; nous devons démontrer que les points m et n sont au même niveau.

Soient AD et A'D' deux éléments infiniment petits conjugués ; considérons l'élément A'D' comme la diagonale du rectangle A'C'D'B' ; ce rectangle a pour conjugué un parallélogramme infiniment petit ABCD. Le côté A'C' a pour conjugué un arc d'hyperbole équilatère AC que nous remplaçons par l'élément AC de sa tangente ; cette tangente est, en vertu d'une propriété connue de l'hyperbole, parallèle à G'a ; on a donc :

$$\overline{ac} = \overline{\mathrm{G}a}. \qquad (1)$$

Les longueurs AC et A'C' doivent satisfaire à l'équation suivante (358) :

$$\overline{\mathrm{A'C'}} = \overline{\mathrm{AE}}\cos\varphi. \qquad (2)$$

Le côté A'B' a pour conjugué AB et l'on (355) :

$$\overline{\mathrm{A}a'} \times \overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{A}a} \times \overline{\mathrm{AB}}. \qquad (3)$$

Les équations (2) et (3) donnent les rapports des composantes des éléments conjugués; cherchons le rapport des longueurs cd et $a'd'$.

On a :

$$\frac{cd}{Aa} = \frac{CD}{AE},$$

$$\frac{a'd'}{A'a'} = \frac{C'D'}{A'C'}.$$

Les produits des moyens de ces deux proportions sont égaux respectivement aux deux membres de l'équation (3), car $CD = AB$, $C'D' = A'B'$; en égalant les produits des extrêmes, on trouve :

$$\overline{cd} \times \overline{AE} = \overline{a'd'} \times \overline{A'C'}.$$

L'équation (2) permet de remplacer $A'C'$ par $AE \cos\varphi$; on a donc :

$$\overline{cd} = \overline{a'd'} \cos\varphi. \qquad (4)$$

Mais on a aussi $ac = aG$; on a porté $ad = am$, donc :

$$\overline{cd} = \overline{Gm}.$$

De même, on a porté :

$$\overline{a'd'} = \overline{a'n}.$$

L'équation (4) peut s'écrire :

$$\overline{Gm} = \overline{a'n} \cos\varphi.$$

Cela prouve que Gm est la projection de $a'n$; donc la ligne mn est horizontale.

Remarque. — Si on considère une infinité de joints analogues à $\gamma\delta$, on obtient une infinité de courbes conjuguées; la droite mn convient pour la détermination des tangentes à toutes ces courbes.

360. Théorème VII. — *Les droites qui passent par le point* T *ont pour conjuguées des droites passant par le point* S.

Prenons le point s comme centre des moments; on a :

$$q \times at = N \times a's. \qquad (1)$$

Mais dans la figure QS'P, on a : (si $\varphi' = \text{angle QS'P} = 90^\circ - \varphi$)

$$N = \overline{QS'} \sin\varphi' = \overline{Ah} \cos\varphi \qquad (2)$$

$$N = q\cos\varphi + \overline{Ss}$$

d'où $$q\cos\varphi = \overline{A'h'}. \qquad (3)$$

Remplaçons, dans l'équation (1), q et N par leurs valeurs tirées de (2) et (3); remplaçons at par Th, $a's$ par Sh'; on trouve :

$$\frac{A'h'}{Sh'} = \frac{Ah}{Th}\cos^2\varphi$$

ou $$\text{tang ATh} = \text{tang A'S'h'} \times \cos^2\varphi.$$

Si le point A décrit AT, l'angle ATh ne varie pas; l'angle A'S'h' doit aussi rester constant; donc le point A' décrit la droite A'S'.

361. Tracer la conjuguée d'une droite TA. — Cherchons le point R'' qui correspond à $N = 0$; ce point sera le conjugué du point T. Appliquons à ces deux points le théorème VI; la sous-tangente tR vient en tR'; le point R'' ne bouge pas; RR'' doit être horizontal. De là résulte la construction suivante :

Portons $t\text{R} = t\text{R}'$, menons l'horizontale R'R''; R''S est la conjuguée de TR.

362. Remarque. — Il ne peut y avoir d'autres droites conjuguées l'une à l'autre que les droites parallèles aux joints ou les droites passant par les points S et T. Car toute droite qui coupe le joint $\alpha\beta$ a un point pour lequel $q = 0$; son conjugué est S; la conjuguée passe par S. Réciproquement toute droite qui coupe le joint oblique à une conjuguée qui passe par T. Donc, si deux droites sont conjuguées, ou bien l'une est parallèle au joint, alors l'autre l'est aussi; ou bien les deux droites passent respectivement par les points T et S.

363. Théorie analytique des courbes conjuguées. — Rapportons le point A (fig. 173) aux axes xoy, le point A' aux axes $x'oy'$:

$$y = \eta, \qquad y' = N.$$

La composante normale N s'obtient en projetant la pression et le poids P sur la normale au joint; on a :

$$N = q\cos\varphi + P\sin\varphi$$

ou
$$y' = y\cos\varphi + P\sin\varphi. \qquad (1)$$

En prenant l'origine commune pour centre des moments, on trouve :

$$y'x' = yx + Pl. \qquad (2)$$

Si on donne x, y, on trouve $x'y'$ par les équations (1) et (2) et réciproquement; si le point A décrit une courbe :

$$y = f(x). \qquad (3)$$

On obtiendra la courbe décrite par le point B en éliminant x, y entre les équations (1) (2) (3).

1° Si on prend :

$$y = 0,$$

on trouve :
$$y' = P\sin\varphi,$$

$$x' = \frac{l}{\sin\varphi};$$

on retrouve le point S.

De même si on prend :

$$y' = 0$$

on obtient :

$$y = -P\operatorname{tang}\varphi,$$

$$x = \frac{l}{\operatorname{tang}\varphi}$$

on retrouve le point T. Ces deux résultats démontrent le théorème I.

2° Si on suppose y = constante, l'équation (1) donne y' = constante; l'équation (1) donne :

$$y'\Delta x' = y\Delta x;$$

cela démontre le théorème II.

3° Si on suppose x = constante, on obtient en éliminant y entre (1) et (2) :

$$y'\left(x' - \frac{x}{\cos\varphi}\right) = P(l - x\operatorname{tang}\varphi),$$

c'est l'équation d'une hyperbole équilatère; on retrouve le théorème III ;

4° Supposons $x' =$ constante ; on trouve de même le théorème IV ;

5° De l'équation (1) on tire :

$$\Delta y' = \Delta y \cos\varphi,$$

cela démontre le théorème V.

6° Soient α, α' les coefficients angulaires des tangentes à deux courbes conjuguées en des points conjugués; différentions les équations (1) et (2) en remplaçant dy, dy' par αdx et $\alpha' dx'$; on trouve :

$$\alpha' dx' = \alpha dx \cos\varphi,$$
$$y dx + x\alpha dx = y' dx' + x'\alpha' dx'.$$

Éliminons le rapport $dx : dx'$; il vient :

$$(y + x\alpha)\,\alpha' = (y' + x'\alpha')\,\alpha \cos\varphi$$

ou

$$\left(\frac{y}{\alpha} + x\right) = \left(\frac{y'}{\alpha'} + x'\right)\cos\varphi.$$

Cette équation revient à (fig. 173) :

$$Om = On \cos\varphi,$$

cela démontre le théorème VI (1).

---

(1) Ce théorème est un cas particulier d'un théorème plus général.

Soient : x, y les coordonnées d'un point A ; x', y' les coordonnées d'un point A' ; supposons que les points soient unis par les relations :

$$f(x, y, x', y') = 0, \qquad F(x, y', x, y') = 0.$$

Si le point A se meut, le point A' décrit une courbe conjuguée ; le point A peut partir du point A suivant une infinité de tangentes ; elles sont pour conjuguées un autre faisceau émergeant du point A' ; ces faisceaux sont homographiques. On trouve en effet, si α, α' sont les coefficients angulaires de deux tangentes conjuguées, l'équation :

$$\frac{df'F}{dx\,dx'} + \frac{df F}{dx\,dy'}\alpha' + \frac{df F}{dy\,dx'}\alpha' + \frac{df F}{dy\,dy'}\alpha\alpha' = 0.$$

Les deux faisceaux déterminent sur les axes des x deux systèmes de points homographiques ; connaissant trois groupes de tangentes conjuguées, on obtient tous les autres.

7° Cherchons les conjuguées rectilignes autres que $y =$ constante et $y' =$ constante. Soit la droite :

$$x = ay + b. \qquad (5)$$

On obtient la conjuguée en éliminant x, y entre (1), (2) et (5) ; on trouve :

$$x' = \frac{a}{\cos^2\varphi}\,y' + \frac{b}{\cos\varphi} - 2\mathrm{P}a\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} + \frac{\mathrm{P}}{y'}\,(l + a\mathrm{P}\operatorname{tg}^2\varphi - b\operatorname{tg}\varphi) \qquad (6)$$

Cette équation devient l'équation d'une droite si on pose :

$$l + a\mathrm{P}\operatorname{tg}^2\varphi - b\operatorname{tg}\varphi = 0,$$

d'où

$$b = a\mathrm{P}\operatorname{tg}\varphi + \frac{l}{\operatorname{tg}\varphi}. \qquad (7)$$

Les équations (5) et (6) deviennent en introduisant la valeur de b :

$$x - \frac{l}{\operatorname{tg}\varphi} = a\,(y + \mathrm{P}\operatorname{tg}\varphi),$$

$$x' - \frac{l}{\sin\varphi} = \frac{a}{\cos^2\varphi}(y' - \mathrm{P}\sin\varphi).$$

On retrouve les deux systèmes de droites du théorème VII.

CHAPITRE IV.

Recherche des poussées stables dans le cas d'une résistance illimitée.

§ 1. Méthode d'élimination par les enveloppes.

364. Principe de la méthode (1). — Supposons d'abord (fig. 174) qu'une partie de voûte $abdc$ soit invariable et

(1) Cette méthode est due à M. Alfred Durand-Claye qui, le premier, a cherché les solutions stables d'une voûte. Voir *Annales des ponts et chaussées*, 1867, n° 142: Note sur la vérification de la stabilité des voûtes en maçonneries et sur l'emploi des courbes de pression, par M. Alfred Durand-Claye, élève-ingénieur des ponts et chaussées. On trouve aussi dans cette note quelques-unes des propriétés des courbes conjuguées.

repose sur un seul joint cd. En composant la poussée avec le poids P de l'arc de voûte, on obtient la pression sur le joint cd; la poussée est stable, si cette pression tombe à l'intérieur du joint cd. Si la poussée augmente, on reconnaît facilement que le centre de pression se relève; réciproquement, si la poussée diminue, le centre de pression s'abaisse. La poussée maxima est celle qui amène le centre de pression en d; la poussée minima est celle qui l'amène en c. Les courbes des poussées maxima et minima sont (357) des arcs d'hyperboles DC et AB conjuguées des centres de pression c et d. Les extrémités de toutes les poussées stables se trouvent à l'intérieur du quadrilatère mixtiligne ABCD.

Considérons successivement tous les joints et opérons, pour chacun d'eux, comme pour le joint cd; pour chaque arc de voûte, nous obtiendrons une aire analogue à l'aire ABCD. Déterminons la partie commune à toutes ces aires; il est évident que toutes les poussées stables sont celles qui ont leurs extrémités dans cette partie commune. Le contour limite est l'enveloppe intérieure, dans le sens le plus général du mot, des contours particuliers.

365. Tracés graphiques. — Montrons comment on détermine par points les arcs AB et CD. En un point m, la poussée maxima est celle qui fait passer la pression par le point d, la poussée minima est celle qui fait passer la pression par le point c; on est ramené au problème du numéro 343, cas particulier.

Tracé par les tangentes. — On trace une ligne de pression pour une poussée quelconque; on prolonge la poussée et la pression sur le joint cd; on obtient le point m' de la ligne d'action du poids P de l'arc de voûte. Soit QR le rayon du diagramme parallèle au côté $m'n$; menons RQ' parallèlement à dm'; $Nm = Q'O$ est la poussée cherchée. De là la règle suivante : *on mène, par le point* R *de l'axe du diagramme qui correspond au joint considéré, un faisceau de droites parallèles aux pressions analogues à* dm' *qui passent par le point* d : *le premier faisceau détermine sur l'axe* OQ *les poussées maxima; le second faisceau*

détermine sur la ligne d'action du poids de l'arc de voûte le niveau des centres de poussée.

Tracé par les cordes. — On évite la détermination du poids P en appliquant la première des méthodes du numéro 343; appliquons-la à la détermination de la poussée minima Mm. Il faut trouver la poussée pour laquelle la ligne de pression passe par m et c. Soit mg la corde de la ligne connue, qui correspond à la corde mc de la ligne cherchée; soit qo'S le diagramme des inclinaisons des cordes analogues à mg. Menons Sq' parallèlement à mc; $q'o' =$ Mm est la poussée cherchée. De là résulte la règle suivante : *on mène* qS *parallèlement à la corde* mg; *on mène ensuite par le point* S *un faisceau de droites parallèles aux droites menées du point* c *vers les centres de poussée; on obtient les poussées minima sur l'axe* o'q.

Dans l'exécution de ces deux tracés, il est inutile de dessiner les faisceaux de droites représentés en pointillés sur la figure 174; un mouvement de l'équerre suffit pour déterminer les poussées sur l'axe $o'q$ ou sur l'axe OQ.

Tracé par division. — Les arcs AB et CD sont des arcs d'hyperboles dont on connaît les asymptotes. Si on rapporte l'une de ces hyperboles à ses asymptotes, son équation est de la forme :

$$y = \frac{a}{x}.$$

On obtient facilement un point de la courbe; ayant tracé une ligne de pression quelconque mn, on voit immédiatement qu'en l'abaissant d'une quantité cg, c serait centre de pression; on en déduit un point de l'arc AB. On trouverait de même un point de l'arc CD. Connaissant un point de la courbe, on est ramené à un problème connu (99). On peut aussi se servir du point T, conjugué de N = 0 (fig. 173); on divise la droite Th par ses abscisses en prenant le centre G de l'hyperbole comme origine et Gt comme base; ainsi en joignant hG, on obtient A''t = Aa, ordonnée de l'hyperbole au point a.

§ 2. Méthode d'élimination par les maxima et minima.

366. Principe de la méthode. — Donnons-nous le centre de poussée m; cherchons entre quelles limites sont comprises les poussées stables appliquées en ce point. En appliquant la méthode précédente, nous sommes conduits à prendre les ordonnées des enveloppes intérieures des arcs CD et AB; il est évident que la limite supérieure est le minimum des ordonnées Nm des enveloppées CD, que la limite inférieure est le maximum des ordonnées Mm des enveloppées AB, toutes ces ordonnées étant prises au point m. De là résulte la solution du problème : pour chacun des centres de poussées analogues à m, on fait mouvoir le joint cd, les poussées Nm, Mm varient; on prend le minimum des valeurs de Nm, le maximum des valeurs de Mm; on obtient les ordonnées des deux points du contour limite. Cette méthode ne diffère pas sensiblement de la précédente; on remplace l'élimination des solutions instables par les enveloppes, par un autre procédé d'élimination qui conduit au même résultat.

On peut aussi justifier la seconde solution, sans s'appuyer sur la première, par un raisonnement semblable à celui qui a été fait pour déterminer la poussée des terres (286). Une poussée stable étant donnée, on peut l'augmenter jusqu'au moment où la courbe de pression atteint l'extrados. En prenant au hasard un centre de pression sur l'extrados, on obtient une poussée trop grande en général, mais qui, pour un centre de pression particulier, deviendra la poussée limite. Cette dernière est donc la plus petite des valeurs obtenues. Le même raisonnement s'applique à la limite inférieure.

367. Tracés graphiques. — On peut adopter les mêmes tracés que ceux que nous avons employés dans la méthode précédente. Choisissons m comme centre de poussée; prenons comme centre de pression les différents points de l'extrados; pour le point d, on trouve la poussée OQ'; si on fait

décrire au point *d* l'extrados de la voûte, on obtient pour chaque position des poussées analogues à OQ'; c'est la plus petite de toutes qui sera la poussée limite cherchée. On obtient de même la limite inférieure en faisant décrire au centre *c* l'intrados de la voûte; pour chaque position, on obtient une poussée *o'q'*; on reconnaît aisément quelle est la plus petite des poussées.

Au lieu d'obtenir sur un même axe OQ les poussées dont on cherche le maximum ou le minimum, on peut les porter en ordonnées; on trouvera le maximum ou le minimum en menant aux courbes des tangentes parallèles à la ligne d'abscisse. Il suffit pour cela de disposer autrement le triangle des forces. Ainsi au lieu de mener RQ', on mène OR' parallèlement à la droite *m'd*; en faisant mouvoir le point *d*, le point R' décrit une courbe dont l'ordonnée RR' est la poussée dont on cherche le minimum. C'est cette disposition que nous avons adoptée sur la figure 175 ; il nous suffira d'énoncer les deux règles employées.

TRACÉ PAR LES TANGENTES. — *On porte en abscisse sur* OP *les poids des arcs de voûte* b1, b2, b3, b4; *on trace les lignes d'action* I, II, III, IV *de ces poids en utilisant une ligne des pressions quelconque ; on mène les lignes d'action des pressions qui passent par* 4, 3, 2... *lorsque* m *est centre de poussée; on mène un faisceau de droites par le sommet* O *parallèlement à ces pressions ; ce faisceau détermine la courbe* RS*; l'ordonnée minima* μ'*, portée en* M'm, *est la limite supérieure de la poussée au point* m.

TRACÉ PAR LES CORDES. — *On joint le centre de poussée* m *aux points* 1', 2', 3', 4' *de l'intrados (ou de l'extrados); on trace les cordes correspondantes dans une ligne de pression connue; on construit en* O'qF *le diagramme des directions de ces cordes; on prend comme abscisses les forces concentrées portées sur* OF; *on mène par le sommet* O' *un faisceau de droites parallèles à celles du faisceau* m1234 ; *on obtient la courbe* rs *dont l'ordonnée maxima* μ *est la limite inférieure* Mm.

Le tracé par les cordes est plus élégant que le tracé par les tangentes; on ne doit pas tracer les poids des arcs de voûte; le diagramme des forces concentrées sert pour tous les centres de poussée.

§ 3. Méthode directe.

386. Principe de la méthode. — Dans les méthodes précédentes, on détermine un grand nombre de poussées instables; on les élimine ensuite par l'un ou l'autre procédé. Proposons-nous de déterminer directement les points du contour-limite.

Considérons une courbe de pression stable; soit par exemple mn (fig. 175) la ligne des pressions; faisons varier la poussée en conservant le même centre de poussée. La ligne de pression se modifie; ses ordonnées, par rapport à l'horizontale du centre de poussée, varient en raison inverse de la poussée (341). Si la poussée augmente, la ligne des pressions se relève; si la poussée diminue, la ligne des pressions s'abaisse. La courbe des centres de pression participe à tous ces mouvements. Si l'on fait croître la poussée, il arrive un moment où la courbe de pression atteint l'extrados, soit en le touchant, soit en le coupant à son extrémité; on ne peut dépasser cette valeur de la poussée, car la courbe de pression sort de l'intérieur de la voûte : cette valeur est la limite supérieure de la poussée au point considéré. De même, si l'on fait décroître la poussée, il arrive un moment où la courbe de pression atteint l'intrados ; la poussée atteint alors sa limite inférieure.

Lorsque l'on se donne le centre de poussée, on obtient la limite supérieure et la limite inférieure en déterminant le maximum et le minimum de poussées inexactes; ce n'est pas une méthode directe. Donnons-nous, au contraire, le point de contact de la courbe de pression avec l'intrados ou l'extrados; nous connaîtrons un centre de pression et la tangente à la courbe de pression; nous déterminerons la poussée et le centre de poussée par un procédé connu (352); nous obtenons directement un point du contour limite. En faisant mouvoir

le point de contact sur l'extrados et sur l'intrados, on obtient deux courbes que nous désignerons respectivement sous les noms de : *conjuguée de l'extrados* et *conjuguée de l'intrados*. Nous devons aussi considérer les courbes de pression qui passent par les extrémités de l'intrados et de l'extrados ; on obtient deux hyperboles équilatères ; ce sont les *conjuguées des extrémités de l'extrados et de l'intrados*. Il peut se faire que l'une de ces courbes ne représentent que des solutions instables ; ainsi les courbes de pression tangentes à l'extrados peuvent passer au-dessus de l'extrados ; le tracé graphique, comme nous allons le voir, indique immédiatement les parties des courbes qui constituent réellement le contour limite.

369. Tracés graphiques. — Cherchons les limites des poussées de la voûte *abcd* (fig. 175). Nous appliquerons, pour cela, la règle suivante qui résulte du numéro 352 : *Portons les poids des arcs de voûte* a1, a2, a3, a4 *sur l'axe* OP *et à partir des extrémités de ces poids les forces fictives* (346) *pour l'extrados et l'intrados ; des points* 1, 2, 3, 4, 1′, 2′, 3′, 4′ *ainsi obtenus, menons des parallèles aux tangentes à l'extrados et à l'intrados, nous obtenons les poussées limites sur l'axe* OQ.

Il faut aussi obtenir les centres de poussée ; on peut suivre deux méthodes ; nous avons appliqué le tracé par les tangentes à l'extrados, et le tracé par les cordes à l'intrados.

Tracé par les tangentes. — *On mène par les points de l'extrados ou de l'intrados les pressions dont les directions sont indiquées par le diagramme* QOP ; *ces pressions coupent les lignes d'action* I, II, III, IV *des poids des voûtes au niveau des centres de poussées.*

Tracé par les cordes. — *On construit en* qO′F *le diagramme des inclinaisons des cordes de la ligne pression connue qui correspondent aux cordes* a1′, a2′, a3′... *de l'intrados (ou un diagramme analogue pour l'extrados) ; ces diagrammes donnent les directions des cordes qui joignent les points de l'intrados ou de l'extrados aux centres de poussée* (1).

(1) On peut aussi opérer au moyen d'une corde unique ; la figure 190 fournit un exemple de cette méthode ; voir l'explication au numéro 484.

Dans le cas de la figure 175, la courbe AN est la conjuguée de l'intrados; il est évident que la poussée Nn est instable : elle correspond à une courbe de pression qui touche l'intrados, mais qui coupe l'extrados. Il suffit de considérer l'arc AB de la conjuguée de l'intrados compris entre les poussées appliquées aux extrémités a et b du joint ab. La conjuguée de l'extrados est la courbe CD; cette courbe ne suffit pas; il faut y ajouter l'arc DE de la conjuguée de l'extrémité d de l'extrados.

§ 4. Propriétés des courbes des poussées limites.

370. Théorème I. — *Les conjuguées de l'intrados ou de l'extrados enveloppent les hyperboles équilatères conjuguées des centres de pression situés sur l'intrados ou l'extrados.*

Cette propriété peut être considérée comme une conséquence de la première méthode employée pour trouver ces courbes limites; mais on peut démontrer cette propriété directement et préciser le point de contact des enveloppées et de leur enveloppe. Considérons les courbes de pression qui passent par le point c de l'intrados (fig. 175) et les courbes de pression qui passent par un autre point c'; l'intersection des hyperboles équilatères conjuguées de ces deux points correspond à une courbe de pression passant par les deux points cc'. Supposons que les points cc' se rapprochent indéfiniment; le point d'intersection des deux hyperboles devient le point de contact de l'une d'elles et de son enveloppe. D'autre part, ce point correspond à la courbe de pression qui touche l'élément cc' de l'intrados; c'est donc un point de la conjuguée de l'intrados. Il y a par conséquent identité entre l'enveloppe des hyperboles conjuguées des points de l'intrados et la conjuguée de l'intrados. La même démonstration s'applique évidemment à la conjuguée de l'extrados. On voit aussi que le point de contact d'une enveloppée et de l'enveloppe s'obtient par la courbe de pression, tangente à l'intrados ou l'extrados dans le joint qui correspond à cette enveloppée.

371. Théorème II. — *Si l'on fait tourner la sous-tangente à la courbe limite de* 180° *autour de l'ordonnée horizontale, l'extrémité de cette sous-tangente se place au même niveau que le point de l'extrados ou de l'intrados qui correspond au point de la courbe limite.*

En effet, la tangente à l'enveloppe se confond avec la tangente à une enveloppée; cette enveloppée est la conjuguée d'une perpendiculaire à un joint; sa tangente s'obtient en appliquant le théorème du numéro 359; en faisant tourner les deux sous-tangentes, on doit obtenir des points au même niveau; mais la sous-tangente de la perpendiculaire au joint oblique est nulle; c'est donc le centre de pression lui-même qui doit se trouver au même niveau que l'extrémité de la sous-tangente à la courbe limite tournée de 180°.

372. Théorème III. — *Les courbes limites ont des éléments horizontaux qui correspondent aux éléments horizontaux de l'extrados et de l'intrados.*

Il s'agit de démontrer que la courbe des poussées maxima DC a en C un élément horizontal; que la courbe des poussées minima AB a aussi en A un élément horizontal. En effet, appliquons le théorème précédent pour des centres de pression qui convergent vers les points a et b, nous voyons que les sous-tangentes en A et C sont nulles.

On peut aussi remarquer qu'en prenant a et b comme centre de pression, on obtient deux enveloppées qui sont les droites Cb et Aa; ces enveloppées doivent toucher respectivement leurs enveloppes DC et AB.

§ 5. Forme de la conjuguée de l'intrados.

373. Intrados d'égale résistance. — Soit (fig. 174) la voûte $abcd$; nous pouvons supposer que l'intrados soit établi précisément suivant une courbe de pression. Soit Aa la poussée qui produit cette courbe de pression; il n'y a qu'une seule courbe de pression tangente à l'intrados; c'est l'intrados lui-même; la courbe que nous avons appelée conjuguée de

l'intrados se réduit donc au point A : toutes les enveloppées passsent par ce point. La courbe des poussées minima est l'hyperbole équilatère AB conjuguée du centre de pression c.

374. Des différents genres d'intrados. — L'intrados d'une voûte peut différer d'une courbe de pression dans un sens ou dans l'autre. Si on mène les courbes de pression tangentes à l'intrados, ces courbes peuvent passer au-dessus ou au-dessous de l'intrados ; dans le premier cas, nous dirons que l'intrados est du *premier genre ;* dans le second cas, nous dirons que l'intrados est du *deuxième genre.* Les courbes d'intrados peuvent se composer d'arcs du premier et du second genre. L'intrados du *troisième genre*, si sa partie supérieure est du second genre et sa partie inférieure du premier. L'intrados est du *quatrième genre*, si sa partie est du premier genre et sa partie inférieure du deuxième.

375. Intrados du premier genre. — Soit (fig. 176) la voûte $abdc$. Les courbes de pression qui touchent l'intrados passent au-dessus de l'intrados. Menons une courbe de pression tangente à l'intrados en un point quelconque n; on obtient un point N de la conjuguée. Il est facile de voir que si le point de contact se meut de n en n' en s'éloignant du sommet, le centre de poussée s'élève et que la poussée limite diminue. En effet, si on mène une courbe de pression tangente en un point n' de l'intrados infiniment voisin du point n, cette courbe doit passer au-dessus du point n; donc les deux courbes se coupent en un point s. Mais ces courbes ne peuvent se couper qu'en un seul point, sinon elles auraient deux points communs et coïncideraient (343) ; donc le nouveau centre de poussée est au-dessus du premier : le centre de poussée s'élève quand le point de contact s'éloigne du sommet. Les deux points N et N′ qui correspondent aux deux points n et n', se trouvent sur l'hyperbole équilatère conjuguée du point s; donc la poussée diminue en passant de N en N′. On peut aussi démontrer cette proposition en cherchant la direction de la tangente à la courbe limite (371).

Si le point de contact n se rapproche indéfiniment du

sommet a, le centre de poussée descend et se rapproche aussi indéfiniment du point a; on obtient une courbe de pression qui a quatre points communs infiniment voisins avec l'intrados. En effet, elle touche l'intrados au point que l'on choisit près du point a; cela équivaut à dire qu'elle a deux points communs avec l'intrados; mais la courbe de pression et l'intrados sont symétriques par rapport à la ligne ab; ces courbes ont donc deux autres points communs symétriques des deux précédents; à la limite, elles ont un contact du troisième ordre. Rappelons qu'au point A, qui correspond à cette courbe de pression, la conjuguée de l'intrados a un élément horizontal.

L'étendue de la conjuguée de l'intrados dépend de la forme de l'intrados; nous savons déjà que cet arc peut se réduire en un point unique A', si l'on adopte un intrados d'égale résistance; selon qu'on s'éloignera plus ou moins de cette forme particulière, l'arc AC prendra plus ou moins d'étendue en s'écartant plus ou moins du point A'.

Cette forme de la conjuguée de l'intrados est celle que l'on rencontre habituellement. En général, l'intrados d'une voûte est circulaire ou en anse de panier; la ligne des pressions a une forme qui dépend de la loi des charges, mais dans les cas ordinaires cette forme diffère peu de celle d'une chaînette renversée; la courbure diminue du sommet de la voûte vers les naissances; la courbe des centres de pression diffère peu de la ligne des pressions et a sensiblement la même forme. On reconnaît aisément que si on trace une courbe de cette forme par le sommet et l'extrémité de l'intrados, cette courbe $an''c$ tombe sous l'intrados. En faisant pivoter la courbe de pression autour du point c jusqu'à ce qu'elle devienne tangente à l'intrados, on obtient une courbe qui touche supérieurement l'intrados. En faisant pivoter la courbe amc autour du point a jusqu'à ce qu'elle devienne osculatrice au point a, on obtiendra généralement une courbe qui passe au-dessus de l'intrados; en d'autres termes, l'intrados est généralement du premier genre.

L'arc AC fait partie d'une certaine courbe géométrique;

quelle est la forme de cette courbe au-delà des points A et C? Il semble que le point A soit un point d'arrêt; il n'existe aucun moyen géométrique de prolonger l'arc CA au-delà du point A. Cependant il peut exister des courbes de pression ayant un contact imaginaire avec l'intrados; l'analyse seule permet de trouver les points de la courbe des poussées qui correspondent à ces solutions; nous verrons plus loin un exemple de cette détermination; nous verrons que l'arc CA se prolonge par un arc AH; le point A est le point le plus bas de la courbe.

Au point *c* de l'intrados, correspond le point C de la courbe limite; pour prolonger l'arc AC au-delà du point C, il suffit de prolonger l'arc *ac* de l'intrados. En déplaçant le point de contact au-delà du point *c*, on obtient des centres de poussée de plus en plus élevés, la poussée diminue de plus en plus. Pour un point e' très rapproché de l'élément vertical de l'intrados, on trouve une poussée nulle à l'infini. La condition qui détermine ce point e' est la suivante : soient OP le poids de l'arc $abf'e'$, PP' la force fictive p dirigée suivant le joint; on obtient la poussée sur l'axe OQ en menant par le point P' une parallèle à la tangente à l'intrados; pour que la poussée soit nulle, il faut que celle parallèle passe par le point O. La force fictive PP' est petite, l'angle POP' est aussi très petit; donc le point e' est très rapproché du point *e*. Si on applique au point e', la construction ordinaire pour trouver le centre de poussée, on trouve un centre à l'infini. Il résulte de là que l'arc AC prolongé a pour asymptote, la droite *ab* prolongée. Si le point de contact continue à se mouvoir en descendant même en dessous de l'élément vertical de l'intrados, on obtient des poussées négatives, on reconnaît que le centre de poussée saute brusquement au-dessous du sommet *a* à une distance infiniment grande; on obtient une autre branche de la courbe. Pour ces poussées négatives et même pour les petites poussées à centres très élevés, les courbes de pression présentent des particularités géométriques très intéressantes; nous laissons au lecteur le soin de se livrer à ces recherches qui ne présentent absolument pas d'intérêt pratique.

376. Intrados du deuxième genre. — Si on mène une courbe de pression tangente à l'intrados au point n (fig. 177), on obtient un point N de la conjuguée situé en dessous du point a. Si le point n se déplace vers le bas, on démontre par un raisonnement analogue à celui que nous avons suivi dans le numéro précédent, que le centre de poussée s'abaisse et que la poussée augmente; nous savons déjà que la courbe a un élément horizontal A et qu'on l'obtient en rapprochant indéfiniment le point de contact n du sommet de l'intrados; la conjuguée a donc la forme AC. Cette courbe ne résout pas la question pratique de la détermination des poussées minima, car les poussées qu'elle représente sont évidemment instables. Si on considère les courbes de pression qui atteignent l'intrados par son extrémité c, on obtient l'hyperbole équilatère CE; c'est un arc de cette hyperbole qui limite les poussées stables. Dans ce cas, la courbe limite n'est pas formée par l'enveloppe AC des hyperboles équilatères conjuguées des points de l'intrados; elle est formée par des enveloppées.

Le cas que nous venons d'examiner est exceptionnel; on l'obtient dans le cas d'une voûte, dont la courbure est très forte au sommet et décroît rapidement vers les naissances; on l'obtient aussi dans le cas d'un arc ogival où la courbure au sommet est infinie.

377. Intrados du troisième genre. — Les parties supérieures et inférieures de l'intrados sont respectivement du deuxième et du premier genre. Si d'abord on déplace le point de contact à partir du sommet, dans la première partie de l'intrados, le centre de poussée s'abaisse; on obtient un arc AE (fig. 178). Si, au contraire, le point de contact se déplace vers les naissances, sur la partie de l'intrados qui est du premier genre, le centre de poussée s'élève, on obtient un arc EC. Si par le procédé connu (371); on détermine la tangente au point E, on n'obtient pas une tangente horizontale; donc au point E, il y a rebroussement.

Le point E est l'extrémité de la poussée qui correspond à la courbe intermédiaire entre les courbes de pression qui touchent inférieurement et celles qui touchent supérieure-

ment l'extrados; il est facile de voir que cette courbe de pression traverse l'extrados et lui est osculatrice. En effet, l'arc supérieur au point de contact se trouve sous l'intrados; car c'est la limite d'arcs qui touchent inférieurement l'intrados; l'arc inférieur au point de contact se trouve au-dessus de l'intrados pour la même raison.

La courbe des poussées minima comprend un arc de la courbe EC; les parties de la conjuguée de l'intrados situées en dehors des limites a et b ne conviennent évidemment pas.

Cette disposition se réalisera avec la même forme d'intrados que celle du numéro précédent, si on prolonge l'intrados jusque près de l'élément vertical; on sait, en effet, que près de l'élément vertical on obtient des poussées très petites et des centres de poussée très élevés : l'intrados est du premier genre dans la partie inférieure. On obtient notamment cette disposition, dans le cas d'une voûte en ogive complète; c'est le cas de la figure 178. Dans le cas d'une voûte en ogive, le théorème du numéro 372 n'est plus applicable; on reconnaît que les courbes de pression présentent des dispositions singulières dans les environs du sommet de la voûte en passant du joint $a\alpha$ au joint ab.

378. Intrados du quatrième genre. — La partie supérieure de l'intrados est du premier genre, la partie inférieure est du deuxième genre. Menons les courbes de pression qui touchent l'intrados; faisons mouvoir le point de contact du sommet vers la naissance; on obtient pour la partie supérieure un arc AE (fig. 179); pour la partie inférieure, un arc EC. Le point de rebroussement correspond à la courbe de pression qui traverse l'intrados et lui est osculatrice. Pour déterminer la courbe des poussées minima, il faut en outre tracer la conjuguée CM de l'extrémité c de l'intrados; cette courbe peut couper l'arc AE en un point K; la courbe des poussées minima est formée de l'arc AK et de l'arc KM; au point K ces courbes forment un angle; ce point correspond à la courbe de pression qui touche l'intrados dans sa partie supérieure et passe par l'extrémité c de l'intrados. L'arc KE représente des poussées instables quoique les courbes de

pression qu'elles engendrent touchent supérieurement l'intrados ; cela provient de ce que ces poussées sont plus petites que celles de la conjuguée du point c ; les courbes de pression passent sous le point c.

On réaliserait un intrados du quatrième genre, en établissant sa partie supérieure suivant un arc de cercle et sa partie inférieure suivant un arc de cercle de très grand rayon, une droite ou un arc à courbure renversée : cette disposition est exceptionnelle.

379. Autres genres — On pourrait imaginer des formes d'intrados en nombre considérable, en les composant d'arcs successifs de genres différents ; la conjuguée de l'intrados pourrait comprendre des arcs de courbes avec différents rebroussements ; la courbe limite pourrait présenter plusieurs sommets.

380. Parties faibles et fortes de l'intrados. — Dans le cas d'un intrados du premier genre, la courbe des poussées minima AC (fig. 176) dépend de la forme de l'intrados ; en adoptant pour courbe d'intrados la courbe de pression $an'c$ qui passe par le sommet et l'extrémité, on augmenterait l'aire des solutions stables de la superficie AKK'A' ; on peut donc dire que *l'intrados du premier genre est trop faible.* Dans le cas d'un intrados du deuxième genre (fig. 177), la courbe des poussées minima FE est indépendante de la courbe d'intrados ; on peut réduire les épaisseurs du côté de l'intrados jusqu'à ce que l'on atteigne la courbe de pression $an'c$ qui passe par le sommet a et l'extrémité c ; l'arc FE ne change pas, on peut donc dire que *l'intrados du deuxième genre est trop fort.* L'espace $an'cna$ est un espace inutile, que les courbes de pression n'atteignent pas et que l'on peut supprimer sans modifier la stabilité statique de la voûte. Nous négligeons évidemment dans ce raisonnement l'influence sur la ligne des pressions, du poids des parties enlevées.

§ 6. Forme de la conjuguée de l'extrados.

La conjuguée de l'extrados peut présenter toutes les mêmes dispositions que la conjuguée de l'intrados; il n'y a de différence que dans la détermination des parties utiles de la courbe.

381. Extrados d'égale résistance. — L'extrados est établi suivant une courbe de pression; la conjuguée de l'extrados est un point C (fig. 174); la courbe des poussées maxima est la conjuguée DC de l'extrémité de l'extrados.

382. Extrados du premier genre. — L'extrados est touché supérieurement par les courbes de pression : c'est le cas le plus fréquent. La conjuguée de l'extrados est une courbe BF (fig. 176); elle correspond à des poussées instables. La courbe des poussées maxima est formée par un arc DE de l'hyperbole conjuguée de l'extrémité de l'intrados.

383. Extrados du deuxième genre. — L'extrados est touché inférieurement par les courbes de pression; la conjuguée de l'extrados est une courbe BD (fig. 177). Il faut quelquefois la compléter par la conjuguée de l'extrémité de l'extrados, pour obtenir la courbe des poussées maxima; on en trouve un exemple dans la figure 175.

384. Extrados du troisième genre. — La partie supérieure de l'extrados est du deuxième genre; la partie inférieure est du premier genre. La conjuguée BE'D' (fig. 178) présente un point de rebroussement E'; la courbe des poussées maxima est formée par l'arc CH de cette courbe et l'arc HF de la conjuguée de l'extrémité de l'extrados; en H ces deux courbes forment un angle.

385. Extrados du quatrième genre. — La partie supérieure de l'extrados est du premier genre, la partie inférieure est du deuxième genre. La conjuguée BFD (fig. 179) présente un point de rebroussement F; la courbe des poussées maxima HD est formée par une partie de cette courbe, complétée au besoin par la conjuguée de l'extrémité d de l'extrados.

386. Parties faibles et fortes de l'extrados. — *L'extrados du premier genre est trop fort*; on peut le remplacer par la courbe de pression qui passe par le sommet et l'extrémité. *L'extrados du deuxième genre est trop faible.*

§7. Détermination analytique des courbes enveloppes.

387. Voûte en arc de cercle d'épaisseur constante. — Occupons-nous des courbes de pression tangentes à l'extrados. Soit un joint *nm* (fig. 176) faisant l'angle φ avec la verticale. Le poids de l'arc de voûte *abmn* est proportionnel à l'angle φ; soit :

$$P = a\varphi.$$

La construction qui donne la poussée $OQ = F F''$, qui correspond au point de contact m, se traduit par l'équation :

$$\overline{OQ}\sin\varphi = \overline{SS'} + \overline{OS}\cos\varphi$$

ou

$$q\sin\varphi = p + P\cos\varphi.$$

Nous avons trouvé (351) :

$$p = p'\sin\varphi, \qquad (1)$$

$$p' = a\,\frac{R - R_1}{R}. \qquad (2)$$

Il vient donc :

$$q = p' + a\,\frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}. \qquad (3)$$

Il nous reste à déterminer le centre de poussée F''; soit x l'abscisse de ce point, en prenant le sommet b de l'extrados comme origine; écrivons une équation de moment autour du point m. Soient : R le rayon de l'extrados, R_1 le rayon de la circonférence des centres de gravité des joints ; on a :

$$q\,[x + R(1 - \cos\varphi)] = a\varphi\left[R\sin\varphi - \frac{R_1\sin\varphi}{\varphi}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right].$$

Tirons la valeur de qx, et remplaçons dans cette valeur q et p' par les expressions (1) et (2); il vient :

$$qx = aR(1 - \cos\varphi)\left(\frac{\varphi}{\sin\varphi} - 1\right). \qquad (4)$$

L'équation (3) donne la poussée $q_0 = Bb$, en y faisant $\varphi = 0$; on trouve :

$$q_0 = p' + a. \qquad (5)$$

Prenons le point B comme origine. Soient les axes $b'By$; on a :

$$y = q_0 - q = a\left(1 - \frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}\right). \qquad (6)$$

L'abscisse est encore x, elle est donnée par l'équation (4).

Pour obtenir la forme de la courbe dans les environs du point B, développons les valeurs de x et de y, en négligeant certains termes, on trouve :

$$y = a\frac{\varphi^2}{3} \qquad (7)$$

$$qx = aR.\frac{\varphi^2}{2} \times \frac{\varphi^2}{6}.$$

Or,
$$q = q_0 - y,$$

$$x = \frac{aR}{q_0}\frac{\varphi^4}{12}. \qquad (8)$$

En éliminant φ entre les équations (7) et (8), on trouve :

$$\frac{y^2}{x} = \frac{4}{3}\frac{aq_0}{R}. \qquad (9)$$

C'est l'équation d'une parabole F'BF; l'arc F'B ne peut s'obtenir qu'en donnant à φ^2 des valeurs négatives ou à φ des valeurs imaginaires; nous reconnaissons ici ce que nous avions annoncé au numéro 375.

On peut aussi obtenir l'équation exacte de la branche BF' en remplaçant dans les équations (4) et (6) φ par $\varphi : \sqrt{-1}$; on trouve :

$$q_0 - q = y = a\left(1 - \frac{\varphi}{\operatorname{tg} h\varphi}\right) \qquad (6)^{bis}$$

$$qx = aR(\cos h\varphi - 1)\left(1 - \frac{\varphi}{\sin h\varphi}\right). \qquad (4)^{bis}$$

Ces formules s'appliquent aussi à la conjuguée de l'intrados, quand il n'y a pas de surcharge; il suffit de remplacer R par le rayon r de l'intrados.

388. Courbes osculatrices au sommet de l'extrados et de l'intrados. — Les poussées Bb et Aa, qui correspondent à ces courbes, peuvent se calculer facilement; en faisant $\varphi = 0$, nous avons déjà trouvé l'équation (5) qui donne q_0; on en déduit :

$$q_0 = a\left(1 + \frac{R - R_1}{R}\right). \qquad (10)$$

On obtient $q'_0 = Aa$; en remplaçant R par r; on trouve :

$$q'_0 = a\left(1 + \frac{r - R_1}{r}\right). \qquad (11)$$

Il existe des formules plus générales se rapportant au cas de la figure 164; on trouve :

$$q_0 = a\left(1 + \frac{bi}{ob}\right)\frac{o'b}{ob}. \qquad (12)$$

Ces formules sont utiles; les méthodes graphiques qui précèdent ne permettent pas de déterminer avec précision les points A et B des courbes limites, qui correspondent aux sommets de l'intrados et de l'extrados; on obtient ces points en construisant les formules (10), (11) ou (12). Les formules (10) et (11) rentrent dans la formule plus générale :

$$q = a\frac{2x - R_1}{x}, \qquad (13)$$

on obtient q_0, q_0' en faisant $x = R$ et $x = r$. On construit l'équation (13) en divisant par x les ordonnées de la droite $q = a(2x - R_1)$; cette construction est indiquée (fig. 176); nous avons pris R_1 comme base d'intégration.

On construit l'équation (12) par une construction du même genre, mais il faut une opération de plus.

§ 8. Forme de l'aire des solutions stables.

Nous avons discuté les formes des courbes des poussées maxima et minima ; il nous reste à discuter la situation de ces lignes l'une par rapport à l'autre pour avoir une idée complète des différentes formes que l'aire des solutions stables peut affecter.

389. Intrados et extrados d'égale résistance. — Si l'intrados et l'extrados de la voûte sont établis suivant deux courbes de pression, l'aire des solutions stables est un quadrilatère ABCD (fig. 174) formé de deux droites AD et BC et de deux arcs d'hyperboles équilatères conjuguées des extrémités de l'intrados et de l'extrados. Cette forme de voûte est la plus avantageuse ; la stabilité statique est la même que si le bloc *abdc* était un monolithe. Si on donne les sommets *a*, *b* et les points extrêmes *c* et *d* de l'intrados et de l'extrados, il est impossible de trouver, en modifiant la forme de la voûte de toutes les manières, une aire des solutions stables plus grande que l'aire ABCD.

Si on réduit l'épaisseur de la voûte, en continuant à donner à l'intrados et à l'extrados la forme de deux courbes de pression, l'aire des solutions stables diminue. Si l'épaisseur se réduit de *ab* en *ab'*, on obtient l'aire AB'C'D'. Comme il s'agit seulement d'examiner les différents cas qui peuvent se présenter, nous avons supposé pour simplifier la figure que l'intrados reste fixe et que la forme des lignes de pressions ne change pas ; nous ferons la même hypothèse dans les autres cas. En diminuant l'épaisseur indéfiniment, l'aire des solutions stables diminue indéfiniment ; cette aire ne se réduit à zéro que pour une épaisseur nulle. Dans tous les autres cas, nous verrons qu'il y a une épaisseur minima qui n'admet qu'une solution stable.

390. Intrados et extrados du premier genre.—La courbe des poussées maxima est l'hyperbole équilatère DE (fig. 176), conjuguée du centre de pression *d* ; la courbe des poussées

minima est la conjuguée AK de l'intrados complétée au besoin par la conjuguée de l'extrémité *c*. Si la demi-voûte était un monolithe, ou bien si l'intrados et l'extrados étaient d'égale résistance, l'aire des solutions stables serait l'aire A'K'ED, limitée par les conjuguées des points *c* et *d*. La conjuguée de l'intrados enlève la partie A'K'KA de cette aire; la grandeur et la forme de l'aire enlevée dépend de la forme de l'intrados; si l'intrados s'approche de plus en plus d'une courbe de pression, la courbe AC se rapproche de plus en plus du point A'; l'aire enlevée prend la forme d'un triangle curviligne, puis se réduit à zéro.

Dans une certaine mesure, la forme de l'extrados n'exerce pas d'influence sur la stabilité statique de la voûte. Menons la courbe de pression *b m' d* par le sommet *b* et l'extrémité *d* de l'extrados; on peut supprimer la partie *b m d m'* sans modifier l'aire des solutions stables.

Pour une forme d'intrados déterminée, l'aire des solutions stables dépend des épaisseurs *ab* et *cd* au sommet et aux naissances de la voûte. Si on réduit ces épaisseurs en conservant l'intrados et les lignes des pressions, la courbe DE se rapproche de AC; l'aire des solutions stables se réduit. Pour la voûte *ab'd'c*, cette aire sera le triangle curviligne N'MA; pour une certaine voûte *ab''d''c*, l'aire se réduit à un point N; il n'y a qu'une solution stable; la voûte a l'épaisseur la plus petite qu'on peut lui donner, même dans l'hypothèse d'une résistance illimitée.

391. Intrados et extrados du deuxième genre. — La courbe des poussées maxima (fig. 177) est la conjuguée ED de l'extrados, complétée au besoin par la conjuguée de l'extrémité *d*; la courbe des poussées minima est la conjuguée de l'extrémité *c* de l'intrados. Si la demi-voûte était un monolithe ou bien si l'intrados et l'extrados étaient d'égale résistance, l'aire des solutions stables serait l'aire D'B'C'F comprise entre les conjuguées des extrémités *c* et *d*. La conjuguée de l'extrados enlève la partie EC'B'D'; l'aire enlevée dépend de la forme de l'extrados; sa forme varie depuis la forme d'un triangle très petit voisin du point B' jusqu'au

pentagone DD'B'C'E. Dans une certaine mesure, on peut modifier l'intrados sans changer l'aire des solutions stables; on peut enlever la partie *ancn'* comprise entre l'intrados et la courbe des pressions qui passe par le sommet *a* et l'extrémité *c*.

Si l'épaisseur de la voûte diminue, l'intrados et les lignes de pression ne changeant pas, la courbe DE se rapproche du point F; pour une certaine épaisseur *ab'd'c*, l'aire se réduit au point F; il n'y a qu'une solution stable, cette épaisseur est l'épaisseur minima.

En comparant les deux dispositifs des figures 177 et 176, on s'aperçoit que dans les deux cas l'aire des solutions stables est plus petite que dans le cas d'une voûte d'égale résistance; mais les diminutions s'opèrent sur deux angles différents. Si l'épaisseur de la voûte devient plus petite que l'épaisseur minima, il y a rupture dans les deux cas, mais le mode de rupture est complètement différent.

399. Intrados et extrados du troisième genre. — La courbe des poussées maxima est formée (fig. 178) de l'arc HC de la conjuguée de l'extrados et de l'arc FH de la conjuguée de l'extrémité *d*; la courbe des poussées minima est la conjuguée de l'intrados et au besoin de l'extrémité *c*. En comparant l'aire des solutions stables à celle que l'on obtiendrait pour une demi-voûte monolithe, on trouve qu'il y a deux parties enlevées qui dépendent l'une de l'extrados, l'autre de l'intrados; la première est CHDM, la seconde est KMM'K'. Il y a cependant une partie de la courbe d'intrados et une partie de la courbe d'extrados qui n'exercent aucune influence sur la stabilité statique de la voûte. Menons par le point *a* la courbe de pression *amδ* qui touche l'intrados en *m*; menons par le point *d* la courbe de pression *βnd* qui touche l'extrados en *n*; on voit facilement que l'on peut supprimer l'espace compris entre la courbe *am* et l'intrados, ainsi que l'espace compris entre la courbe *nd* et l'extrados. Si les épaisseurs de la voûte diminuent, l'aire des solutions stables diminue aussi; pour une certaine épaisseur *ab'd'c*, cette aire se réduit en un point; c'est l'épaisseur minima

en dessous de laquelle il y a rupture. Il y a une charnière à l'extrados et une à l'intrados.

393. Intrados et extrados du quatrième genre. — La courbe des poussées maxima (fig. 179) est l'arc DH de la conjuguée de l'extrados, complété au besoin par la conjuguée du point *d*; la courbe des poussées minima comprend l'arc AK de la conjuguée de l'intrados et l'arc KM de la conjuguée du point *c*. Cette disposition est l'inverse de la précédente; on peut enlever les espaces *bn* et *mc*. Pour une certaine épaisseur $ab'd'c$, l'aire des solutions stables se réduit à un seul point : c'est l'épaisseur minima.

394. Autres dispositifs. — On peut combiner un intrados d'un certain genre avec un intrados d'un genre différent; on peut obtenir ainsi des dispositifs très nombreux. Ainsi dans la figure 175, l'intrados est du premier genre, l'extrados est du deuxième genre.

CHAPITRE V.

Solutions stables dans le cas d'une résistance limitée.

§ 1. Méthode d'élimination par les enveloppes.

395. Principe de la méthode (1). — Considérons d'abord la stabilité élastique du joint *ab* (fig. 180) situé au sommet de la voûte; la pression maxima engendrée par la poussée ne doit pas dépasser une certaine limite R'; nous avons vu (250) comment on peut tracer la ligne *bea* des plus grandes pressions totales que le joint peut supporter; cette ligne *bea* constitue une pression limite que la poussée ne peut dépasser. Soit ensuite un joint quelconque *cd*; traçons de même la ligne *cfd* des plus grandes pressions normales que ce joint peut supporter et les conjuguées AB et CD des

(1) C'est la méthode de M. Durand-Claye. Voir la note du numéro 364.

courbes cf et df; l'extrémité de la poussée doit rester à l'intérieur du quadrilatère ABCD pour qu'il n'y ait pas danger d'écrasement dans les joints ab et cd. Déplaçons le joint cd; pour toutes les positions, traçons les courbes analogues à AB et CD; traçons le contour qui limite l'aire intérieure à tous les quadrilatères analogues à ABCD; cette aire est l'aire des solutions stables.

396. Tracés graphiques. — Nous savons (250) comment on trace les lignes be, ae, df, cf; chacune de ces lignes comprend une droite et un arc d'hyperbole. Les arcs d'hyperboles sont presque toujours inutiles à considérer, car ils se rapportent à des centres de pression situés près du milieu du joint; or, si on atteint déjà la pression limite dans ce joint, ces pressions seront dépassées dans les joints où le centre de pression s'éloignera du milieu; les arcs d'hyperboles représentent donc presque toujours des solutions instables et il sera inutile de les tracer.

Il faut aussi construire les conjuguées des lignes df et ef; à un point de ces lignes, correspond une pression normale et un centre de pression sur le joint cd; on détermine la poussée et le centre de poussée par une méthode exposée au numéro 344. On obtient ainsi un point de la conjuguée; on peut trouver la tangente à ce point par le théorème du numéro 359. On détermine un nombre suffisant de points pour tracer ces conjuguées AB et CD et mener l'enveloppe intérieure de ces courbes (1).

(1) Les lignes df et cf sont formées chacune d'une droite et d'un arc d'hyperbole équilatère. La conjuguée de la droite est une hyperbole non équilatère passant par le point T conjugué de $N = 0$; on peut déterminer graphiquement ses asymptotes. La conjuguée de l'hyperbole (357, corollaire) est une hyperbole équilatère dont l'asymptote autre que ab est l'horizontale de l'un des points qui divisent cd en trois parties égales.

§ 2. Élimination des solutions instables par les maxima et minima.

397. Principe de la méthode. — Donnons-nous le centre de poussée m; les poussées stables sont comprises entre deux limites qui sont déterminées par les enveloppes des courbes ab, cd; on reconnaît aisément qu'on obtient ces limites en cherchant le minimum de l'ordonnée Nm, et le maximum de l'ordonnée Mm lorsqu'on fait varier le joint cd.

398. Tracé graphique. — Cette méthode ne conduit pas à un tracé graphique très simple. Mentionnons pour mémoire les deux suivants : 1° on peut chercher les ordonnées Nm et Mm en traçant les courbes AB et CD; 2° on trace la conjuguée du point m; cette conjuguée coupe la ligne dfc en deux points, les ordonnées Nm et Mm correspondent à ces deux points. On cherche le maximum de Mm et le minimum de Nm comme au numéro 367.

§ 3. Méthode directe.

399. Principe de la méthode. — Considérons une solution stable; faisons croître la poussée; la courbe de pression se relève et s'approche de l'extrados. La pression par unité de surface en certains points de l'extrados devient de plus en plus grande; il arrivera donc un moment où la pression en un certain point dangereux atteindra la pression limite R'; la poussée correspondante sera une poussée maxima. Si, au contraire, on diminue la poussée sans changer le centre de poussée, la courbe de pression s'approche de l'intrados, et il arrivera un moment où la pression en un certain point dangereux atteindra la limite R'. Deux cas bien différents peuvent se présenter : 1° on peut atteindre la pression limite R' aux sommets a b ou aux extrémités c d de l'intrados ou de l'extrados; 2° on peut atteindre la pression R' en un point intermédiaire. Dans ce dernier cas, la pression dans le joint dangereux est plus grande que dans les joints

qui précèdent et qui suivent; donc la pression passe par un maximum R'; dans le second cas, R' est simplement une plus grande valeur. Nous sommes ainsi amené à résoudre le problème suivant : *tracer une courbe de pression telle que dans un joint donné la pression à l'extrados ou à l'intrados passe par un minimum égal à* R'. A chacune de ces courbes de pression, correspond un point du contour limite; mais ce contour pourra comprendre aussi des arcs de la ligne *bea* et de la conjuguée de la ligne *cfd*.

400. Équations du problème. — Pour fixer les idées, nous nous donnerons le point dangereux à l'intrados. Soit *cd* (fig. 181) le joint donné; on veut déterminer la poussée et le centre de poussée par les deux conditions suivantes : au point *c*, la pression par unité de surface est égale à R' et cette pression est plus grande que dans les joints voisins. Soient : $q = \overline{QA}$ la poussée inconnue; $P = \overline{AP}$ le poids du tronçon de voûte compris entre le sommet et le joint *cd*; φ l'angle de ce joint avec la verticale; N la force normale qui sollicite le joint; on a :

$$N = q \cos\varphi + P \sin\varphi.$$

Soit $u = cB$ la distance du centre de pression à l'intrados, on doit avoir :

$$R' = \frac{2}{3}\frac{N}{u}. \qquad (1)$$

Nous supposons la loi du triangle; nous avons déjà fait remarquer que ce cas se présentera presque toujours (399); si la suite des opérations indiquait que cette hypothèse n'est pas la vraie, il faudrait reprendre les calculs avec la formule qui s'applique à la loi du trapèze. Nous devons aussi exprimer que la pression passe par un maximum; nous écrirons :

$$d\left(\frac{2}{3}\frac{N}{u}\right) = 0$$

ou

$$\frac{du}{u} = \frac{dN}{N}. \qquad (2)$$

On sait qu'il faut deux conditions pour déterminer une courbe de pression ; les équations (1) et (2) suffisent donc pour résoudre le problème. Nous remarquerons cependant que l'équation (2) convient aussi au cas où la pression par unité de surface passe par un minimum R' ; ces solutions sont instables, on les éliminera facilement. Il nous reste à mettre l'équation (2) sous forme finie en calculant du et $d\mathrm{N}$.

Calcul de du. — On a (si $c\mathrm{A}$, BE sont perpendiculaires au joint) :

$$du = c'\mathrm{B}' - c\mathrm{B} = \mathrm{EB}' - c'\mathrm{H}.$$

Soient : ω' = angle EBB' = angle P''QN,
k = angle $c'c\mathrm{H}$,
r le rayon de l'intrados,
$d\varphi$ l'angle des deux joints cd $c'd'$.

On a : $c\mathrm{H} = r\,d\varphi$; $c'\mathrm{H} = c\mathrm{H}\,\mathrm{tg}\,k = r\,\mathrm{tg}\,k\,d\varphi$;
$\mathrm{EB} = (r+u)\,d\varphi$; $\mathrm{EB}' = \mathrm{EB}\,\mathrm{tg}\,\omega' = (r+u)\,\mathrm{tg}\,\omega'\,d\varphi$;

on en déduit :

$$du = (r+u)\,\mathrm{tg}\,\omega'\,d\varphi - r\,\mathrm{tg}\,k\,d\varphi. \qquad (3)$$

Calcul de $d\mathrm{N}$. — On a :

$$d\mathrm{N} = -q\sin\varphi\,d\varphi + \mathrm{P}\cos\varphi\,d\varphi + \frac{d\mathrm{P}}{d\varphi}\sin\varphi\,d\varphi. \qquad (4)$$

Soit : ω = angle PQN.

On a $\overline{\mathrm{NP}} = q\sin\varphi - \mathrm{P}\cos\varphi$, or $\overline{\mathrm{NP}} = \mathrm{N}\,\mathrm{tg}\,\omega$,
Donc : $q\sin\varphi - \mathrm{P}\cos\varphi = \mathrm{N}\,\mathrm{tg}\,\omega$. (5)

D'autre part, nous avons trouvé pour la force fictive (348) :

$$p = \frac{d\mathrm{P}}{d\varphi}\,\frac{a-x}{x}\sin\varphi.$$

Soit G le centre de gravité du joint ; posons :

$$u_1 = c\mathrm{G},$$

au point c on a :

$$p = \frac{d\mathrm{P}}{d\varphi}\,\frac{u_1}{r}\sin\varphi, \qquad (6)$$

au point B, on a :

$$p' = \frac{d\mathrm{P}}{d\varphi}\,\frac{u_1 - u}{r+u}\sin\varphi. \qquad (7)$$

Au moyen des équations (5) et (6), on peut transformer la valeur de dN, on trouve :

$$dN = -N \operatorname{tg}\omega\, d\varphi + \frac{pr}{u_1} d\varphi. \qquad (8)$$

L'équation (2) devient, en remplaçant du et dN par leurs valeurs :

$$\frac{(r+u)\operatorname{tg}\omega' - r\operatorname{tg}k}{u} = -\operatorname{tg}\omega + \frac{pr}{Nu_1}. \qquad (9)$$

Les équations (1) et (9) sont les équations du problème ; on reconnaît, en effet, que toutes les inconnues N, u, ω, ω', q ne dépendent que de deux inconnues. Par l'élimination, on ramènera la question à la résolution d'une seule équation à une inconnue.

401. Choix et détermination de l'inconnue. — Soit $PP' = p$, nous choisirons pour inconnue l'angle :

$$\varepsilon = P'QN.$$

On a :

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \operatorname{tg}\omega + \frac{p}{N},$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \operatorname{tg}\omega' + \frac{p-p'}{N}.$$

Tirons de ces équations les valeurs de $\operatorname{tg}\omega$ et de $\operatorname{tg}\omega'$, introduisons-les dans l'équation (9) ; on trouve :

$$(r+2u)\operatorname{tg}\varepsilon = r\operatorname{tg}k + \left(r+2u+\frac{ru}{u_1}\right)\frac{p}{N} - (r+u)\frac{p'}{N}. \qquad (10)$$

Des équations (6) et (7), on tire :

$$p' = p\,\frac{u_1-u}{u_1}\,\frac{r}{r+u}.$$

L'équation (10) devient, en éliminant p' :

$$(r+2u)\operatorname{tg}\varepsilon = r\operatorname{tg}k + \frac{2p}{N}\,\frac{u}{u_1}\,(r+u_1).$$

d'où l'on tire :

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\operatorname{tg}k}{1+2\dfrac{u}{r}} + \frac{2p}{N}\,\frac{u}{u_1}\,\frac{r+u_1}{r+2u}.$$

Déterminons N_1 par l'équation :

$$R' = \frac{2}{3}\,\frac{N_1}{u_1}.$$

On a : $N_1 = \frac{N u_1}{u}$; la valeur de tg ε devient :

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\operatorname{tg} k}{1 + 2\,\frac{u}{r}} + \frac{2p}{N_1}\,\frac{1 + \frac{u_1}{r}}{1 + 2\,\frac{u}{r}} \qquad (11)$$

Les longueurs u et u_1 sont très petites, comparées au rayon r de l'intrados ; on peut négliger vis-à-vis de l'unité les termes $2\,\frac{u}{r}$ et $\frac{u_1}{r}$; cette simplification est d'autant plus admissible que la valeur de tg ε est très petite, et qu'ainsi l'erreur commise est une fraction très petite d'une quantité qui est elle-même très petite. On trouve :

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \operatorname{tg} k + \frac{2p}{N_1}. \qquad (12)$$

L'angle ε détermine la direction de la droite P'Q et par conséquent la poussée QA. On connaît alors la pression N, on en déduit u au moyen de l'équation (1) ; la courbe de pression est déterminée par le centre B et la poussée ; on obtient le centre de poussée et un point de la courbe des poussées minima. La détermination de ce point s'opère par le tracé graphique suivant.

402. Tracé graphique. — Déterminons d'abord la poussée minima Q'A qui correspond au joint dangereux cd dans le cas d'une résistance illimitée ; pour cela (369), portons : le poids P du tronçon de voûte correspondant en AP, la force fictive p, prise en sens contraire en PP' ; menons P'Q' parallèlement à l'élément cc' de l'intrados ; on obtient Q'A. Construisons sur PP' et P'Q' prolongé un parallélogramme PP'ST dont la hauteur perpendiculaire à PP' soit égale à $\frac{1}{2}\,N_1 = \overline{IK}$, valeur de la force normale maxima au

milieu I de cG, distance comprise entre l'intrados et le centre de gravité du joint ; la diagonale P'T détermine l'extrémité Q de la poussée. On obtient le centre de pression B par la condition $\overline{BM} = \overline{QN}$.

Intrados normal aux joints. — Presque toujours les joints sont dirigés normalement à l'intrados ; dans la construction précédente on doit faire $k = 0$; on applique alors la règle suivante (fig. 182) : on porte le poids P du tronçon de voûte en AP, la force fictive prise en sens contraire en PP', la force normale maxima $\frac{N_i}{2}$ au milieu de la distance du centre de gravité du joint à l'intrados en TP, on mène TP' qui détermine la poussée QA.

Point dangereux à l'extrados — Si l'on établit que la pression par unité de surface à l'extrados passe par un maximum R' en un certain point donné, on obtient les mêmes équations, sauf en ce qui concerne le signe de la force fictive; on est donc conduit au même tracé graphique (fig. 183) : on porte $\overline{AP} = P$; $\overline{PP'} = -p$, force fictive prise en sens contraire pour un centre de pression à l'extrados ; on mène P'Q' parallèlement à l'élément dd' de l'extrados ; sur PP' et sur P'Q' prolongé, on construit un parallélogramme dont la hauteur perpendiculaire à PP' soit égale à I'K' la force normale maxima au milieu I' de la distance à l'extrados du centre de gravité du joint; la diagonale P'T détermine l'extrémité Q de la poussée QA ; on trouve le centre de pression B en portant N en BM.

103. Contour limite. — Soit (fig. 180) la voûte $abcd$. Pour chaque position du point dangereux à l'intrados, on obtient une poussée minima ; en faisant mouvoir ce point dangereux sur l'intrados, on obtiendra une courbe A'X ; nous reconnaîtrons bientôt que cette courbe est l'enveloppe des conjuguées de toutes les lignes analogues à cf. Si de même nous faisons mouvoir le point dangereux sur l'extrados, nous obtenons la courbe D'Y. En considérant les poussées qui correspondent aux pressions R' aux quatre points $a\,b\,c\,d$,

nous obtenons l'aire ABCD ; la courbe A'X enlève une partie de cette aire, nous obtenons finalement la surface A'B'CD. Nous reconnaissons ainsi que la courbe D'Y, dans le cas de la figure, doit être écartée du contour limite ; il est facile de voir pourquoi ; à un point de cette courbe correspond une courbe de pression telle, que la pression en un point de l'extrados passe par un maximum ou un minimum égale à R' ; mais la position de cette courbe en dehors du quadrilatère ABCD prouve que la pression en *b* et *d* est plus grande que R' : donc R' est ici une valeur minima de la pression et c'est la raison pour laquelle les courbes de pression représentées par D'Y sont toutes instables.

§ 4. Propriétés des courbes limites.

Nous connaissons suffisamment les propriétés de lignes *ae*, *be* (fig. 180) et des conjuguées des lignes *cf*, *fd* ; nous nous occuperons exclusivement des courbes A'X et D'Y ; pour simplifier le langage nous appellerons respectivement ces courbes les conjuguées des pressions limites à l'intrados et à l'extrados.

404. Théorème I. — *La conjuguée des pressions limites à l'intrados est l'enveloppe des conjuguées des lignes analogues à* cf. *La conjuguée des pressions limites à l'extrados est l'enveloppe des conjuguées des lignes analogues à* df.

Cette propriété peut être considérée comme la conséquence de la première méthode que l'on peut employer pour trouver les courbes limites (395) ; elle peut aussi se démontrer directement. L'intersection des conjuguées de deux courbes analogues à *cf*, correspond à la courbe de pression qui produit une pression R' en deux points de l'intrados ; si ces deux points deviennent infiniment voisins, on obtient un point de l'enveloppe de ces conjuguées et ce point correspond à une courbe de pression telle que l'on atteint la pression R' en deux points infiniment voisins de l'intrados. Si la pression à l'intrados est égale à R' en deux points infiniment voisins,

c'est qu'en général elle passe par un maximum ou un minimum en ce point. Donc le point où la conjuguée de *cf* touche son enveloppe, est le point de la conjuguée des pressions limites à l'intrados qui correspond au joint *cd*.

On démontre de la même manière que le point où la conjuguée de *df* touche son enveloppe, est le point de la conjuguée des pressions limites à l'intrados qui correspond au joint *cd*.

405. Théorème II. — *Si l'on fait tourner la sous-tangente de la courbe limite, de 180° autour de l'ordonnée horizontale, si l'on fait tourner de 180°, la distance du point dangereux au centre de pression correspondant, autour de ce centre de pression, on obtient deux points au même niveau.*

En effet, cette propriété existe pour la conjuguée d'une ligne analogue à *cf*; il suffit d'appliquer le théorème du numéro 371. Soit X le conjugué du point K, portons $ck = kF'$; menons l'horizontale FF'; F*x* est la sous-tangente renversée. Or la tangente à l'enveloppe se confond avec la tangente à l'une de ses enveloppées; soit X le point de la courbe limite qui correspond au point dangereux *c*, soit *k* le centre de pression correspondant; la tangente en X n'est autre que la tangente conjuguée de la tangente *c*K; cela démontre la propriété.

406. Théorème III. — *La conjuguée des pressions limites à l'intrados touche la ligne* ae *des poussées qui produisent une pression* R' *au sommet de l'intrados; la conjuguée des pressions limites à l'extrados touche la ligne* be *des poussées qui produisent une pression* R' *au sommet de l'extrados.*

Nous avons démontré que la courbe AX est l'enveloppe des conjuguées des lignes analogues à *cf*; si le point *c* vient se confondre avec *a*, cette conjuguée devient la ligne *ae*; donc la ligne AX touche la ligne *ae*. On démontre de la même manière que la ligne B' touche la ligne *be*.

§ 5. Formes de la conjuguée des pressions limites à l'intrados.

407. Intrados d'égale résistance. — Supposons que pour une courbe de pression, la pression par unité de surface à l'intrados soit constante et égale R′ ; nous dirons que l'intrados est *d'égale résistance*. Soit AA′ (fig. 184) la poussée qui engendre cette courbe de pression; pour obtenir un point de la conjuguée des pressions limites à l'intrados, on doit se donner la pression R′ en deux points infiniment voisins de l'intrados ; quels que soient ces deux points on trouvera une courbe de pression unique, c'est celle qui correspond à la poussée AA′; la courbe enveloppe se réduit donc au point A : on vérifie facilement que toutes les enveloppées passent par ce point.

408. Des différents genres d'intrados. — L'intrados d'une voûte peut différer de l'intrados d'égale résistance dans un sens ou dans l'autre. Donnons-nous la pression R′ en deux points infiniment voisins de l'intrados ; la pression passe par un maximum ou un minimum. Si la pression passe par un maximum, nous dirons que l'intrados est du *premier genre ;* si la pression passe par un minimum, nous dirons que l'intrados est du *second genre ;* dans ce dernier cas, le point où la pression est R′ n'est plus un point de plus grande fatigue, c'est au contraire un point de moindre fatigue. Les courbes d'intrados peuvent se composer d'arcs du premier et du second genre. L'intrados sera du *troisième genre*, si sa partie supérieure est du second genre et sa partie inférieure du premier. L'intrados sera du *quatrième genre* si sa partie supérieure est du premier genre et sa partie inférieure du second.

Cette classification ressemble à la classification que nous avons adoptée pour le cas d'une résistance illimitée; les deux classifications ne sont cependant pas identiques, car la courbe de passage du premier au second genre est la courbe d'égale résistance et elle dépend de la limite R′.

Toutefois on peut montrer que les deux classifications ne diffèrent que dans les cas voisins des courbes de passage. En effet, dans le cas d'une résistance illimitée, l'intrados est du premier genre, s'il est touché supérieurement par les courbes de pression ; pour une courbe de pression tangente à l'intrados, la pression à l'intrados passe au point de contact par un maximum égal à l'infini ; élevons le centre de poussée d'une quantité convenable ; la pression dans les environs du point de contact passera par un maximum égal à R'. Ce raisonnement suppose que dans la valeur de la pression

$$\frac{2}{3}\frac{N}{u},$$

l'influence de la diminution de u domine l'influence de l'augmentation de N ; cela ne se produirait pas si u variait très peu, c'est-à-dire si la courbe de pression tangente coïncidait presque avec la courbe d'intrados : ce cas est exceptionnel.

D'après ce que nous avons dit précédemment (375, 376, 377, 378), l'intrados en arc de cercle et en anse de panier est du premier genre ; l'arc ogival est du second ; l'ogive complète est du troisième ; le quatrième genre est exceptionnel.

409. Intrados du premier genre. — Donnons-nous à l'intrados un point où la pression passe par un maximum R' ; déplaçons ce point du sommet vers la naissance ; l'extrémité la poussée décrit une courbe ; le premier élément touche la ligne ae (fig. 180), l'élément extrême touche la ligne AX. La poussée qui correspond à un point de cette courbe doit produire à l'intrados des pressions moindres que R', sauf au point de plus grande fatigue où la pression est R' ; il faut pour cela que cette courbe soit située en A'X, dans l'angle eAX, car tous les points en dehors de cet angle correspondent à des poussées qui produisent, soit en a, soit en c, des pressions supérieures à R'. La courbe présente un élément horizontal. On peut (405) tracer la tangente en un

point quelconque de la ligne AX, on reconnaît facilement à quel point dangereux correspond l'élément horizontal. On peut aussi démontrer que le point A′ correspond à la courbe de pression qui produit une pression R′ en quatre points infiniment voisins du sommet *a*.

410. Intrados du deuxième genre. — Donnons-nous (fig. 185) à l'intrados un point où la pression passe par un minimum R′; déplaçons ce point du sommet vers la naissance; l'extrémité de la poussée décrit une courbe; le premier élément touche l'enveloppée *ea*, l'élément extrême touche l'enveloppée AB; mais la poussée qui correspond à un point de cette courbe produit en *a* et en *c* des pressions plus grandes que R′; il faut pour cela que cette courbe soit située en A′X dans l'angle opposé à DAB. Elle présente aussi un élément horizontal. Dans ce cas la ligne A′X ne limite pas les poussées stables; la courbe limite est formée par les deux enveloppées AD et AB.

411. Intrados du troisième genre. — La partie supérieure de l'intrados est du deuxième genre; la partie inférieure est du premier genre. Nous n'avons pas représenté la courbe d'intrados (fig. 186); cependant nous désignerons la partie supérieure par *at*, la partie inférieure par *tc*. En raisonnant comme précédemment, on voit qu'à l'arc *at* correspond l'arc A′I et qu'à l'arc *tc* correspond l'arc IX. Ces deux arcs doivent avoir en I un point de rebroussement. La limite des poussées stables est formée par l'arc IX complété par l'enveloppée *a*D et quelquefois par AX.

412. Intrados du quatrième genre. — A la partie supérieure de l'intrados, correspond l'arc AI (fig. 187); à la partie inférieure correspond l'arc IX; la limite des solutions stables comprend une partie A′B de l'arc AI, et les deux enveloppées extrêmes BC et EA.

§ 6. Formes de la conjuguée des pressions limites à l'extrados.

La conjuguée des pressions limites à l'extrados peut présenter toutes les mêmes dispositions que la conjuguée des pressions limites à l'intrados ; il n'y a de différence que dans la détermination des parties utiles de la courbe.

413. Extrados d'égale résistance. — Pour une poussée CC' (fig. 184), la pression en tous les points de l'extrados est constante et égale à la limite R'. La conjuguée des pressions limites à l'extrados se réduit à un point unique C ; on vérifie aisément que toutes les enveloppées passent par ce point; les deux enveloppées CB et CD qui correspondent au sommet et à l'extrémité de l'extrados font partie de la courbe limite des solutions stables.

414. Extrados du premier genre. — On se donne une pression R' en deux points infiniment voisins de l'extrados ; l'extrados est du premier genre quand la pression à l'extrados passe par un minimum en ces points. On trouve une courbe D'Y (fig. 180), car elle doit correspondre à des poussées qui produisent en *a* et *d* des pressions supérieures à R'. Les arcs BC et CD des enveloppées extrêmes font partie de la courbe limite.

415. Extrados du deuxième genre. — On se donne une pression R' en deux points infiniment voisins de l'extrados ; on détermine la courbe de pression par ces deux conditions ; l'extrados est du second genre quand la pression passe par un maximum en ces points. Les poussées que l'on obtient ainsi produisent en *a* et *c* (fig. 185) des pressions inférieures à R' ; on trouve une courbe C'Y dont une partie forme limite des solutions stables.

416. Extrados du troisième genre. — La partie supérieure est du deuxième genre ; la partie inférieure est du premier.

La conjuguée des pressions limites à l'extrados a la forme

B'I'Y (fig. 186); elle présente un point de rebroussement I' qui correspond au point de séparation entre les deux parties de l'extrados. L'arc B'C' de l'enveloppe, l'arc EB' de l'enveloppée bC, l'arc C'D de l'enveloppée extrême DY font partie de la courbe limite des solutions stables.

417. Extrados du quatrième genre. — La partie supérieure de l'extrados est du premier genre, la partie inférieure est du second genre. La conjuguée des pressions limites à l'extrados a la forme B'I'Y (fig. 187); elle présente un point de rebroussement. L'arc E'D' de la courbe enveloppe, et quelquefois deux arcs des enveloppées extrêmes font partie de la courbe limite des solutions stables.

§ 7. Forme de l'aire des solutions stables.

Nous avons étudié les formes des diverses parties de la courbe limite; il nous reste à discuter les positions relatives de ces courbes; cette discussion est presque la reproduction de celle que nous avons faite dans le cas d'une résistance illimitée (389 à 393).

418. Intrados et extrados d'égale résistance. — L'aire des solutions stables est un quadrilatère ABCD (fig. 184) formé par les conjuguées des pressions limites aux sommets et aux extrémités de l'extrados et de l'intrados. Cette forme de voûte est celle qui donne la plus grande surface des solutions stables.

Si on réduit l'épaisseur de la voûte, l'aire ABCD diminue; pour une certaine épaisseur cette aire se réduit en un point; cette épaisseur est l'épaisseur minima. La courbe de pression doit alors produire une pression R/ en tous les points de l'extrados et de l'intrados; dans chaque joint les pressions doivent suivre la loi du rectangle; la courbe de pression unique coïncide avec la ligne centrale de la voûte (1).

(1) Pour une épaisseur voisine de l'épaisseur minima, la loi des pressions dans chaque joint est la loi du trapèze; le quadrilatère des solutions stables est formé de quatre arcs d'hyperboles; on démontre facilement que chaque arc est la conjuguée d'un centre de pression fixe (357).

419. Intrados et extrados du premier genre. — L'aire des solutions stables est A'B'CD (fig. 180); si l'intrados était d'égale résistance, cette aire serait ABCD; l'aire A'B'BA est la partie à retrancher; elle peut prendre toutes les formes depuis le point A et la forme triangulaire jusqu'au quadrilatère; cela dépend de la forme de l'intrados. Si on diminue l'épaisseur de la voûte, l'aire des solutions stables se réduit comme l'indique les surfaces hachurées. Pour une certaine épaisseur, il ne reste plus qu'une solution stable. Elle produit sur l'intrados des pressions qui passent par un maximum R'; à l'intrados, la pression est aussi égale à R', au sommet et à l'extrémité.

420. Intrados et extrados du second genre. — L'aire des solutions stables est ABC'D' (fig. 185); si l'extrados était d'égale résistance, on obtiendrait l'aire ABCD; l'aire à retrancher DCC'D' est d'autant plus grande, que l'extrados diffère de la forme d'égale résistance.

Si on diminue les épaisseurs de la voûte, l'aire des solutions stables diminue comme l'indique les figures hachurées. Pour une certaine épaisseur, il ne reste qu'une courbe de pression stable. Elle produit sur l'extrados des pressions qui passent par un maximum R'; à l'intrados la pression atteint aussi la limite R', au sommet et à l'extrémité.

421. Intrados et extrados du troisième genre. — L'aire des solutions stables a la forme FEB'C'D (fig. 186); si l'intrados et l'extrados étaient d'égale résistance, cette aire serait ABCD; les angles C et A sont enlevés; les aires à retrancher dépendent de la forme de la partie supérieure de l'intrados et de la partie inférieure de l'extrados.

Si on diminue les épaisseurs de la voûte, l'aire des solutions stables diminue comme l'indique les figures hachurées. Pour une certaine épaisseur, il ne reste qu'une courbe de pression stable; elle produit sur l'extrados des pressions qui ont un maximum R'; elle produit à l'intrados des pressions qui ont un maximum R' et une plus grande valeur R' à l'extrémité. Le maximum à l'extrados pourrait être remplacé par une plus grande valeur.

422. Intrados et extrados du quatrième genre. — L'aire des solutions stables a la forme AB'CD'E' (fig. 187); elle serait BCDE si l'intrados et l'extrados étaient d'égale résistance. Les angles B et D sont enlevés et les parties à retrancher dépendent de la partie inférieure de l'intrados et de la partie supérieure de l'extrados.

Si on diminue les épaisseurs de la voûte, l'aire des solutions stables diminue comme l'indique les figures hachurées. Pour une certaine épaisseur, il ne reste qu'une solution stable; elle produit sur l'extrados des pressions qui passent par un maximum R'; elle produit sur l'intrados des pressions qui ont un maximum R' et une plus grande valeur à l'extrémité.

423. Parties faibles et fortes de l'extrados et de l'intrados. — La discussion qui précède prouve que l'intrados du premier genre est trop faible et qu'il y a avantage à le renforcer pour le rendre d'égale résistance; il en résulte aussi que l'intrados du second genre est trop fort et qu'on peut le diminuer sans réduire l'aire des solutions stables. Au contraire l'extrados du premier genre est trop fort, l'extrados du second genre est trop faible.

424. Enveloppe des courbes de pression limites. — Si l'extrémité de la poussée décrit la conjuguée des pressions limites à l'intrados, on obtient une courbe de pression variable qui enveloppe un intrados fictif; de même la conjuguée des pressions limites à l'extrados peut être considérée comme la conjuguée d'un extrados fictif. Chacune de ces courbes de pression touche son enveloppe en un point qu'il est facile de déterminer. Soit (fig. 180) la courbe xk; I l'intersection de cette courbe avec l'horizontale FF' des extrémités des sous-tangentes renversées (359); si le point X décrit un élément de l'enveloppe, on trouve dans le joint du point I un élément dont la sous-tangente est nulle; le centre de pression I reste donc fixe; le point I est l'intersection de la courbe xk avec sa voisine; c'est le point où cette courbe

touche son enveloppe. Ce raisonnement s'applique aussi à l'extrados (1).

CHAPITRE VI.

Théorie des voûtes.

Nous venons d'étudier les différentes courbes de pression compatibles, soit avec la stabilité statique, soit avec la stabilité élastique des voûtes; mais quelle est la courbe de pression qui se réalisera? Est-on certain, même quand l'aire des solutions stables a une grande étendue, que ce sera l'une de ces solutions qui se produira effectivement? L'équilibre statique ne suffit pas pour répondre à cette question ; il faut, comme dans tous les problèmes où il y a indétermination statique, trouver des conditions nouvelles en étudiant les déformations. Nous croyons que les théories des voûtes exposées jusqu'à ce jour manque d'exactitude; nous en ferons plus loin un examen critique; mais auparavant, nous exposerons la théorie que nous proposons.

§ 1. Hypothèses et formules.

495. Formules des déformations élémentaires.— Une voûte est un assemblage de matériaux différents : pierres, briques, mortier; quelles sont les déformations d'un massif élémentaire ABCD (pl. 7, fig. 188) sous l'action d'une force

(1) Si on remplace l'intrados et l'extrados de la voûte par l'intrados et l'extrados fictifs tangents aux courbes de pressions limites et si on suppose une résistance illimitée, les conjuguées enveloppes ne changent pas; l'aire des solutions stables n'est pas cependant la même, car il y a des courbes de pressions limites qui touchent leur enveloppe en des points imaginaires. L'intrados et l'extrados sont du premier ou du second genre selon que les courbes de pressions limites touchent supérieurement ou inférieurement leurs enveloppes.

donnée R ? Cette force se décompose en une force normale au joint N et une force tangentielle ; la force tangentielle a généralement peu d'importance et nous négligerons les déformations par glissement (1). La force normale N produit une compression et une flexion.

S'il s'agissait d'un solide homogène, on obtiendrait la compression aa' de l'élément ab de ligne centrale du massif par la formule :

$$\partial ds = -\frac{N}{E\omega} ds,$$

formule dans laquelle $ds = ab$, $ds + \partial ds = a'b$, ω = section AB ; E est le coefficient de raideur du solide.

La section AB, en se plaçant en A'B', tournerait d'un angle $d\psi$ qui serait donné par la formule :

$$d\psi = \frac{M}{EI} ds.$$

M est le moment fléchissant ou moment de la force N autour du point a ; I est le moment d'inertie de la section AB autour de l'axe de flexion.

Dans le cas qui nous occupe, la présence d'un mortier non complètement durci va modifier complètement la déformation ; il est évident que la compression moyenne sera considérablement augmentée ; nous admettrons la formule suivante :

$$\partial ds = -\frac{N}{E'\omega} ds. \qquad (1')$$

Le coefficient E' est le coefficient de raideur moyenne que l'on peut attribuer au massif, sans changer la compression des différentes parties de la voûte. Nous admettrons aussi,

---

(1) La déformation par glissement se calcule facilement ; elle donne lieu à un terme analogue au terme des déformations par compression ; c'est pour simplifier l'exposé que nous négligeons d'abord les glissements ; nous exposerons plus loin la théorie complète.

pour le calcul de la déformation angulaire, un nouveau coefficient de raideur E″ et nous écrirons la formule :

$$d\psi = \frac{M}{E''I}\, ds. \qquad (2)$$

Nous supposons que les coefficients E′ et E″ sont indépendants de N et de M; cette hypothèse est très probable surtout dans les limites de l'application. Si l'expérience démontrait le contraire, il faudrait remplacer ces formules par d'autres plus compliquées, mais les idées générales de la méthode que nous allons exposer seraient encore applicables.

426. Rapport des raideurs à la flexion et à la compression. — Nous reconnaîtrons plus loin que le rapport

$$n = \frac{E''}{E'} \qquad (3)$$

jouera le plus grand rôle dans la théorie des voûtes; c'est de ce rapport que dépend la production de telle ou telle courbe de pression. Ce rapport dépend du mode de construction, de l'épaisseur des joints de mortier, de la nature du mortier, de l'époque du décintrement. Pour déterminer ce rapport, la théorie est impuissante; il faut faire des essais sur un bloc de maçonnerie de même espèce que la voûte. Ces essais peuvent être faits de manière à déterminer l'époque où il faut décintrer pour que le rapport n ait une valeur convenable. Si on emploie du mortier de ciment, si ce ciment peut résister à des pressions suffisamment grandes même quand il durcit sans pression, on peut décintrer après le complet durcissement du mortier, on poura faire $n = 1$. Si, au contraire, le mortier ne résiste que quand il durcit sous pression, il faut décintrer avant le durcissement; la valeur de n sera d'autant plus grande que le mortier sera plus fluide et plus abondant.

427. Équations générales de la déformation. — Nous supposerons la voûte symétriquement construite par rapport à un plan vertical; on sait *a priori* que la poussée est normale au joint du sommet; la courbe de pression ne dé-

pend que de deux indéterminées : la poussée et le centre de poussée ; il faut donc trouver deux conditions de déformation.

Prenons pour axes coordonnés un axe horizontal quelconque ox (fig. 189) et un axe vertical oy dans le plan de symétrie ; soient : x, y les coordonnées d'un point quelconque de l'arc moyen AB de la voûte ; ds l'élément de cette courbe ; dx, dy les projections de cet élément ; φ_1 l'angle des éléments extrêmes A et B ; l la projection horizontale de la ligne AB.

Les déformations doivent satisfaire à deux conditions : une condition angulaire et une condition linéaire.

Condition angulaire. — L'élément A doit rester horizontal par raison de symétrie ; l'élément B ne peut changer de direction, si nous supposons en B un joint de naissance invariable ; donc après la déformation, l'angle φ_1 ne peut avoir changé de valeur et nous pouvons écrire :

$$\Delta\varphi_1 = 0.$$

Un élément MM′ tourne par rapport au suivant M′M″ d'un angle que nous avons désigné par $d\psi$ et qui est donné par l'équation (2) ; on a donc $\Delta\varphi_1 = \int d\psi$, et il vient :

$$\int d\psi = 0. \qquad (4)$$

Condition linéaire. — Le joint du sommet A doit rester dans le plan de symétrie après la déformation ; l'élément B est fixe. Traçons la droite OB et supposons le point 0 invariablement lié au joint A ; la projection horizontale de la droite OB doit rester constante ; soit l cette projection ; on doit avoir :

$$\Delta l = 0.$$

Calculons séparément la déformation $\Delta' l$ par compression et la déformation $\Delta'' l$ par flexion. La compression produit un allongement négatif δds, de l'élément ds ; en projection horizontale, on obtient un allongement δdx ; donc on a :

$$\Delta' l = \int \delta dx.$$

Calculons la déformation produite par la rotation $d\psi$ de l'élément MM′ par rapport à l'élément M′M″; nous supposons l'arc M′B fixe et invariable; l'arc AM′ reste aussi invariable de forme, mais subit la rotation $d\psi$ autour du point M′; cette rotation communique au point O un déplacement dont la projection horizontale est $y\,d\psi$. Partons de l'élément fixe B, produisons successivement toutes les rotations $d\psi$, comme nous venons de le faire, nous obtiendrons l'arc déformé; le déplacement du point O est donc :

$$\Delta'' l = \int y\,d\psi.$$

Or, on a : $$\Delta l = \Delta' l + \Delta'' l;$$

il vient donc : $$\int \delta\,dx + \int y\,d\psi = 0. \qquad (5)$$

498. Des différents systèmes d'équations. — Nous n'avons pas spécifié la position de l'axe des x; supposons que l'on abaisse l'axe des x d'une hauteur b; dans l'équation (5), il faut remplacer y par la nouvelle ordonnée $y' = y - b$; il vient :

$$\int \delta\,dx + \int y\,d\psi - b\int d\psi. \qquad (6)$$

On trouve une nouvelle équation, mais c'est une combinaison des équations (4) et (5). Non-seulement, on peut remplacer le système (4) (5) par (4) (6); mais on peut aussi le remplacer par (5) (6).

On peut considérer les équations (4) et (5) comme des équations d'équilibre; imaginons sur chaque élément ds une force horizontale $d\psi$ et un couple dont le moment soit δdx; exprimons l'équilibre de ces forces fictives; l'équation (4) est l'équation de translation; l'équation (5) est l'équation de moment. On comprend dès lors qu'en exprimant cet équilibre par un autre système d'équation (4) et (6) ou bien (5) et (6), on obtienne un système équivalent au système des équations (4) et (5).

429. Charnières ou joints de rupture. — Nous avons supposé que la courbe de pression restait à l'intérieur de la voûte; si elle touche l'intrados ou l'extrados, le joint peut s'ouvrir, le point de contact servant de charnière. On pourrait aussi réunir deux parties de voûtes par une rotule; pour y arriver, on laisserait un joint vide de mortiers; deux demi-cylindres creux en fonte seraient enchâssés dans les voussoirs adjacents et embrasseraient un cylindre plein également en fonte; ce cylindre servirait d'articulation. Lorsqu'il existe dans une voûte une ou plusieurs charnières, les équations (4) et (5) ne sont plus applicables; il faut les remplacer par les suivantes.

Soient ψ_0, ψ_1 les angles de rotation qui se produisent entre les parties de voûtes réunies par les charnières; soient b_0, b_1 les ordonnées de ces charnières. Il faut ajouter à l'intégrale de $d\psi$ les angles ψ_0, et ψ_1; il faut en outre introduire ces angles dans l'intégrale de $y\,d\psi$; les équations (4) et (5) deviennent :

$$\int d\psi + \Sigma\psi_0 = 0 \qquad (7)$$

$$\int \delta dx + \int dy\,\psi + \Sigma\psi_0 b_0 = 0 \qquad (8)$$

Ces équations peuvent encore être considérées comme des équations d'équilibre entre les forces horizontales $d\psi$, ψ_0 ψ_1 et les couples $\delta\,dx$. En la comparant aux équations (4) et (5), on voit qu'elles contiennent les nouvelles inconnues ψ_0 et ψ_1; mais à chaque charnière correspond une condition nouvelle : la courbe de pression doit passer par le centre de l'articulation, toucher l'intrados ou l'extrados; le problème est toujours déterminé.

Remarque. — Supposons qu'il existe une rotule unique et que l'on introduise des coins entre les voussoirs adjacents; la courbe de pression dépend des pressions exercées par ces coins, car en les manœuvrant on déplace à volonté le centre de pression dans la section qui passe par le centre de l'articulation. Prenons un axe des x passant par le centre de

la rotule et appliquons l'équation (8); on a $\Sigma\psi_0 b_0 = 0$; l'équation (8) devient identique à l'équation (3); nous pouvons donc énoncer cette proposition : *Toutes les lignes de pression en nombre infini qui satisfont à l'équation linéaire* (5) *sans satisfaire à la condition angulaire* (4) *pourraient être réalisées en établissant une rotule à la hauteur des* x, *et en déplaçant la courbe de pression par la manœuvre de coins introduits entre les voussoirs articulés.*

480. Transformation des équations. — Remplacons dans les équations (4) (5) (6) (7) et (8), δ et $d\psi$ par leurs valeurs tirées des équations (1) et (2); multiplions par E'' et tenons compte de l'équation (3); il vient :

$$\int \frac{M}{I}\, ds = 0, \qquad (4^{bis})$$

$$-n\int \frac{N}{\omega}\, dx + \int \frac{My}{I}\, ds = 0, \qquad (5^{bis})$$

$$-n\int \frac{N}{\omega}\, dx + \int \frac{M(y-b)}{I}\, ds = 0, \qquad (6^{bis})$$

$$\int \frac{M}{I}\, ds + \Sigma E''\psi_0 = 0, \qquad (7^{bis})$$

$$-n\int \frac{N}{\omega}\, ds + \int \frac{My}{I}\, ds + \Sigma E''\psi_0 b_0 = 0. \qquad (8^{bis})$$

Soient : q la poussée, c l'ordonnée du centre de poussée, P le poids qui sollicite un arc AM de la voûte, μ le moment de ce poids autour du point M. La force normale N et le moment fléchissant M au point M sont donnés par les formules :

$$N = q\,\frac{dx}{ds} + P\,\frac{dy}{ds}, \qquad (9)$$

$$M = -q(y-c) + \mu. \qquad (10)$$

Si nous introduisons ces valeurs dans les équations (4^{bis}) et (5^{bis}), on obtient :

$$qc\int\frac{ds}{I}-q\int\frac{yds}{I}+\int\frac{\mu ds}{I}=0, \qquad (11)$$

$$-nq\int\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\frac{ds}{\omega}-n\int P\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}ds+qc\int\frac{yds}{I}-q\int\frac{y^2ds}{I}$$
$$+\int\frac{\mu yds}{I}=0. \qquad (12)$$

Dans le cas où il y a des joints de rupture, on ajoute à l'équation (11) le terme $\Sigma E''\psi_0$, et à l'équation (12) le terme $\Sigma E''b\psi_0$; on trouve :

$$qc\int\frac{ds}{I}-q\int\frac{yds}{I}+\int\frac{\mu ds}{I}+\Sigma E''\psi_0=0, \qquad (13)$$

$$-nq\int\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\frac{ds}{\omega}-n\int P\frac{dx\,dy}{ds\,ds}ds+qc\int\frac{yds}{I}-q\int\frac{y^2ds}{I}$$
$$+\int\frac{\mu yds}{I}+\Sigma E''b_0\psi_0=0. \qquad (14)$$

§ 2. Courbes de pression qui correspondent aux mortiers de toute nature.

A. Propriétés des courbes qui n'admettent pas de joint de rupture.

431. Hyperboles des poussées possibles. — *Si, en faisant par la pensée varier la nature du mortier, on fait passer* n *par tous les états de grandeur, l'extrémité de la poussée décrit une hyperbole.*

Nous supposons qu'il n'y ait pas de joint de rupture ; au point de vue théorique, la courbe de pression peut cependant sortir de la voûte, il suffit d'attribuer à la maçonnerie une résistance à l'extension telle, que les formules (1) et (2)

soient applicables même quand le centre sort de l'étendue du joint. Examinons les équations (11) et (12); la première est indépendante de la nature du mortier. Ces équations déterminent la courbe de pression; mais si nous supposons que n affecte toutes les grandeurs possibles, nous obtiendrons une infinité de courbes de pression; toutes ces courbes sont celles qui satisfont à l'équation (11); à chacune d'elles correspond une valeur de n que l'on obtiendrait par l'équation (12). Représentons géométriquement les poussées pour toutes ces solutions; prenons pour axes coordonnés l'axe oy et l'axe oq pris en sens contraire de l'axe ox; les coordonnées de l'extrémité d'une poussée possible sont q et c; l'équation (11) est l'équation du lieu des extrémités de ces poussées; on reconnaît immédiatement que c'est l'équation d'une hyperbole : c'est l'*hyperbole des poussées possibles*. Avant de chercher les éléments de cette hyperbole, nous allons simplifier son équation, au moyen des éléments que nous allons définir.

432. Horizontale moyenne d'une voûte. — Déterminons l'ordonnée y_1 par l'équation :

$$y_1 \int \frac{ds}{I} = \int \frac{y\,ds}{I} \qquad (15)$$

L'ordonnée y_1 détermine une ligne horizontale; c'est cette horizontale que nous appelons horizontale moyenne.

Supposons que l'arc moyen de la voûte soit un arc pesant, et que le poids spécifique soit inversement proportionnel au moments d'inertie I; on reconnaît facilement que l'ordonnée du centre de gravité de cet arc est précisément l'ordonnée y_1 définie par l'équation (15).

433. Moment moyen. — Déterminons le moment μ_1 par l'équation :

$$\mu_1 \int \frac{\overrightarrow{ds}}{I} = \int \frac{\mu\,ds}{I}\,. \qquad (16)$$

Nous désignerons le moment μ_1 sous le nom de moment moyen.

484. Equation simplifiée de l'hyperbole des poussées possibles. — Remplaçons dans l'équation (11) les intégrales

$$\int \frac{y\,ds}{I} \quad \text{et} \quad \int \frac{\mu\,ds}{I}$$

par leurs valeurs tirées des équations (15) et (16); l'équation (11) devient :

$$q\,(y_1 - c) = \mu_1 \qquad (17)$$

Il résulte de là que l'*hyperbole des poussées possibles a pour asymptote l'horizontale moyenne et le joint du sommet.*

485. Axe de pivotement des lignes de pressions possibles. — *Si, dans une voûte, on fait par la pensée varier la nature du mortier, la ligne des pressions se déplace; toutes ses tangentes et toutes ses cordes pivotent autour de points fixes situés sur l'horizontale moyenne* (1).

Soit D (fig. 189) le point de l'arc moyen autour duquel on a $\mu = \mu_1$; projetons ce point D sur l'horizontale moyenne; prenons cette projection E comme centre des moments; le moment des forces qui sollicitent l'arc AD est :

$$-q\,(y - c) + \mu_1.$$

L'équation (15) exprime que le moment est nul; donc la pression sur la section D doit passer par le point fixe E. Mais il est facile de démontrer que toutes les tangentes et cordes correspondantes (134) pivotent aussi autour de points fixes. Considérons d'abord deux lignes de pression possibles; nous avons rappelé (341) que les cordes et tangentes correspondantes se coupent sur une horizontale; mais les pressions sur la section D se coupent au point E sur l'horizontale moyenne; donc toutes les autres tangentes et cordes correspondantes se coupent aussi sur l'horizontale moyenne.

---

(1) Nous aurions pu déduire ce théorème du numéro 357; nous avons préféré en donner une démonstration directe.

Démontrons ensuite que si l'on passe d'une ligne de pression possible à une autre, les pivots ne changent pas quelles que soient ces lignes. Soit en effet R une tangente ou une corde de la première ligne de pression; son pivot est à l'intersection de R et de l'horizontale moyenne; ce point est complètement déterminé, quelle que soit la courbe de pression à laquelle on veuille passer.

COROLLAIRES. — 1. *Si on rapporte toutes les lignes de pression possibles à l'horizontale moyenne, toutes ces lignes se déduisent les unes des autres en faisant varier les ordonnées dans un rapport constant* (55).

2. *Toutes les lignes de pression possibles passent par un point fixe situé sur l'horizontale moyenne; ce point est le pivot des lignes de pression.* En effet, l'horizontale moyenne coupe une ligne de pression possible en un point; menons la tangente en ce point; le pivot de cette tangente est son point de contact, donc ce point de contact reste immobile.

3. *Toutes les courbes des centres de pression possibles passent par un point fixe situé sur l'horizontale moyenne; ce point est le pivot des courbes de pression.* En effet, l'horizontale moyenne coupe une courbe de pression possible en un point; la pression sur la section correspondante pivotera autour de ce point; c'est donc un centre de pression fixe.

136. Vérifications analytiques. — On peut vérifier toutes ces propositions analytiquement sans utiliser la propriété des intégrales. L'équation d'une tangente à la ligne des pressions peut se mettre sous la forme :

$$-q(y-c)+\mathrm{P}(x-d)=0. \qquad (18)$$

Dans cette équation, x et y sont les coordonnées d'un point quelconque de la tangente; cette tangente est la ligne d'action de la pression sur une section transversale de la voûte, P est le poids qui agit entre cette section et le sommet, d est l'abscisse du centre de gravité du poids P; on obtient l'équation qui précède en exprimant qu'autour d'un point (x, y) de la ligne d'action de la pression considérée, le

moment des composantes P et q de cette pression est égal à zéro. L'intersection de cette ligne avec l'horizontale moyenne y_1 est donnée par l'équation.

$$-q(y_1 - c) + P(x_1 - d) = 0.$$

ou à cause de l'équation (15),

$$-\mu_1 + P(x_1 - d) = 0,$$

d'où

$$x_1 = d + \frac{\mu_1}{P}. \qquad (19)$$

Cette abscisse est indépendante des variables c et q; donc la tangente pivote autour de ce point.

Les cordes correspondantes possèdent la même propriété, car une corde est la ligne d'action de la résultante de la poussée et de certaines forces que l'on obtient par une concentration aux extrémités de la corde ; la même démonstration est applicable.

Considérons x et y comme les coordonnées d'un point quelconque de la ligne des pressions; on peut dans l'équation (18) remplacer $P(x - d)$ par μ' ; μ' est le moment du poids P par rapport à la verticale du centre de gravité du joint qui correspond au poids P; il vient :

$$-q(y - c) + \mu' = 0.$$

Éliminons c au moyen de l'équation (15), on trouve :

$$y - y_1 = \frac{\mu' - \mu_1}{q}.$$

La différence $y - y_1$ est l'ordonnée d'un point de la ligne de pression par rapport à l'horizontale moyenne; si on fait varier la poussée de q à q', toutes ces ordonnées varient dans le rapport $q' : q$; cela démontre le corollaire 1 du numéro précédent.

487. Excentricité verticale moyenne. — Appelons c', la distance verticale d'un point M de l'arc moyen, à la pression sur la section qui passe par ce point ;

$$c' = MN,$$

Transportons cette pression au point N, décomposons-la en ses composantes q et P; le moment fléchissant M autour du point M est donné par la formule suivante :

$$M = qc'.$$

L'équation (4^{bis}) devient :

$$\int \frac{c'ds}{I} = 0. \qquad (20)$$

Traçons une ligne de pression quelconque; l'équation (20) ne sera généralement pas satisfaite : cette ligne de pression est impossible. Déterminons la hauteur c_1 dont il faut la relever pour qu'elle devienne possible; dans l'équation (20) on doit remplacer c' par $c' - c_1$; il vient :

$$\int \frac{c' - c^1}{I} ds = 0$$

ou

$$c_1 \int \frac{ds}{I} - \int \frac{c'ds}{I}. \qquad (21)$$

Nous appelons *excentricité verticale moyenne* la hauteur déterminée par l'équation (21). Nous pouvons alors énoncer les deux propositions suivantes :

Une ligne de pressions est possible pour une certaine nature de mortier quand l'excentricité verticale moyenne est égale à zéro. Une ligne de pressions quelconque devient possible si on l'élève d'une hauteur égale à l'excentricité verticale moyenne.

B. Tracés graphiques dans le cas d'une voûte d'épaisseur constante.

438. Ordonnée moyenne. — Dans le cas d'une voûte d'épaisseur constante, le moment d'inertie I est constant, l'équation (15) devient :

$$y_1 = \frac{\int y ds}{s} \qquad (15^{bis})$$

Cette formule montre que l'ordonnée moyenne y_1 est l'ordonnée du centre de gravité de l'arc supposé homogène. Si la ligne moyenne a la forme d'un arc de cercle, on obtient ce centre de gravité par une construction. Si cette ligne moyenne est une courbe analytique, on peut assez souvent trouver une formule exacte qui donne l'ordonnée du centre de gravité. Dans tous les cas, on peut trouver y_1 pour une intégration graphique. Il suffit de porter les ds sur un axe d'abscisse, y en ordonnée; on obtient $\int y ds$ par une intégration graphique approchée; y_1 s'obtient par l'inclinaison de la corde.

Soient (fig. 191) ABC la courbe des y; A'B'C' l'intégrale; Py_1 le rayon du diagramme parallèle à la corde A'C'; on a :

$$y_1 = \overline{oy_1}$$

139. Moment moyen.—Traçons une ligne de pressions quelconque A'B' (fig. 190). Cette ligne de résultantes est aussi un lieu des moments statiques (134); elle nous permettra de trouver la valeur de μ. Cherchons le moment μ autour d'un point M de l'arc; menons une verticale par ce point; soit z le segment de cette verticale compris entre la poussée prolongée et la direction de la résultante qui sollicite la section M; le moment μ est représenté par z; comme la base d'intégration est q (6,3°), on a en réalité :

$$\mu = qz.$$

On vérifie aisément cette proposition en prenant comme centre de moment l'extrémité de l'ordonnée z sur la pression considérée, et en exprimant que le moment $-qz + \mu$ de cette pression est nulle. On détermine μ_1 de la même manière que y_1. L'équation (16) devient :

$$\mu_1 = \frac{\int \mu ds}{s}. \qquad (16^{bis})$$

On porte fig. 191, μ en ordonnée au lieu de y; on obtient la courbe DEF, l'intégrale D'E'F'; on mène P'z_1 parallèlement

à la corde D'F'; $\overline{O'Z_1}$ représente le moment moyen μ; plus exactement :

Si $z_1 = \overline{O'Z_1}$, $\mu_1 = qz_1$.

440. Excentricité verticale moyenne d'une ligne de pression. — L'équation (21) devient :

$$c_1 = \frac{\int c' ds}{s}. \qquad (21^{bis})$$

Portons (fig. 192) les hauteurs c' en ordonnée, nous obtenons une courbe GK; l'intégrale de cette courbe est G'K'; menons Pc_1 parallèlement à la corde G'K'; on a :

$$c_1 = \overline{OC_1}.$$

REMARQUE. — Dans les trois tracés qui précèdent, il n'est pas nécessaire de tracer les courbes des y, des μ et des c' il suffit de projeter ces éléments sur les axes des diagrammes des inclinaisons, pour pouvoir effectuer l'intégration graphique; pour l'intégrale des c' on peut opérer par une ligne des pôles (46); ce procédé est indiqué sur la figure 191. Si les ordonnées ne sont pas très rapprochées, il est utile de tracer les courbes pour en déduire à vue les ordonnées ou les abscisses moyennes; quand les ordonnées sont suffisamment rapprochées, on assimile les côtés des lignes primitives à des droites, on obtient les ordonnées moyennes et les abscisses moyennes sans tracer ces lignes primitives (1).

441. Détermination d'une ligne de pressions possible. — *Première méthode.* — Au moyen de la courbe des moments μ, on détermine la valeur de s qui correspond au moment moyen μ_1; on porte cette valeur de s sur l'arc moyen; on obtient le point D (fig. 189) puis le point E. On relève la ligne de pression déjà tracée jusqu'à ce que la pression sur la

(1) On peut aussi déterminer les ordonnées moyennes sur l'axe du diagramme, même quand on assimile les arcs de la ligne primitive à des arcs paraboliques; on trouve aisément les constructions qu'il faut employer.

section D passe par le point E. On peut aussi tracer pour une poussée choisie arbitrairement une ligne de pression telle que la pression sur la section D passe par le point E. Cette méthode est celle qui résulte le plus naturellement de la démonstration du numéro 435; mais les deux suivantes sont beaucoup plus simples.

Deuxième méthode. — On détermine z_1 et y_1 (fig. 190 et 191); en remplaçant, dans l'équation (17), μ_1 par qz_1, on obtient :

$$q(y_1 - c) = qz_1$$

d'où

$$c = y_1 - z_1.$$

Cette équation détermine le centre de poussée qui correspond à la poussée q que l'on a choisie. La ligne de pression tracée ne satisfait généralement pas à cette équation; dans la figure 190, la ligne A'B' se trouve même complètement en dehors de la voûte; mais il suffira de déplacer le centre de poussée pour satisfaire à la condition angulaire; cela revient à relever ou à abaisser la ligne de pression d'une certaine quantité. L'équation qui donne c peut s'écrire $y_1 = z_1 + c$; or, $z_1 + c$ est l'ordonnée du point z_1; la ligne de pression serait donc possible si le point z_1 se trouvait sur l'horizontale moyenne; il résulte de là qu'il faut relever la ligne de pression de la même quantité que si on voulait amener le point z_1 sur l'horizontale moyenne.

Nous n'avons pas représenté dans la figure 190 la ligne de pression relevée; mais nous avons déterminé le pivot d'une corde. Considérons, par exemple, la corde A'B'; projetons le point z_1 de la figure 191 sur cette corde A'B' en D; après le relèvement, ce point D viendra en D'; donc la corde qui correspond à A'B' dans les lignes des pressions possibles, pivote autour du point D'.

Troisième méthode. — Déterminons l'excentricité verticale moyenne de la ligne des pressions tracée arbitrairement; cette excentricité $c_1 = \overline{oc_1}$ est précisément (440) la hauteur dont il faut relever la ligne des pressions pour qu'elle devienne possible. Nous obtiendrons le pivot D' des

cordes des lignes possibles qui correspondent à une corde A'B' par la condition

$$DD' = \overline{oc_1}.$$

442. Hyperbole des poussées possibles. — Les courbes de pression possibles passent par un point fixe ; la courbe des poussées possibles pourra donc s'obtenir par les trois méthodes exposées au numéro 365 ; nous allons voir qu'il n'est pas nécessaire pour cela de déterminer le centre de pression fixe.

Tracé par les cordes. — Nous venons de montrer comment on détermine le pivot D' des cordes qui correspondent à une corde A'B'. Soit QS = q la poussée qui nous a servi à tracer la ligne de pression A'B' ; menons QT parallèlement à A'B'. Si la poussée varie de SQ à SQ' la direction des cordes qui correspondent à la courbe A'B' varie de TQ à TQ'. De là résulte la construction suivante :

Menons par les sommets T et D' deux faisceaux de droites parallèles deux à deux ; les droites qui émergent du point T détermine la poussée sur l'axe SQ, celles qui émergent du point D' déterminent les centres de poussée.

Tracé par les tangentes. — On considère une pression quelconque R résultante de la poussée q et d'un poids P ; on trouve le pivot de cette pression comme nous avons trouvé celui de la corde A'B' ; on fait pivoter la pression R et sa parallèle du diagramme des pressions ; la seule différence qu'il y ait avec la construction précédente, c'est que le faisceau des tangentes ne détermine plus les centres de poussées, mais détermine la hauteur de ces centres sur la ligne d'action de la force P.

Tracé par division. — En relevant la ligne de pression A'B' de la hauteur c, on obtient un point de l'hyperbole ; on connaît ses asymptotes ; on trace facilement cette hyperbole en la considérant comme le résultat de la division d'une droite, q = constante, par ses abscisses.

c. **Tracés graphiques dans le cas d'une épaisseur variable.**

443. Introduction d'un arc auxiliaire. — Soit e l'épaisseur de la voûte en un point quelconque ; le moment d'inertie de la section transversale est donné par la formule :

$$I = \frac{e^3}{12}.$$

Ce moment d'inertie varie, mais nous serons ramené au cas précédent en introduisant un arc auxiliaire s' que nous déterminerons par l'équation :

$$\frac{ds'}{I_0} = \frac{ds}{I} \quad \text{ou} \quad s' = I_0 \int \frac{ds}{I} \tag{22}$$

I_0 est une constante.

Les équations (15) et (16) deviennent en introduisant la variable s' :

$$s'y_1 = \int y'\, ds'$$

$$s'\mu_1 = \int \mu\, ds'$$

Comparons ces équations aux équations (15^{bis}) et (16^{bis}) applicables à une voûte d'épaisseur uniforme ; il n'y a qu'une seule différence ; s est remplacé par s'. On peut donc appliquer toutes les constructions du littera précédent pourvu que l'on porte s' en abscisse au lieu de porter s.

Il faut pour cela déterminer les différentes valeurs de l'arc s'. Portons (fig. 193) l'arc s en abscisse sur l'arc os ; portons les épaisseurs de la voûte sur l'axe $o'e$; soit :

$$o'a' = e.$$

Soit P un pôle quelconque ; menons le polygone rectangulaire $a\,P\,a'a''a'''$, on a, à une échelle qui dépend de la base $Po' = \lambda$,

$$o'a''' = \frac{1}{e^3} \quad \text{ou} \quad o'a''' = \frac{1}{I}.$$

En opérant de même pour différentes épaisseurs, on obtient a courbe AB dont les ordonnées représentent les valeur

de 1 : I; l'intégrale de AB est A'B'; ses ordonnées sont proportionnelles à $\int \frac{ds}{I}$, donc elles représentent les valeurs de s' (1).

D. Joints de rupture.

444. Partie utile de l'hyperbole des poussées possibles. — Lorsque le mortier ne résiste pas à l'extension, toute courbe de pression qui coupe l'intrados ou l'extrados doit être rejetée comme impossible. De là résulte cette proposition : *la partie utile de l'hyperbole des poussées possibles est l'arc situé à l'intérieur de l'aire des solutions stables au point de vue statique.*

Différents cas peuvent se présenter. L'hyperbole peut ne pas couper l'aire des solutions stables; il n'y a pas alors de solution possible sans joint de rupture. L'hyperbole peut couper l'aire des solutions stables de diverses manières; nous avons représenté fig. 194 à fig. 196 la plupart des dispositions qui peuvent se réaliser.

445. Comment la courbe des poussées possibles se complète. — Si l'extrémité de la poussée décrit l'arc utile $\alpha\beta$ (fig. 190), le coefficient n varie entre certaines limites n_0 et n_1; ces valeurs de n sont déterminées par l'équation (12); nous verrons plus loin comment on les obtient graphiquement; on trouve dans le cas qui nous occupe $n_0 = -4$, $n_1 = +4$. Qu'arrive-t-il lorsque le coefficient n prend des valeurs non comprises entre ces limites?

Nous venons de voir que les solutions sans joint de rupture doivent être rejetées; il faut en conclure que les seules solutions possibles sont celles qui admettent un ou deux joints

---

(1) La valeur I_0 dépend de la base $o'P$ et de la base d'intégration; soit λ ces deux bases : on trouve :

$$s' = \lambda^3 \int \frac{ds}{\sigma^3} \quad \text{et} \quad I_0 = \frac{\lambda^3}{12}.$$

de rupture. Mais pour qu'il y ait joint de rupture, il faut que la courbe de pression atteigne l'extrados ou l'intrados ou passe par leurs extrémités; or ce sont précisément ces courbes de pression qui correspondent aux limites des poussées stables; on voit donc que l'arc utile de l'hyperbole des poussées possibles sans joint de rupture se complète par certaines parties du contour de l'aire des solutions stables. Il nous reste à déterminer quelles sont ces parties.

446. Charnière à l'extrados. — Appliquons l'équation (7bis) ou l'équation (13). Nous avons dans ces équations désigné par ψ_0, l'angle d'ouverture d'un joint de rupture; cet angle a été considéré comme positif pour une rotation qui tend à augmenter la courbure de l'arc, et négatif pour une rotation de sens contraire. Si la charnière est à l'extrados, la rotation diminue la courbure de l'arc; soit donc A l'angle d'ouverture du joint, il faut remplacer dans les équations (7bis) et (13 $\Sigma\psi_0$ par $-$ A; on obtient :

$$\int \frac{M\,ds}{I} = E''A,$$

$$qc\int \frac{ds}{I} - q\int \frac{y\,ds}{I} + \int \frac{\mu\,ds}{I} = E''A.$$

Transformons ces égalités de la même manière que nous avons transformé les équations (11) et (4bis); introduisons la quantité c_1 (440) dans l'équation (7bis) et les quantités y_1 et μ_1 (438,439) dans l'équation 13; on obtient :

$$qc_1\int \frac{ds}{I} = E''A. \qquad (23)$$

$$[-q\,(y_1 - c) + \mu_1]\int \frac{ds}{I} = E''A. \qquad (24)$$

Soit q' la poussée que l'on obtiendrait au même centre de poussée si le mortier résistant à l'extension; cette poussée doit satisfaire à l'équation (17) :

$$-q'\,(y_1 - c) + \mu_1 = 0.$$

En éliminant μ_1 de l'équation 24 au moyen de la précédente, on trouve :

$$(q' - q)(y_1 - c) \int \frac{ds}{I} = E''A. \qquad (24^{bis})$$

De l'équation (24^{bis}) il résulte :

$$q < q',$$

donc : *la poussée qui admet une charnière à l'extrados doit être plus petite que la poussée possible sans joint de rupture appliquée au même point.*

De l'équation (23) on déduit aussi :

$$c_1 > 0,$$

donc : *l'excentricité verticale moyenne d'une ligne de pression qui admet une charnière à l'extrados doit être positive.*

La longueur c_1 représente la hauteur dont il faudrait relever la ligne de pression pour qu'elle devienne possible sans joint de rupture; or les lignes possibles sans joint de rupture pivotent autour d'un point fixe ; donc les lignes qui admettent une charnière à l'extrados passent sous ce point fixe d'une quantité c_1 proportionnelle à l'angle A d'ouverture du joint de rupture.

447. Charnière à l'intrados.— Lorsque la charnière est à l'intrados, l'angle d'ouverture B du joint de rupture doit être affecté du signe plus ; on doit remplacer dans les équations (7^{bis}) et (13) $\Sigma\psi_0$ par + B ; cela revient à remplacer dans les équations (23), (24) et (24^{bis}), — A par + B ; on trouve :

$$qc_1 \int \frac{ds}{I} = - E''B \qquad (25)$$

$$[-q(y_1 - c) + \mu_1] \int \frac{ds}{I} = - E''B \qquad (26)$$

$$(q' - q)(y_1 - c) \int \frac{ds}{I} = - E'''B. \qquad (26^{bis})$$

De l'équation $(26)^{bis}$, on déduit :

$$q > q'$$

donc : *la poussée qui admet une charnière à l'intrados doit être plus grande que la poussée possible sans joint de rupture, appliquée au même point.*

De l'équation (25), on tire :

$$c_1 < o.$$

Donc : *l'excentricité verticale moyenne d'une ligne de pression qui admet une charnière à l'intrados, doit être négative.*

La quantité c_1 représente la hauteur dont il faudrait relever la ligne de pression pour qu'elle devienne possible sans joint de rupture ; cette quantité est négative ; donc le relèvement devient un abaissement. Or les lignes de pression possibles sans joint de rupture pivotent autour d'un point fixe ; donc les lignes qui admettent une charnière à l'intrados passent au-dessus de ce point fixe d'une quantité $-c_1$ proportionnelle à l'angle d'ouverture B du joint de rupture.

448. Charnières à l'intrados et à l'extrados. — Les courbes de pression qui atteignent l'extrados et l'intrados peuvent être déterminées *a priori* sans utiliser les conditions de la déformation ; nous savons, en effet, que deux conditions suffisent pour déterminer une courbe de pression. Les équations de la déformation serviront à trouver les angles d'ouverture des deux joints de rupture.

Si l'aire des solutions stables est déterminée, on peut trouver immédiatement les deux courbes de pression qui touchent à la fois l'intrados et l'extrados. Pour qu'une seule courbe de pression atteigne l'extrados, il faut que l'extrémité de la poussée se trouve sur une partie bien connue du contour limite des solutions stables ; c'est le contour formé par la conjuguée de l'extrados et les deux enveloppées extrêmes. De même pour qu'une courbe de pression atteigne l'intrados, il faut que l'extrémité de la poussée se trouve sur l'autre partie du contour limite des solutions stables. Donc

pour qu'une courbe de pression admette à la fois une charnière à l'extrados et une charnière à l'intrados, *il faut que l'extrémité de la poussée se trouve sur l'un ou l'autre des sommets de l'aire des solutions stables situés aux extrémités des courbes des poussées maxima et minima.*

449. Conclusions. — Les propositions qui précèdent permettent de déterminer toutes les solutions possibles; nous allons examiner tous les cas :

1° (fig. 194). Les poussées stables sont toutes plus petites que les poussées possibles sans joint de rupture. Les seules solutions possibles sont celles qui admettent un joint de rupture à l'extrados; elles sont possibles parce que la condition $q < q'$ est satisfaite (446); la charnière unique à l'intrados n'est pas possible, parce que l'on a $q < q'$ et non $q > q'$ (447). On obtient pour la courbe dci.

2° (fig. 195). Les poussées stables sont toutes plus grandes que les poussées possibles sans joint de rupture. En raisonnant comme précédemment, on trouve que les solutions possibles sont celles qui admettent un joint de rupture à l'intrados. On obtient donc la courbe dfc.

3° (fig. 196). L'hyperbole des poussées possibles sans joint de rupture coupe l'aire des solutions stables. L'arc intérieur ab est la partie utile de cette hyperbole. Soient d c, les sommets de l'aire des solutions stables situés aux extrémités des courbes des poussées maxima et minima; les points d et c donnent toujours deux solutions possibles, car à ces points correspondent soit une charnière à l'extrados, soit une charnière à l'intrados et l'une des conditions (446, 447) $q < q'$ et $q > q'$ est toujours satisfaite. On complétera donc l'arc ab, en suivant le contour limite de b vers c, et de a vers d.

§ 3. Courbes de pression qui satisfont à la condition linéaire.

A. Propriétés.

450. Hyperbole spéciale à une valeur de n. — Lorsque l'on donne la valeur de n, les deux inconnues du problème q et c sont déterminées par les deux équations (11) et (12). L'équation (11) représente une hyperbole qui convient à toutes les valeurs de n, et que nous appellerons *hyperbole principale*. L'équation (12) représente une autre hyperbole qui dépend du coefficient n et que nous appellerons *hyperbole spéciale*. L'intersection de ces deux hyperboles est l'extrémité de la poussée unique qui doit se produire. Il est très utile de tracer l'hyperbole principale quand on veut obtenir les solutions qui se produisent pour différentes natures de mortier, il est moins utile de construire l'hyperbole spéciale à une valeur de n puisqu'une seule de ses ordonnées est utile à connaître. Néanmoins, la considération de cette hyperbole nous permet de deviner que toutes les courbes de pression qui satisfont à la condition linéaire (12) possèdent les mêmes propriétés que les courbes de pression qui satisfont à la condition angulaire (11). Pour démontrer ces propriétés, nous raisonnerons sur l'équation (12) comme nous avons raisonné sur l'équation (11). Nous commencerons par transformer cette équation (12) en introduisant des élément faciles à déterminer par l'intégration graphique.

451. Axe d'oscillation. — Déterminons y_1 par l'équation :

$$y_1 \int \frac{y\,ds}{I} = \int \frac{y^2 ds}{I} \qquad (27)$$

Pour interpréter cette équation, attribuons, comme nous l'avons fait précédemment, un poids spécifique 1 : I à l'arc de la fibre moyenne ; considérons cet arc pesant et invariable comme un pendule composé dont l'axe de suspension soit ox ;

on démontre aisément que la longueur du pendule simple synchrone est précisément y_2 ; la droite $y = y_2$ est donc l'axe d'oscillation.

452. Moment moyen d'oscillation. — Déterminons μ_2 par l'équation :

$$\mu_2 \int \frac{y\,ds}{I} = \int \frac{\mu y\,ds}{I}. \tag{28}$$

Pour interpréter cette équation, considérons μ comme une force variable qui sollicite l'unité de poids de l'arc pesant que nous avons imaginé dans le numéro précédent ; μ_2 est la force constante que l'on pourrait substituer à la force variable sans changer le moment de ces forces par rapport à l'axe ox. Pour distinguer le moment μ_2 du moment μ_1, nous désignerons le premier sous le nom de moment moyen d'oscillation.

453. Inclinaison moyenne. — Déterminons α et β par les équations ;

$$\alpha^2 \int \frac{ds}{\omega} = \int \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \frac{ds}{\omega}, \tag{29}$$

$$\beta^2 \int \frac{ds}{\omega} = \int \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \frac{ds}{\omega}. \tag{30}$$

En ajoutant ces deux équations, on obtient :

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1. \tag{31}$$

On peut donc considérer α et β comme les cosinus de direction d'une droite ; c'est l'inclinaison de cette droite que nous appellerons inclinaison moyenne. On peut la définir en disant que c'est l'inclinaison constante qu'il faudrait donner aux éléments de l'arc pour que les intégrales

$$\int \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \frac{ds}{\omega} \quad \text{et} \quad \int \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \frac{ds}{\omega}$$

ne changent pas.

454. Poussée moyenne.— Occupons-nous de l'expression suivante contenue dans l'équation 12 :

$$\int P \frac{dy}{ds} \frac{dx}{ds} \frac{ds}{\omega}.$$

Déterminons la poussée de telle manière que la pression sur une section de l'arc soit normale à cette section ; on trouve pour chaque point de l'arc une poussée q' qui satisfait à la relation :

$$P = q' \frac{dy}{dx}.$$

On a alors :

$$\int P \frac{dy}{ds} \frac{dx}{ds} \frac{ds}{\omega} = \int q' \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \frac{ds}{\omega}.$$

Nous sommes ainsi conduits à poser :

$$q_1 \int \left(\frac{dy}{as}\right)^2 \frac{ds}{\omega} = \int q' \left(\frac{dy}{ds}\right) \frac{ds}{\omega} \qquad (32)$$

équation que l'on peut aussi mettre sous la forme :

$$q_1 \beta^2 \int \frac{ds}{\omega} = \int P \frac{dy}{as} \frac{dx}{as} \frac{ds}{\omega} \qquad (33$$

D'après l'équation (32), on voit que q_1 est la poussée constante que l'on peut substituer à la variable q' pour que l'intégrale du second nombre de cette équation (32) ne change pas; pour simplifier le langage, nous désignerons cette poussée sous le nom de poussée moyenne.

455. Rayon moyen de gyration. — Déterminons r par l'équation :

$$r^2 \int \frac{ds}{I} = \int \frac{ds}{\omega}. \qquad (34)$$

Si la section de l'arc était uniforme, on aurait :

$$r^2 = \frac{I}{\omega}$$

r serait le rayon de gyration. Dans le cas d'une épaisseur variable, r représente une certaine valeur moyenne que nous appellerons rayon moyen de gyration.

456. Hauteur η. — Nous désignerons par ces mots la hauteur déterminée par l'équation

$$\eta = \frac{nr^2}{y_1} \tag{35}$$

457. Équation simplifiée de l'hyperbole spéciale. — Remplaçons dans l'équation (12) les intégrales par leurs valeurs tirées des équations (27), (28), (29), (33); on obtient :

$$-n(q\alpha^2 + q_1\beta^2)\int\frac{ds}{\omega} + (qc - qy_2 + \mu_2)\int\frac{yds}{I} = 0.$$

Remplaçons les deux intégrales qui subsistent encore par leurs valeurs tirées des équations (34) et (35); supprimons l'intégrale qui est facteur commun; il vient ;

$$-nr^2(q\alpha^2 + q_1\beta^2) + y_1(qc - qy_2 + \mu_2) = 0.$$

Divisons par y et introduisons la hauteur η; on trouve

$$\left.\begin{aligned} &-\eta(q\alpha^2 + q_1\beta^2) - q(y^2 - c) + \mu_2 = 0 \\ \text{ou}\quad &q(y_2 - c + \alpha^2\eta) = \mu_2 - q_1\beta^2\eta. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Prenons comme axe des poussées, la droite :

$$y = y_2 + \alpha^2\eta. \tag{37}$$

Changeons le sens de l'axe des y, l'ordonnée du centre de poussée est $d = y_2 - c + \alpha^2\eta$; l'équation (36) devient :

$$qd = \mu_2 - q_1\beta^2\eta.$$

Les deux coordonnées d'un point de l'hyperbole spéciale sont q et d par rapport à ces nouveaux axes; il résulte de là que *cette hyperbole a pour asymptote le joint du sommet et la droite représentée par* $y = y_2 + \alpha^2\eta$.

458. Axe de pivotement des lignes de pressions qui satisfont à la condition linéaire. — *Si l'on déplace le centre de poussée, les tangentes et les cordes des lignes de pressions qui satisfont à la condition linéaire pivotent autour de points fixes situés sur l'horizontale* $y = y_2 + \alpha^2\eta$.

Soit (fig. 189) D' le point de l'arc moyen autour duquel on a :

$$\mu = \mu_2 - q_1\beta^2\eta.$$

Projetons ce point D sur l'horizontale $y = y_2 + \alpha^2\eta$; prenons cette projection E' comme centre des moments; le moment des forces qui sollicitent l'arc AD' est :

$$-q(y_2 + \alpha^2\eta - c) + \mu_2 - q_1\beta^2\eta.$$

L'équation (36) exprime que ce moment est nul; donc elle exprime que la pression sur la section D' doit passer par le point fixe E'. On déduit de là en raisonnant comme au numéro 435 que toutes les cordes et tangentes pivotent autour de points fixes situés sur l'horizontale du point E'; cette horizontale est *l'axe de pivotement*.

Les corollaires suivants se démontrent comme au numéro 435.

COROLLAIRES. — 1° Si on rapporte toutes les lignes de pressions qui satisfont à la condition linéaire, à l'axe de pivotement, ces lignes se déduisent les unes des autres en faisant varier les ordonnées dans un rapport constant.

2° Toutes ces lignes de pressions passent par un point fixe situé sur l'axe de pivotement.

3° Toutes les courbes des centres de pression correspondant à ces lignes de pressions passent aussi par un point fixe situé sur l'axe de pivotement.

459. Excentricité moyenne d'oscillation. — Reprenons l'équation (5^{bis}) ; remplaçons le moment fléchissant M par sa valeur qc' (437) ; on obtient :

$$-n\int\frac{N}{\omega}dx + q\int\frac{c'y\,ds}{I} = 0.$$

Nous pouvons remplacer le premier terme par la valeur qu'il a prise dans l'équation (11) ; transformons ensuite ce premier terme comme nous l'avons fait au numéro 457; vient :

$$-n(q\alpha^2 + q_1\beta^2)\int\frac{ds}{\omega} + q\int\frac{c'y\,ds}{I} = 0,$$

Appelons excentricité moyenne d'oscillation la longueur c_2 déterminée par l'équation suivante :

$$c_2 \int \frac{y ds}{I} = \int \frac{c' y ds}{I}. \tag{38}$$

L'équation précédente devient alors :

$$-n(q\alpha^2 + q_1\beta^2) \int \frac{ds}{\omega} + qc_2 \int \frac{y ds}{I} = 0.$$

Remplaçons les deux intégrales qui restent encore par leurs valeurs tirées des équations (34) et (15), on obtient :

$$-nr^2(q\alpha^2 + q_1\beta^2) + qc_2 y_1 = 0.$$

Divisons par y_1 et introduisons la hauteur η, on obtient :

$$\left.\begin{aligned} &-\eta(q\alpha^2 + q_1\beta^2) + qc_2 = 0, \\ \text{d'où} \quad &c_2 = \eta\left(\alpha^2 + \frac{q_1}{q}\beta^2\right). \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Traçons une ligne de pression quelconque; l'équation (39) ne sera pas satisfaite. Déterminons la hauteur h dont il faut relever cette ligne de pression pour qu'elle satisfasse à la condition linéaire; l'excentricité c_2 devient $c_2 - h$; on a :

$$c_2 - h = \eta\left(\alpha^2 + \frac{q_1}{q}\beta^2\right),$$

$$\text{d'où} \quad h = c_2 - \eta\left(\alpha^2 + \frac{q_1}{q}\beta^2\right). \tag{40}$$

Supposons que l'on ait choisi la poussée moyenne q_1 pour tracer la ligne de pression; en d'autres termes soit

$$q = q_1$$

les équations (39) et (40) deviennent à cause de l'équation 31 :

$$c_2 = \eta, \tag{41}$$

$$h = c_2 - \eta. \tag{42}$$

De là résulte les propositions suivantes : *Si on trace une ligne de pression en prenant une poussée égale à la poussée moyenne, cette ligne de pression satisfera à la condition linéaire si l'excentricité moyenne d'oscillation est égale à hauteur η. Si cette condition n'est pas satisfaite, on y satisfera en relevant la ligne de pression de $c_2 - \eta$.*

B. Tracés graphiques dans le cas d'une voûte d'épaisseur constante.

460. Simplification des équations. — Dans ce cas, la section ω et son moment d'inertie I sont constants; les équations précédentes se simplifient; on trouve :

$$y_1 \int y\,ds = \int y^2\,ds, \qquad (27^{bis})$$

$$\mu^2 \int y\,ds = \int \mu y\,ds. \qquad (28^{bis})$$

$$\alpha^2 s = \int \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 ds, \qquad (29^{bis})$$

$$\beta^2 s = \int \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 ds, \qquad (30^{bis})$$

$$q_1\beta^2 s = \int P\,\frac{dy}{ds}\,\frac{dx}{ds}\,ds, \qquad (32^{bis})$$

$$q_1\beta^2 s = \int q\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 ds, \qquad (33^{bis})$$

$$r^2 = \frac{I}{\omega} = \frac{e^2}{12}, \qquad (34^{bis})$$

$$\eta = \frac{ne^2}{12y_1}, \qquad (35^{bis})$$

$$c^2 \int y\,ds = \int c'y\,ds. \qquad (38^{bis})$$

461. Axe d'oscillation. — Introduisons la variable auxiliaire γ' déterminée par l'équation :

$$\gamma' = \int y\,ds.$$

L'équation (27^{bis}) devient :

$$y_1\gamma' = \int y\,d\gamma'.$$

Les différentes valeurs de la variable γ' sont connues; γ' est précisément l'ordonnée de l'intégrale A'B'C' de la figure 191. Portons γ' en abscisse, y en ordonnée; intégrons la courbe que l'on obtient; y_2 s'obtient par l'inclinaison de la corde, comme γ_1 et μ_1. Ce n'est pas ce tracé que nous avons représenté; nous y avons apporté les modifications suivantes. La figure 191 donne les valeurs de γ' en ordonnées verticales; portons ces valeurs sur l'axe vertical CC', il suffit pour cela de projeter sur cet axe les points de l'intégrale A'B'C'. Nous devrions ensuite porter horizontalement les y, et construire l'intégrale de $y d\gamma'$; mais les directions des tangentes de cette dernière intégrale sont évidemment perpendiculaires aux directions du diagramme POy, où les y sont verticaux; on obtient donc aisément l'intégrale A''B''C''; à la direction de la corde moyenne, correspond sur le diagramme POy, le rayon Py_2 perpendiculaire à cette corde et l'on a :

$$y = \overline{Oy_2}.$$

469. Moment moyen d'oscillation. — Introduisons comme précédemment la variable γ'; l'équation (28bis) devient :

$$\mu_2 \gamma' = \int \mu d\gamma'.$$

Nous pourrions encore porter γ' en abscisse, μ en ordonnée et opérer par une intégration graphique ordinaire. Mais nous avons supposé que cette figure soit tournée de 90° afin d'utiliser les γ' portés sur l'axe vertical CC'. Les tangentes à l'intégrale D''E''F'' sont perpendiculaires aux rayons du diagramme P'O'μ; on obtient aisément cette intégrale. A la direction de la corde D''F'' correspond sur le diagramme P'O'Z, le rayon P'Z$_2$ perpendiculaire à cette corde et l'on a :

$$\mu_2 = \overline{O'Z_2}.$$

Nous avons supposé (439) les moments μ représentés par une longueur z, telle que $\mu = qz$; on a donc en réalité :

$$z_2 = O'Z_2, \qquad \mu_2 = qz_2.$$

463 Inclinaison moyenne. — Portons s en abscisse sur l'axe ES (fig. 197); portons en ordonnée les valeurs de $\left(\frac{dy}{ds}\right)^2$. Pour y arriver, soit AB = 1, décrivons sur AB une demi-circonférence; menons AC parallèlement à la tangente à l'arc moyen au point considéré; on a :

$$AC = \frac{dy}{ds}, \qquad AD = \left(\frac{dy}{ds}\right)^2.$$

AD est l'ordonnée d'un point M de la courbe cherchée; on obtient d'autres points de la même manière, on obtient la courbe AMN. On intègre et on trouve EM'N'. On mène le rayon PH parallèle à la courbe EN'; on a :

$$\overline{AH} \times s = \int \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 ds$$

ou

$$\overline{AF^2} \times s = \int \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 ds,$$

on a donc

$$\beta = \overline{AF}.$$

Il résulte de là que AF est la direction moyenne, car

$$\cos BAF = \beta.$$

On a aussi $\alpha = \overline{BF}$, $\alpha^2 = \overline{BH}$.

464 Poussée moyenne. — Introduisons dans l'équation (33bis) la variable auxiliaire γ déterminée par l'équation :

$$\gamma = \int \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 ds.$$

Cette équation (33bis) devient :

$$q_1\gamma = \int q\,d\gamma.$$

Les valeurs de γ sont précisément les ordonnées de l'intégrale EM'N' (fig. 197). Portons ces valeurs sur l'axe $O\gamma$ (fig. 198). Nous devons ensuite déterminer les valeurs de q; pour cela portons les poids P sur l'axe AP; soit par exemple $\overline{AP} = P$; menons PB parallèlement à la tangente à l'arc

moyen ; on a $q = \overline{AB}$. On obtient de même les autres valeurs de q et on en déduit la courbe DE. On trouverait l'ordonnée moyenne q_1 par une intégration graphique ordinaire ; mais la courbe DE diffère si peu d'une ligne droite que l'on peut obtenir immédiatement cette valeur de q_1 en Q_1 avec une exactitude suffisante.

465. Détermination de la hauteur η. — Cette hauteur est donnée par l'équation (35bis) ; il suffit de déterminer cette hauteur par une valeur de n pour en déduire facilement toutes les autres. Prenons par exemple, $n = 12$; on a :

$$\eta = \frac{e^2}{y_1}.$$

Soient (fig. 199) $AB = e$, $AC = y_1$; menons la droite BD perpendiculaire sur BC ; on a :

$$AD = \frac{e^2}{y_1} = \eta.$$

466 Excentricité moyenne d'oscillation. — On obtient l'excentricité moyenne d'oscillation, par la même méthode que le moment moyen d'oscillation. Introduisons la variable γ' (461) dans l'équation (38bis), on trouve :

$$c_2\gamma' = \int c'd\gamma'.$$

Si l'on portait γ' horizontalement, on serait ramené à une intégration graphique ordinaire ; comme aux numéros 461 et 462, nous supposons les γ' portés verticalement, les tangentes à l'intégrale des $c'd\gamma'$ sont alors perpendiculaires aux rayons du diagramme POC de la figure 192 ou aux rayons 1I, 2II du diagramme P'O'Z ; on obtient cette intégrale en G''H''K''. A la corde G''K'' correspond sur le diagramme, le rayon PC_2 perpendiculaire à cette corde et l'on a :

$$c_2 = \overline{OC_2}.$$

467. Détermination d'une ligne de pression satisfaisant à la condition linéaire. — On peut appliquer à cette détermination trois méthodes qui sont presque la reproduction de celles que nous avons exposées au numéro 441.

Première méthode. — Déterminons le point de l'arc moyen autour duquel la valeur du moment μ est égale à μ' déterminé par l'équation :

$$\mu' = \mu_2 - q_1\beta^2\eta.$$

Nous avons montré (462) comment on détermine la longueur z_2 qui représente μ_2 ; on a $\mu_2 = qz_2$. Soit z' la longueur qui représente μ' à la même échelle ; on a, en divisant l'équation précédente par q :

$$z' = z_2 - \frac{q_1}{q}\beta^2\eta.$$

Soient (fig. 199) AD $= \eta$ et ED la direction moyenne ; abaissons du point A la perpendiculaire AE sur ED ; du point E, abaissons la perpendiculaire EF sur AD. On a :

$$\text{ED} = \beta\eta, \qquad \text{DF} = \beta^2\eta,$$
$$\text{AE} = \alpha\eta, \qquad \text{AE} = \alpha^2\eta.$$

On obtient facilement par une quatrième proportionnelle la longueur :

$$\frac{q_1}{q}\beta^2\eta.$$

Mais cette petite opération est inutile, si comme nous l'avons supposé $q = q_1$; alors on a :

$$z' = z_2 - \beta^2\eta.$$

Connaissant z', on détermine sur la ligne DEF de la figure 191 la valeur de s qui correspond à z' ; on obtient le point D' en portant cet arc s en AD' (fig. 189).

Déterminons ensuite la droite $y = y_2 + \alpha^2\eta$; projetons le point D' sur cette droite en E'. Nous savons (458) que la pression sur la section D' doit passer par le point E'. Il suffit donc de relever la ligne de pression tracée arbitrairement jusqu'à ce que cette condition soit réalisée.

Cette méthode est celle qui résulte le plus naturellement de la démonstration du numéro 458. Mais les deux suivantes sont plus simples : elles n'exigent ni la détermination du point D', ni celle de la pression sur la section D'.

Deuxième méthode. — Déterminons les ordonnées y_2 et z_2 (fig. 191) :

$$y_2 = \overline{Oy_2}, \qquad z_2 = \overline{O'z_2}.$$

La condition linéaire a été mise sous la forme de l'équation (36) ; remplaçons dans cette équation μ_2 par qz_2 ; il vient en divisant par q :

$$y_2 - c + \alpha^2\eta = z_2 - \frac{q_1}{q}\beta^2\eta.$$

De cette équation, on tire la valeur de c ; c'est l'ordonnée du centre de poussée. La ligne de pression tracée arbitrairement ne satisfait pas à cette condition ; mais il suffira d'élever ou d'abaisser cette ligne pour qu'elle y satisfasse. On peut mettre l'équation qui détermine c sous la forme :

$$y_2 + \alpha^2\eta = z_2 + c - \frac{q_1}{q}\beta^2\eta. \qquad (43)$$

Portons : $$\overline{z_2z'} = \frac{q_1}{q}\beta^2\eta.$$

L'ordonnée du point z' est :

$$z_2 + c - \frac{q}{q_1}\beta^2\eta.$$

C'est le second membre de l'équation (43) ; cette dernière exprime donc que le point z' doit se trouver sur l'axe de pivotement $y = y_2 + \alpha^2\eta$. Cette condition sera réalisée si on élève la courbe de pression et par conséquent le point z' d'une quantité convenable.

Nous n'avons pas représenté dans la figure 190 la ligne de pression relevée ; mais nous avons déterminé le pivot des cordes qui correspondent à la corde A'B'. Soit E le point de cette corde située sur l'horizontale du point z' ; ce point z' doit être amené sur la droite $y_2 + \alpha_2\eta$, donc le point E vient en E' ; ce point E' est le pivot des cordes qui correspondent à A'B', dans les lignes de pression qui satisfont à la condition linéaire.

Troisième méthode.— Déterminons l'excentricité moyenne

d'oscillation; nous avons vu (459) qu'il faut relever la ligne de pression d'une quantité h donnée par l'équation (40) pour que cette ligne de pression satisfasse à la condition linéaire. Cette hauteur h s'obtient facilement dans tous les cas; mais la construction se simplifie encore si $q = q_1$, on a alors : $h = c_2 - \eta$. Proposons-nous de chercher le pivot des cordes qui correspondent à la corde A'B'; il suffit de déterminer sur l'axe de pivotement $y = y_2 + \alpha^2\eta$, le point E' par la condition :

$$EE' = c_2 - \eta.$$

Le point E' est le pivot cherché.

468. Tracé graphique de l'hyperbole spéciale. — On peut suivre les trois méthodes exposées au numéro 442; nous n'avons pas indiqué ce tracé qui n'a pas d'utilité pratique.

C. Tracés graphiques dans le cas d'une voûte d'épaisseur variable.

469. Inclinaison moyenne et poussée moyenne. — Introduisons l'arc auxiliaire s'' défini par l'équation :

$$s'' = \int \frac{ds}{\omega}. \qquad (44)$$

Les formules (29), (30) et (33) deviennent :

$$\alpha^2 s'' = \int \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 ds'', \qquad (29)$$

$$\beta^2 s'' = \int \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 ds'', \qquad (30)$$

$$q_1\beta^2 s'' = \int q \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 ds''. \qquad (33)$$

Comparons ces formules aux formules (29^{bis}), (30^{bis}), (33^{bis}) relatives à une voûte d'épaisseur coustante; la seule différence est que la variable s est remplacée par s''. La fonction s'' s'obtient sur la fig. 193 comme la fonction s'; on a $\omega = e$,

les valeurs de $1 : \omega$ se trouvent portées sur l'axe $O'e'$; les éléments de l'intégrale s'' sont parallèles aux rayons du diagramme $PO'e'$; on obtient la courbe OD.

470. Axe d'oscillation, moment moyen et excentricité moyenne d'oscillation. — Introduisons l'arc auxiliaire s' défini par l'équation (22); les équations (27), (28) et (38) deviennent :

$$y_1 s' = \int y^2 ds', \qquad (28)$$

$$\mu_1 s' = \int \mu y ds', \qquad (28)$$

$$c_1 s' = \int c' y ds'. \qquad (38)$$

Comparons ces équations aux équations (27^{bis}), (28^{bis}) et (38^{bis}); la seule différence est que s est remplacé par s'. Il suffira donc dans les constructions des figures 191 et 192 de porter en abscisse s' au lieu de s.

471. Hauteur η. — Les équations (35) et (34) donnent :

$$\eta = \frac{n}{y_1} \frac{\int \frac{ds}{\omega}}{\int \frac{ds}{I}}.$$

Or, on a : $\omega = e$, $I = \frac{e^3}{12}$; on a donc :

$$\eta = \frac{n}{12\, y_1} \frac{\int \frac{ds}{e}}{\int \frac{ds}{e^3}}.$$

Pour fixer les idées, soit $n = 12$, on a :

$$\eta = \frac{1}{y_1} \frac{\int \frac{ds}{e}}{\int \frac{ds}{e^3}}.$$

Dans la figure (193), nous avons construit les deux intégrales :

$$s'' = \int \frac{ds}{e},$$

$$s' = \int \frac{ds}{e^3}.$$

Supposons que nous ayons pris la même base d'intégration ; on a :

$$\eta = \frac{1}{y_1}\,\frac{s''}{s'}.$$

Cette expression n'est pas homogène ; pour obtenir les longueurs $1 : e$ et $1 : e^2$, nous avons supposé $PO' = 1$; nous devons conserver la même hypothèse pour trouver η. Déterminons d'abord le quotient $s'' : s'$. Soient (fig. 193).

$$s' = \overline{O's'}, \qquad s'' = \overline{O's''}.$$

Menons $s''H$ parallèlement à Ps' ; on reconnaît facilement qu'en prenant OP comme base d'intégration, on a (167) :

$$s'' = O'H \times s', \quad \text{d'où} \quad O'H = \frac{s''}{s'}.$$

Nous avons alors :

$$\eta = \frac{O'H}{y_1}.$$

Portons $O'y_1 = y_1$; menons HK perpendiculairement au rayon P ; on a aussi :

$$O'H = O'K \times y_1, \quad \text{d'où} \quad O'K = \frac{O'H}{y_1}.$$

On a donc $\eta = O'K$.

472. Détermination d'une ligne de pression satisfaisant à la condition linéaire.— Les constructions du numéro 467 sont encore applicables.

§ 4. Détermination de la ligne de pression unique qui se produit.

A. Il n'y a pas de joint de rupture.

473. Connaissant n trouver la ligne de pression. — Traçons une ligne de pression quelconque et menons la corde A'B' (fig. 190), cette corde A'B' a une certaine corde correspondante dans la ligne de pression qui se produit ; le problème serait résolu si on connaissait la position de cette corde.

Pour que la condition angulaire soit satisfaite, il faut que cette corde inconnue passe par un point D' ; ce point D' est situé sur l'horizontale moyenne et se détermine par la condition $DD' = c_1$; ce pivot D' est indépendant du coefficient n, nous l'appellerons *pivot principal*. Pour que la condition linéaire soit satisfaite, il faut que la corde inconnue passe par un second point E' ; ce point E' se trouve sur la droite $y = y_2 + \alpha^2\eta$ et se détermine par la condition $EE' = h$; ce pivot E' dépend du coefficient n, nous l'appellerons pivot spécial. La ligne de pression cherchée doit satisfaire à la condition angulaire et à la condition linéaire ; la corde inconnue doit donc passer par les deux pivots ; on l'obtient en joignant ces deux points.

Nous avons choisi une corde A'B' qui passe par le centre de poussée ; nous obtenons alors immédiatement le centre de poussée. La poussée est l'ordonnée de l'hyperbole des poussées possibles. Si cette courbe n'est pas tracée, on détermine l'extrémité de la poussée par le tracé rappelé au numéro 442 ; on mène QT parallèlement à A'B' ; on mène par le point T une parallèle à D'E' ; on obtient la poussée cherchée sur l'axe SQ.

Autres tracés. — On peut appliquer la méthode précédente en remplaçant la corde A'B' par une corde ou une tangente quelconque de la ligne des pressions tracée arbitrairement. On détermine les deux pivots de la corde ou tangente correspondantes de la ligne cherchée ; on trace cette corde ou cette tangente et on obtient la poussée comme précédemment sur le diagramme des pressions. Quant au centre de poussées, on peut le trouver de différentes manières : 1° on trace la ligne des pressions qui se produit, ou plutôt un polygone circonscrit à cette ligne en partant du point ou de l'un des points connus ; 2° on opère une concentration de manière à réduire la ligne de pression à sa plus simple expression. On obtient le tracé le plus simple en le réduisant à la corde A'B' : c'est le tracé qui précède. Si on a choisi une autre corde que A'B' ou une tangente quelconque, on pourra toujours réduire la ligne à deux côtés, l'un est la corde ou la tangente choisie, l'autre passe par le centre de poussée. Le tracé par les tangentes du numéro 442 est un tracé de ce genre.

474. Cas particulier ou $n = 0$. — Nous avons déjà dit que le pivot principal est toujours le même ; mais le pivot spécial dépend de n. Pour $n = 0$ l'équation (35) donne $\eta = 0$. Nous savons que le pivot spécial se trouve sur la droite $y = y_2 + \alpha^2\eta$; pour $\eta = 0$, cette droite coïncide avec l'axe d'oscillation $y = y_2$. Nous déterminerons donc (fig. 190) le pivot spécial E_0 de la corde A'B' par la condition :

$$E_0E'_0 = c_2 - \eta = c_2.$$

475. Théorème. — *Si l'on fait varier le coefficient* n, *le pivot spécial d'une corde décrit sur une droite fixe des longueurs proportionnelles aux variations de* n.

Nous avons reproduit à une plus grande échelle la construction précédente sur la figure 190bis ; la droite y_2 est XY ; pour $\eta = 0$ le pivot spécial est E'_0 ; on a donc $\overline{E_0E'_0} = c_2$.

Pour une valeur quelconque de n, le pivot spécial E' s'obtient sur la droite $y = y^2 + \alpha^2\eta$ par la condition $EE' = c_2 - \eta$. Portons $E_0'F = \eta$; menons FK suivant la direction moyenne ; menons E_0K perpendiculairement à FK ; on trouve facilement (467) que $E_0'L = \alpha^2\eta$; donc le pivot cherché E' se trouve sur l'horizontale du point K. Pour déterminer ce point E', il suffit de mener FE' parallèlement à la corde A'B' ; on a, en effet, $E_0E_0' = c_2$, $FE_0' = \eta$, E_0F ou $EE' = c_2 - \eta$.

Supposons que n varie, il résulte de l'équation (35) que η varie proportionnellement à n ; si on applique la même construction, on reconnaît que $E_0'F = \eta$ varie proportionnellement à n, mais les directions des droites E_0K, FK, LE', FE' ne changent pas ; donc la figure $E_0'KFE'$ formée des triangles $E_0'KF$ et E'KF varie de manière à rester homothétique à elle-même par rapport au centre E_0' ; il résulte de là que la droite $E_0'E'$ a une direction constante et varie proportionnellement à $E_0'F$ ou au coefficient n. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Si la corde A'B' a précisément la direction moyenne, les points E' et K coïncident ; la droite $E'E_0'$ est perpendiculaire à la direction moyenne ; c'est cette disposition que nous avons choisie figure 190.

476. Tableau graphique de toutes les solutions sans joint de rupture. — Supposons que nous ayons déterminé le pivot spécial E_0' pour $n = 0$ et le pivot spécial E' pour $n = 12$; divisons $E_0'E'$ en 12 parties égales et prolongeons au besoin cette échelle des coefficients n. Joignons les points de division au pivot principal D'; nous obtenons un faisceau de droites qui constitue un tableau de toutes les solutions sans joint de de rupture. Dans ce tableau les lignes de pression ne sont représentées que par une corde ; mais on pourrait considérer un plus grand nombre de côtés ou tangentes et pour chacun d'eux on trouverait un pivot principal et un axe des n. On reconnaît facilement que pour toutes les cordes et tangentes, les axes des n ont même projection sur un axe vertical; cela résulte de ce que pour une même valeur de n tous les pivots se trouvent sur la droite $y = y_2 + \alpha^2\eta$. On peut énoncer ces propositions de la manière suivante : si on fait varier le coefficient n, la ligne des pressions se déplace; toutes les positions d'une corde ou d'une tangente forment un système de droites du 1er degré (180) ; les sommets de ces systèmes se trouvent sur l'horizontale moyenne; les divisions des axes des n se trouvent un système de droites horizontales.

Le faisceau de cordes que nous avons représenté suffit pour donner immédiatement la poussée et le centre de poussée pour une valeur de n. Les droites du faisceau coupent le joint du sommet aux centres de poussée. On obtiendrait les poussées en appliquant une construction connue (442); on est conduit à mener par le point T un faisceau de rayons parallèles aux cordes ; on obtient les poussées sur l'axe SQ. Mais on peut supposer que le diagramme QST soit transporté parallèlement à lui-même de telle manière que le point T vienne coïncider avec le pivot D'; les deux faisceaux de droites coïncident alors et on obtient les poussées sur l'axe horizontal sq que l'on obtient en portant $D's = TS$. On peut aussi et nous l'avons fait sur la figure 190, graduer la courbe des poussées possibles en indiquant les valeurs de n ; on obtient ainsi une représentation très claire de toutes les poussées qui peuvent se produire.

477. Relation entre l'axe des x et l'axe des n. — Nous avons déjà fait remarquer (428) que la position de l'axe des x exerçait une influence sur la condition linéaire : que devient le tableau-graphique dont il vient d'être question si l'axe des x s'élève ou s'abaisse ? Il est d'abord évident que la position des lignes de pression qui se produisent ne peuvent en aucune manière dépendre de la position de l'axe des x ; le faisceau des positions d'une corde pour les différentes valeurs ne peut donc pas être altéré. Pour différentes positions de l'axe des x, on obtiendra des axes des n différents, mais tous les zéros doivent se trouver sur la corde $n = 0$, tous les points $n = n_1$ doivent se trouver sur la corde $n = n_1$; il faut pour cela que les axes des n soient parallèles entre eux (1). Il résulte de là que pour déterminer un axe des n, il suffit de connaître la position de son zéro.

A cet effet, remarquons d'abord qu'une même valeur de n, telle que $n = n_1$ est représentée sur les axes des n par des longueurs différentes ; il est évident que ces longueurs sont proportionnelles aux distances du zéro de l'échelle au sommet du faisceau ; on peut donc écrire que quelle que soit la position de l'axe des $E_0'E'$, on aura :

$$D'E_0' : E'_0E' = \text{constante}.$$

Mais la construction qui nous a permis de trouver $E_0'E'$ prouve que l'on a aussi :

$$E_0'E' : \eta = \text{constante}.$$

En multipliant ces deux proportions membre à membre, on a :

$$D'E_0' : \eta = \text{constante}.$$

La valeur de η est donnée par l'équation (35) ; on a quand l'axe des x varie :

$$\eta y_1 = \text{constante}.$$

L'équation précédente devient :

$$D'E_0' \times y_1 = \text{constante}.$$

(1) On peut vérifier ces propositions géométriquement.

En d'autres termes, la distance du zéro au sommet du faisceau varie en raison inverse de la distance y_1.

478. Problème. — Connaissant l'axe des n pour une position de l'axe des x, trouver l'axe des n pour une autre position.

Soit $O'x''$ (fig. 190) la nouvelle position de l'axe Ox ; menons par le sommet D' une droite quelconque $Dx''x$ qui coupent les axes Ox, $O''x''$ en deux points x et x'' ; y_1 varie dans le rapport $Dx'' : Dx$, il faut donc faire varier la distance $D'E'_0$ dans le rapport inverse ; il suffit pour cela de joindre $x''E'_0$ et de mener xe'_0 parallèlement à $x''E'_0$: e'_0 est le zéro du nouvel axe des n (1). Pour simplifier le langage nous dirons que ce nouvel axe est conjugué à l'axe $O''x''$.

479. Valeurs de n pour lesquelles il n'y a pas de joint de rupture. — Nous avons montré (444) comment on détermine la partie utile de l'hyperbole des solutions possibles sans joint de rupture. Aux extrémités de l'arc utile, correspondent deux centres de poussées ; joignons ces points au pivot D' nous obtiendrons les positions extrêmes de la corde dont nous étudions les évolutions ; ces droites déterminent sur l'axe des n les valeurs limites n_0 et n_1 : le coefficient n doit rester compris entre ces limites pour qu'il n'y ait pas de joint de rupture ; on trouve pour le cas de la figure 190

$$n_0 = -4, \qquad n_1 = +4.$$

En général on trouve que n_0 est négatif, or le coefficient n est essentiellement positif ; on peut même considérer les valeurs de n plus petites que l'unité comme tout-à-fait exceptionnelles ; il est donc inutile de considérer les valeurs de n plus petites que n_0. Mais au fur et à mesure que le mortier

---

(1) Le zéro sur l'axe des n se trouve sur l'axe d'oscillation conjugué à l'axe Ox ; l'axe d'oscillation passe par le centre de percussion ou de pression (258) conjugué à l'axe Ox ; on peut donc résoudre ce problème par les méthodes des numéros 254, 261, 283. La construction que nous venons d'indiquer est une de ces dernières.

dune voûte devient plus fluide, le coefficient n croît, le centre de poussée s'élève; pour n plus grand que n_1, il y a un joint de rupture. La méthode précédente donne dans ce cas une courbe de pression impossible; pour ces valeurs de n, la loi suivant laquelle les lignes de pressions se modifient n'est plus la même. C'est pour arriver à déterminer cette loi que nous allons étudier d'abord l'influence d'une rotule placée dans le plan de symétrie, ou de deux rotules symétriques placées à une hauteur quelconque.

480. Cas d'une rotule. — En introduisant une articulation dans une voûte, on rend possible une rotation ψ_0 entre les deux parties de voûtes adjacentes; l'équation angulaire devient:

$$\int d\psi + \psi_0 = 0.$$

Cette équation n'est plus une condition à laquelle la courbe de pression doit satisfaire; c'est une équation que détermine l'angle ψ_0. Il résulte de là que les lignes de pression ne satisfont plus aux propriétés des courbes de pression possibles sans joint de rupture; l'extrémité de la poussée n'est plus sur l'hyperbole principale; les côtés et tangentes n'ont plus un pivot sur l'horizontale moyenne.

Mais la courbe des centres de pression satisfait à une condition nouvelle, elle doit passer par le centre de l'articulation; la pression sur la section idéale qui passe par ce centre doit pivoter autour de ce point. Nous pouvons donc raisonner comme nous l'avons fait au numéro 435 et nous démontrerons que les côtés et tangentes pivotent encore autour de points fixes, mais tous ces pivots, au lieu de se trouver sur l'horizontale moyenne, se trouvent sur l'horizontale qui passe par le centre de l'articulation.

Si nous prenons un axe des x quelconque, la condition linéaire n'est pas la même que si la rotule n'existait pas; elle contient le terme $\psi_0 l_0$. Mais nous avons déjà fait remarquer (429) qu'en prenant pour axe des x, l'horizontale qui passe par le centre de la rotule, la condition linéaire n'est pas changée. Nous obtiendrons donc les positions des lignes des pressions pour toutes les valeurs de n, en opérant comme

s'il n'y avait pas de rotule, sauf en ce qui concerne la position de l'axe des pivots principaux et la position de l'axe des x.

Soit à déterminer la position d'une corde. Traçons une ligne de pression quelconque, on détermine aisément la hauteur dont il faut la relever pour que le centre de la rotule devienne centre de pression; relevons la corde considérée, elle est coupée par l'horizontale de la rotule en un point qui est le pivot principal de cette corde. Nous déterminerons ensuite les pivots spéciaux pour toutes les valeurs de n; c'est l'échelle des n conjuguée à un axe des x passant par le centre de la rotule. Si l'axe des n est déjà tracé pour la même corde et pour un autre axe des x, on opère comme au numéro 478. Si aucune opération n'est effectuée, on applique directement la méthode générale en prenant l'axe des x par le centre de la rotule, on détermine y_2, η, α, et la hauteur h dont il faut relever la ligne de pression tracée pour qu'elle satisfasse à la condition angulaire; on trace l'axe $y_2 + \alpha_2\eta$, la corde relevée est coupée par cet axe au pivot spécial à une valeur n. On détermine aussi les pivots pour $n = 0$, et pour $n = n'$; on divise la distance qui sépare les deux points en n' parties égales; en prolongeant la division, on obtient l'axe des n. On obtient alors toutes les positions de la corde en joignant le pivot principal aux divisions de l'axe des n. Ces diverses propriétés peuvent se résumer comme suit : Si, dans une voûte on établit une rotule et, si par la pensée, on fait varier le coefficient n, la courbe de pression se déplace en passant par le centre de la rotule; les cordes et tangentes pivotent autour de points situés au niveau de la rotule; leurs diverses positions forment des systèmes du premier degré en n; les axes des n ont même projection verticale; le zéro de ces axes est situé sur l'axe d'oscillation conjugué à l'axe horizontal qui passe par la rotule.

481. Rotule avec coin. — Si on chasse des coins entre les voussoirs articulés, on déplace à volonté le centre de pression dans la section passant par la rotule; on obtient (429),

en manœuvrant les coins, toutes les lignes de pression qui satisfont à la condition linéaire; c'est donc de cette façon que l'on ferait fonctionner les pivots spéciaux des cordes et tangentes. Pour une valeur de n, les coins feront pivoter les côtés et tangentes de la ligne de pression autour de points situés sur l'axe $y = y_2 + \alpha^2\eta$. Pour une autre valeur de n, η varie proportionnellement à n, les pivots spéciaux se déplacent. Si on fait passer n pour tous les états de grandeur, chaque pivot décrit un axe des n et tous ces axes des n ont même projection verticale.

B. Joints de rupture.

Nous avons vu que l'arc utile de l'hyperbole des poussées possibles sans joint de rupture est complété par certaines parties bien déterminées du contour de l'aire des solutions stables; nous connaissons toutes les poussées possibles avec un ou deux joints de ruptures; mais à chacune d'elles correspond une valeur du coefficient n; ce sont ces valeurs de n qu'il s'agit de trouver. Nous allons examiner successivement les différents cas.

182. Joint de rupture au sommet. — Dans la figure 190, l'arc utile de l'hyperbole principale se complète par un côté horizontal à la hauteur du sommet de l'extrados. Faisons croître n; nous savons que la corde A'B' pivote d'abord autour du point D' et que le centre de poussée s'élève. Quand le centre de poussée a atteint le sommet de l'extrados, ce point fonctionne comme une charnière et d'après ce que nous venons de voir la corde pivote alors autour de la charnière. Nous avons précisément mené l'axe des x par la rotule, l'axe des n déjà tracé convient donc encore pour ces solutions; on pourra donc lire immédiatement sur l'échelle $E_0'E'$, les valeurs de n qui correspondent aux diverses positions que prend la corde en pivotant autour du sommet de l'extrados. Menons par le point T un faisceau de droites parallèles au faisceau des positions de la corde, nous obtiendrons les pous-

sées sur l'axe SQ et nous pourrons graduer le côté horizontal de la courbe des poussées possibles, comme nous avons gradué le côté hyperbolique. Mais la poussée ne peut pas descendre au-dessous de la pousssée minima dont l'extrémité se trouve au sommet δ de l'aire des solutions stables; en portant cette poussée minima en δ'S, on obtient la direction δ'T de la corde limite ; on mène cette corde par le point O et on trouve qu'elle correspond à une certaine valeur $n_2 = 18$. Pour les valeurs supérieures à n_2 la courbe de pression ne se déplace plus, mais deux joints de ruptures se produisent et les angles d'ouvertures augmentent avec n.

Nous remarquerons que pour tracer les courbes $\varepsilon\varphi$ et $\gamma\delta$, nous avons appliqué la méthode des cordes (369); mais nous nous sommes servi de la corde A'B' et on voit aisément sur la figure comment nous avons obtenu les points ε et φ et les tangentes en ces points ; on voit aussi comment nous avons obtenu deux points et deux tangentes de la courbe $\gamma\delta$, en prenant deux charnières à l'intrados dans les joints 4 et 5 (1).

483. Joint de rupture à la naissance. — L'hyperbole principale peut couper la courbe, des poussées minima, dans la partie où cette courbe est formée par la conjuguée de l'extrémité de l'intrados; le premier joint de rupture se produit alors à la naissance; l'extrémité de l'intrados fonctionne donc comme une charnière fixe; on traite cette charnière fixe comme une rotule; on est ramené au cas du numéro 480. Si l'on suit une corde dans ses évolutions, on trouve des résultats analogues à ceux du numéro précédent; mais pour $n = n_1$ le pivot descend brusquement de l'horizontale moyenne à la hauteur de l'extrémité de l'intrados.

484. Joint de rupture qui dépend de n. — Le cas le plus compliqué est celui où l'hyperbole principale coupe la courbe des poussées minima et se complète par une partie de la conjuguée de l'intrados. Si l'extrémité de la poussée décrit cette partie de courbe, les courbes de pression qu'elle

(1) La méthode que nous avons employée est expliquée au numéro 484.

engendre enveloppent une partie de l'intrados, la charnière du joint de rupture se déplace. Il faut alors considérer successivement différentes positions de la charnière. Pour chacune d'elles, on assimile la charnière à une rotule, on trace pour une corde l'axe des n conjugué à l'horizontale qui passe par la charnière, cette corde détermine la valeur de n qui correspond à la ligne de pression considérée.

Considérons deux positions infiniment rapprochées des courbes de pression tangentes à l'intrados; les côtés et tangentes qui se correspondent dans les deux lignes de pression se coupent sur une horizontale qui passe par le point d'intersection des deux courbes de pression; mais ce point se rapproche indéfiniment du point de contact entre l'intrados et la courbe de pression; on peut donc dire que si l'extrémité de la poussée décrit un arc infiniment petit de la courbe des poussées possibles avec joint de rupture, les cordes et tangentes tournent autour de *pivots instantanés* situés sur l'horizontale de la charnière du joint de rupture. Si on décrit complètement la courbe des poussées possibles avec joint de rupture, les côtés et tangentes de la ligne de pression pivoteront successivement autour de différents points, ces côtés et tangentes envelopperont certaines courbes; dans chacune des positions de la ligne de pression les points de contact des côtés et tangentes avec leurs enveloppes respectives se trouvent sur l'horizontale de la charnière du joint de rupture.

Proposons-nous d'abord de tracer les différentes positions de la corde qui correspond à une corde donnée. Nous avons montré (369) comment en se donnant la charnière, on détermine la poussée et le centre de poussée; ces éléments déterminent complètement la ligne de pression et on peut trouver la corde cherchée par plusieurs moyens. Mais on peut obtenir la position de cette corde plus directement en considérant la charnière comme une rotule et en opérant comme aux numéros 480 et 482. Traçons une ligne de pression quelconque et la corde dont nous nous proposons d'étudier les évolutions. Il s'agit de voir ce que devient cette corde lorsque la courbe

de pression touche l'intrados en un point donné. Cherchons d'abord une courbe de pression qui passe par ce point, nous la ferons pivoter ensuite autour de ce point pour qu'elle devienne tangente à l'intrados. Menons une verticale par la charnière jusqu'au côté de la ligne de pression connue qui doit passer par cette charnière; on obtient la hauteur dont il faut relever la ligne de pression pour réaliser cette condition ; on obtient immédiatement le pivot de la corde considérée. Pour que la courbe de pression devienne tangente à l'intrados, on détermine la poussée par le tracé du numéro 369; on obtient alors la direction de la corde sur le diagramme des pressions; connaissant le pivot de la corde et sa direction, on peut la tracer : le problème est résolu. En appliquant cette construction pour un nombre suffisant de positions de la charnière, on obtiendra un nombre suffisant de positions de la corde, on obtient en même temps les points où elles touchent leur enveloppe, on trace cette enveloppe.

Les positions d'une corde étant déterminées, il faut encore chercher les valeurs de n qui y correspondent. Pour chaque position de la charnière, on peut opérer comme s'il y avait une rotule; on trace l'axe des n conjugué à un axe des x passant par la charnière (478); la corde déterminera sur cet axe des n la valeur correspondante de n. Pour une même corde tous les axes des n sont déterminés par le faisceau de toutes les positions que cette corde occuperait si le mortier résistait à l'extension; il suffit donc d'inscrire les valeurs de n sur un seul axe pour pouvoir lire la valeur de n qui correspond à un point d'un autre axe. Chaque corde coupe l'axe des n qui lui correspond en un certain point; le lieu de ces points est une courbe que l'on peut tracer et qui servira de courbe de rebroussement entre les cordes possibles avec joint de rupture et les cordes théoriquement possibles sans joint de rupture.

Donnons-nous un centre de poussée quelconque, suivons la corde qui y passe jusqu'à cette courbe, suivons ensuite la corde du faisceau des cordes théoriquement possibles sans joint de rupture, nous lirons la valeur de n sur un seul axe

des n. Les cordes que l'on a tracées ne correspondent pas à des valeurs de n en progression arithmétique; le tableau graphique serait d'une lecture plus facile si l'on traçait les cordes qui correspondent à ces valeurs. Pour y arriver il suffit de mener par les points convenables de la courbe de rebroussement des tangentes à l'enveloppe des positions de la corde.

A l'extrémité de la courbe des poussées minima, correspond une courbe de pression qui touche l'intrados et l'extrados; on trouve pour cette courbe $n = n_1$. Si n croît, il se produit deux joints de rupture, mais la courbe de pression ne se modifie plus.

485. Cas divers. — La courbe des poussées minima ne se compose pas toujours uniquement de la conjuguée de l'intrados; il arrive que cette conjuguée se complète par son enveloppée extrême. La charnière décrit alors un arc d'intrados, atteint l'extrémité de l'intrados et conserve cette position pour un certain arc de la courbe des poussées possibles; on est ramené au cas d'un joint de rupture à la naissance (483). Une corde quelconque subit alors les évolutions suivantes: elle pivote autour de son pivot principal, enveloppe ensuite une courbe, puis elle pivote autour de l'extrémité inférieure de cette courbe qui se trouve au niveau de l'extrémité de l'intrados.

La courbe des poussées possibles avec un joint de rupture peut aussi être formée par la conjuguée de l'extrados; ce cas se traite de la même manière que celui du numéro précédent; la seule différence, c'est que la charnière décrit l'extrados.

486. Angle d'ouverture du joint de rupture. — *L'angle d'ouverture du joint de rupture est représenté à une certaine échelle par le segment de l'horizontale moyenne compris entre une corde de la ligne de pression et le pivot principal autour duquel cette corde tournerait s'il n'y avait pas de joint de rupture.*

Pour fixer les idées, supposons qu'il existe une charnière à l'extrados; l'angle d'ouverture A est donné par la for-

mule 23. Soit d le segment de l'horizontale moyenne compris entre une corde et son pivot principal ; cette corde est la direction de la résultante de la poussée q et d'une force P ; le moment de cette résultante autour du pivot principal s'exprime par Pd ou qc_1 selon que l'on prend pour point d'application de cette résultante un point situé sur la verticale ou l'horizontale du pivot principal ; on a donc :

$$qc_1 = Pd.$$

La formule 23 devient :

$$E''A = Pd \int \frac{ds}{I}.$$

L'angle A est proportionnel à d ; c'est ce qu'il fallait démontrer. Si le joint de rupture se trouvait à l'extrados, c_1 et d changeraient de signe, mais le raisonnement subsiste. Remarquons aussi que l'échelle des angles A est déterminée par la condition que l'angle égal à l'unité est représenté par une longueur u donnée par l'équation

$$E'' = Pu \int \frac{ds}{I}.$$

Cette échelle dépend de la corde que l'on a choisie.

487. Cas de deux joints de rupture. — Soient A et B les angles de rotation autour de la charnière de l'extrados et de l'intrados ; ces angles se déterminent par les équations (7) et (8) où l'on fera $\psi_0 = -A$, $\psi_1 = B$; on transforme ces équations en introduisant c_1, c_2 et η comme on a transformé les équations (4) et (5) ; on obtient :

$$E''(A - B) = qc_1 \int \frac{ds}{I}$$

$$E''(Aa - Bb) = (-q\alpha^2\eta - q_1\beta^2\eta + qc_2) \int \frac{y\,ds}{I}.$$

Nous avons démontré la relation $qc_1 = Pd$, on a donc :

$$E''(A - B) = Pd \int \frac{ds}{I}.$$

La différence A — B est représentée par la longueur d; occupons-nous de l'angle A. Prenons un axe des x par le sommet de l'angle B, la seconde des équations devient :

$$E'' A a = (- q \alpha^2 \eta - q_1 \beta^2 \eta + q c_2) \int \frac{y ds}{I}.$$

Pour que A soit nul, on devrait relever la courbe de pression d'une hauteur h donnée par l'équation (40); en introduisant cette hauteur h dans la valeur de A, on trouve :

$$E'' A a = q h \int \frac{y ds}{I}.$$

Soit d' la distance horizontale entre une corde et le pivot autour duquel elle tournerait si la condition linéaire des courbes de pression sans joint de rupture était satisfaite; on trouve comme précédemment :

$$P d' = q h,$$

on a donc :

$$E'' A a = P d' \int \frac{y ds}{I}.$$

Dans le cas de deux joints de rupture, la corde a une position fixe, mais si n varie, le pivot spécial décrit l'axe des n, la distance d' varie et représente A à une certaine échelle; on reconnaît facilement que les valeurs de d' pour toutes les valeurs de n, s'obtiennent en projetant sur une horizontale l'échelle des n par des lignes projetantes parallèles à la corde considérée. Il est utile d'avoir l'angle A et l'angle A — B à une même échelle; l'angle A = 1 est représenté par la longueur u' donnée par l'équation :

$$E'' a = P u' \int \frac{y ds}{I}.$$

En comparant les valeurs de u et de u', on trouve :

$$\frac{u'}{u} = \frac{y_1}{a}.$$

On réduit facilement les angles A à l'échelle u.

En examinant les différents cas avec attention, on trouve que n peut croître jusqu'à l'infini et qu'on trouvera toujours des valeurs de A et B. On pourrait donc déduire de là que s'il y a des solutions stables, la voûte tiendra quelle que soit la maçonnerie. Mais nous remarquerons que nous avons tracé l'aire des solutions stables pour la voûte non déformée; cela n'a pas d'inconvénient quand les déformations sont petites. Mais si n croît, et si E'' décroît, les angles A et B peuvent devenir grands, les déformations peuvent devenir considérables et on reconnaît sans peine que l'aire des solutions stables diminue. En calculant les déformations, on pourrait trouver par tâtonnements les valeurs de n et de E'' pour lesquelles l'aire des solutions stables disparaît. Si la maçonnerie était assez peu soignée pour que ces valeurs soient atteintes, la voûte s'effondrait certainement.

488. Écrasement partiel des charnières. — Nous avons supposé que les voussoirs résistaient indéfiniment à l'écrasement; la charnière à l'extrados ou à l'intrados n'est possible que dans cette hypothèse. En réalité, avant que la courbe de pression atteigne l'intrados ou l'extrados, il se produira un écrasement partiel et la charnière sera située à une petite distance de l'extrados ou de l'intrados. Il faudrait, d'après cela, modifier légèrement les résultats des recherches précédentes. On pourrait déterminer l'aire des solutions stables en prenant comme limite de résistance un coefficient égal ou même un peu plus grand (1) que le coefficient de résistance à la rupture; on raisonnerait sur le contour de cette aire comme nous avons raisonné précédemment sur l'aire des solutions stables pour une résistance illimitée.

(1) Nous disons un peu plus grand parce que les coefficients de rupture sont déterminés pour une pression appliquée à toute l'étendue de la section comprimée; quand une faible partie de cette section travaille, la matière environnante sert de ceinture et contribue à augmenter la pression limite. C'est ainsi que par une pointe d'aiguille on peut exercer par unité de surface une pression très considérable sans briser une pierre.

§ 5. Forme d'équilibre d'une voûte.

489. Définition et propriétés. — Nous appelons forme d'équilibre une forme telle, que l'arc moyen soit établi suivant une courbe de pression. Cette courbe de pression que nous appellerons courbe de pression centrale, satisfait évidemment à la condition angulaire (4), car en tous les points $M = 0$, $d\psi = 0$ et l'intégrale de $d\psi$ est nulle; elle se réaliserait donc pour une certaine valeur de n; la condition linéaire, sous la forme de l'équation (5^{bis}), nous apprend que cette valeur de n est $n = 0$.

A la courbe de pression centrale correspond une ligne de pression; ces deux lignes ne coïncident pas; la différence entre ces deux lignes dépend de la force fictive p (345); cette force fictive dépend elle-même de la distance du centre de gravité du joint au centre de pression. Dans le cas qui nous occupe, cette distance est très petite, surtout si la surcharge est nulle; aussi dans une première approximation, nous négligerons la force fictive p. Déterminons, dans cette hypothèse, la poussée moyenne q_1 (454). Pour cela nous devons pour chaque point de l'arc moyen déterminer la poussée q' qui produit une pression tangente en ce point de l'arc moyen; nous trouvons précisément que la ligne de pression centrale réalise cette condition; nous obtenons donc la poussée $q' = q_0$ qui produit cette ligne de pression centrale. Nous devons ensuite chercher une moyenne des valeurs de q' par l'équation (32); on trouve évidemment :

$$q_1 = q_0.$$

490. Hyperbole principale. — Déterminons l'horizontale moyenne HH' (fig. 200) par la méthode générale; c'est la ligne des pivots principaux. La ligne de pression centrale satisfait déjà à la condition angulaire; menons une corde AB'; son pivot principal est le point où elle est coupée par l'horizontale moyenne. Soit $Q_0 S U$ le diagramme des pressions pour la courbe centrale; on a $q_0 = \overline{Q_0 S}$. Menons $Q_0 T$

parallèlement à la corde AE'; la corde AB' correspond à une concentration du poids de la voûte en deux poids appliqués en A et B' et représentés par ST et TU. Faisons pivoter la corde AB' autour de son pivot D et sa parallèle Q_0T autour de son point T; nous obtiendrons (442) sur ab les centres de poussées et sur SQ les poussées; on obtient l'hyperbole $\gamma\beta$ des poussées possibles sans joint de rupture. On aurait pu obtenir cette même hyperbole en faisant pivoter une tangente CB et sa parallèle menée par U.

491. Joints de rupture. — Déterminons l'aire des solutions stables. Si l'intrados et l'extrados étaient d'égale résistance (373, 381), l'aire des solutions stables serait comprise entre les hyperboles $\gamma\delta$ et $\alpha\beta$ conjuguées des extrémités d et c de l'extrados et de l'intrados; or les courbes d'intrados et d'extrados ne s'éloigneront pas considérablement de ces formes; l'aire des solutions stables s'obtiendrait donc en arrondissant les angles α et δ par des petites courbes conjuguées de l'intrados et de l'extrados. L'hyperbole principale passe près du sommet β, il est donc inutile de tracer ces petites courbes; toutefois, pour plus de certitude, on pourrait les déterminer par la méthode du numéro 369.

Deux dispositions peuvent se présenter. L'hyperbole principale peut sortir de l'aire des solutions stables en coupant le côté horizontal $\delta\beta$; l'arc utile se complète alors par une partie de ce côté; ce côté représente des poussées qui produisent un joint de rupture au sommet de la voûte, la charnière est à l'extrados. L'hyperbole principale peut aussi sortir de l'aire des solutions stables en coupant l'hyperbole conjuguée du point c; l'arc utile se complète alors par une partie de cette hyperbole; les poussées qu'elle représente produisent un joint de rupture à la naissance, la charnière est à l'intrados. Pour reconnaître facilement si c'est la première ou la seconde disposition qui se réalise, nous avons pris le point B' sur la verticale du point c; en faisant pivoter la corde AB', on voit immédiatement si cette corde atteint le point b avant d'atteindre le point c ou réciproquement; dans le premier cas le premier joint de rupture se produit

au sommet, dans le second cas il se produit aux naissances. Si la corde atteignait ces deux points en même temps, les deux joints de rupture se produiraient aussi en même temps. Le tracé graphique indique qu'on se trouve dans ces conditions. Cela ne se présente pas toujours; mais, dans tous les cas, les limites n_1 et n_2 entre lesquelles n doit rester compris pour qu'il n'y ait qu'un joint de rupture sont toujours très rapprochées (1).

492. Axe des n. — Nous avons trouvé qu'une ligne de pression tracée avec la poussée moyenne devait, pour satisfaire à la condition linéaire, être élevée d'une hauteur h donnée par l'équation

$$h = c_2 - \eta.$$

Appliquons cette formule à la courbe centrale; nous avons évidemment en chaque point $c' = 0$, donc l'excentricité moyenne d'oscillation c_2 donnée par la formule (38) est aussi égale à zéro; on a donc :

$$h = -\eta.$$

Déterminons la hauteur η, pour une certaine valeur $n = n'$, par la construction ordinaire (465, 471); déterminons aussi l'inclinaison moyenne (463, 469) et l'axe d'oscillation y_2 (461, 470). Cet axe dépend de la position de l'axe des x; nous avons pris pour axe des x l'axe passant par le sommet de l'intrados. Quand il y a des courbes de pression à un joint de rupture unique, il est avantageux de mener cet axe par la charnière du premier joint de rupture; l'axe des n que l'on obtient, convient alors pour toutes les lignes de pression.

Soit K K' l'axe d'oscillation; c'est l'axe des pivots spéciaux

---

(1) On peut étudier par l'analyse dans quel cas on aura l'une ou l'autre disposition. Si l'épaisseur de la voûte est constante, le premier joint de rupture est aux naissances dans les voûtes très surbaissées; il est au sommet dans le cas contraire. Si l'épaisseur de la voûte diminue de la naissance au sommet, le premier joint de rupture est plus fréquemment au sommet.

pour $n = 0$. Or la courbe centrale correspond à $n = 0$, donc le point O, où la corde A B' est coupée par l'axe K K', est le zéro de l'axe des n. Cherchons le pivot spécial de cette corde pour $n = n'$ (nous avons choisi $n' = 48$); l'axe de pivotement est $y = y_s + \alpha' \eta$; portons O E $= \eta$, menons E F suivant la direction moyenne, O F perpendiculairement à E F; traçons l'horizontale du point F; c'est l'axe des pivots spéciaux (475). La ligne de pression centrale doit être relevée de $-\eta$ ou descendue de $+\eta$ pour satisfaire à la condition linéaire; cette corde vient en E N, N est le point de l'axe des n qui correspond à $n = n'$; on obtient l'axe des n en divisant O E en n' parties égales et en prolongeant la division. On obtient le tableau graphique de toutes les solutions en faisant pivoter la corde A B' autour du point D jusqu'à la position bD. Pour d'autres dispositions on devrait aussi faire pivoter cette corde autour du point b ou du point c jusqu'à la position bc. Dans la figure 200, les deux joints de rupture se produisent en même temps pour $n = 9$. Nous ferons remarquer que l'échelle O N étant assez petite, nous l'avons remplacée par l'échelle O'N'; nous avons pris O'D=2 OD; O'N'=ON représente alors $n = 24$.

493. Détermination exacte de la poussée moyenne et de l'axe des n. — Nous avons trouvé approximativement que la poussée moyenne est donnée par la valeur $q_1 = q_0$: il est possible de trouver exactement la poussée moyenne. Soit (fig. 201) B S U le diagramme des pressions pour la ligne centrale; portons la force fictive p en U U'; B U' est la tangente à l'arc moyen, B U est la pression correspondante. Nous avons supposé des joints normaux à l'arc moyen, donc l'angle BU'U est droit. Pour obtenir une pression sur le joint considéré qui soit parallèle à la tangente à l'arc moyen, il faudrait une poussée A S que l'on obtient en menant A U parallèlement à BU'; cette poussée q' est :

$$q' = q_0 + \frac{p}{\sin \varphi}.$$

Nous avons déjà désigné par p' la force $\frac{p}{\sin\varphi}$ (351); on obtient cette force aussi facilement que p; on a donc :

$$q' = q_0 + p'.$$

La formule (32) qui donne la poussée moyenne devient alors :

$$q_1 = q_0 + \frac{\int p' \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \frac{ds}{\omega}}{\int \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \frac{ds}{\omega}}$$

ou bien $q_1 = q_0 + p''$;

p'' est une valeur moyenne des valeurs p' déterminée par l'équation

$$p'' \int \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \frac{ds}{\omega} = \int p' \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \frac{ds}{\omega}.$$

On obtiendra la valeur de p'' par un tracé analogue à celui du numéro 464 ou 469; mais comme p' est petit, on pourrait se contenter de prendre une moyenne arithmétique entre deux ou trois valeurs de p'. Quand p' est constant, $p'' = p'$.

La ligne centrale n'est donc pas exactement tracée avec la poussée moyenne; c'est pourquoi la hauteur dont il faut la relever pour qu'elle satisfasse à la condition linéaire est donnée par la formule (40) ou l'on fera $c_2 = 0$ et $q_1 = q_0 + p''$; on trouve :

$$h = -\eta \frac{q_0 + p''\beta^2}{q_0}.$$

Construisons cette expression. Soient (fig. 201) $AB = p'$, $BS = q_0$, $BF = \eta$. Menons AC suivant la direction moyenne, BC perpendiculairement sur AC; on a :

$$BC = p'\beta, \qquad DB = p''\beta^2.$$

On a donc :

$$h = -\eta \frac{DS}{BS} = -DH.$$

La seule modification à faire subir à la construction approchée du numéro précédent, c'est de porter $OE = h$ (fig. 200) au lieu de porter $OE = \eta$.

§ 6. Arc moyen en chaînette renversée.

194. Propriétés. — La chaînette est la forme d'équilibre d'un fil homogène pesant ; elle a pour équation :

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right). \qquad (1)$$

L'axe des y passe par le point le plus bas A (fig. 202) ; l'axe des x se trouve sous le point le plus bas d'une longueur $OA = a$; c'est la longueur du fil dont le poids représente la tension T_0 au point le plus bas. Soit π le poids de l'unité de longueur de fil, on a :

$$T_0 = \pi a.$$

On démontre aussi que la chaînette satisfait aux équations différentielles :

$$\frac{ds}{y} = \frac{dx}{a} = \frac{dy}{s}. \qquad (2)$$

Les trois éléments ds, dx, dy forment un triangle rectangle ; les trois lignes y, a, s doivent former un triangle rectangle semblable au précédent. On connaît de ce dernier l'hypothénuse y et le côté a ; pour le construire traçons du pied de l'ordonnée y comme centre une circonférence avec a pour rayon, menons la tangente BD, le triangle cherché est BDG ; on déduit de là que la tangente à la chaînette est la droite BD et que l'on a :

$$S \text{ ou arc } AB = BD.$$

Coupons par la pensée le fil au point le plus bas ; introdui-

sons la tension T_0; composons cette tension avec les poids des différentes parties du fil; nous obtenons une ligne des résultantes; nous savons (132) que cette ligne est la forme d'équilibre du fil; la chaînette est donc une ligne des résultantes.

Remplaçons la tension T_0 par une compression de même grandeur mais de sens contraire; on reconnaît facilement que toute résultante T B est remplacée par une compression symétrique T B'; on obtient donc, pour ligne des résultantes, une chaînette renversée par une rotation de 180° autour de la tangente au point le plus bas. Établissons l'arc moyen d'une voûte d'épaisseur constante suivant cette chaînette renversée; le poids de la voûte peut très approximativement se transporter sur l'arc moyen; ce poids est proportionnel à la longueur de l'arc que l'on considère; soit π le poids de l'unité de longueur de cet arc; introduisons une poussée

$$q_0 = T_0 = \pi a,$$

nous obtiendrons une ligne de pression qui coïncidera avec l'arc moyen; cette ligne de pression coïncide aussi avec la courbe de pression qui lui correspond, puisque la force fictive p est nulle. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante : *la chaînette renversée est la forme d'équilibre d'une voûte d'épaisseur constante sans surcharge* (1).

495. Tracé graphique d'une chaînette. — *Première méthode.* — Dans le triangle B D b, on a : $y^2 = a^2 + s^2$; donnons à s des valeurs très rapprochées o, h, $2h$, $3h$, etc.; portons ces valeurs sur une horizontale A M; portons sur une verticale oA $= a$; les valeurs de y sont les rayons

(1) La chaînette reste encore la forme d'équilibre quand la surcharge sur un arc A B (fig 203) est représentée par l'aire comprise entre cet arc A B, l'axe des x et les ordonnées extrêmes. Cela résulte de la première des équations (2); on en tire $y\,dx = a\,ds$; la surcharge élémentaire est $\pi' y\,dx = \pi' a\,ds$; elle s'ajoute au poids $\pi\,ds$ de l'arc; on obtient une charge totale $\pi''\,ds$ qui reste proportionnelle à l'arc sollicité.

menés du point O aux extrémités des longueurs S. Soient $y_0\ y_1\ y_2\ldots$ ces ordonnées; traçons les droites $y = y_0$, $y = y_1$, $y = y_2\ldots$ Du sommet de la chaînette A dont les coordonnées sont $x = 0$, $y = y_0$ et avec une ouverture de compas égale à h, nous porterons cette longueur h en AA', A'A'', A''A'''...; en traçant une courbe par ces points, on obtiendra une ligne qui différera très peu de la chaînette.

2me *méthode.* — En développant l'équation (1) de la chaînette, on trouve en prenant a comme unité :

$$y = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots$$

On peut se borner aux trois premiers termes et construire y par la méthode du numéro 72 ou celle du numéro 253. On peut aussi commencer par construire les valeurs de x' :

$$x' = x^2$$

et alors construire :

$$y = 1 + \frac{x'}{2} + \frac{x'^2}{24}.$$

3me *méthode.* — On peut construire soit par le calcul, soit au moyen d'une table, soit par l'une des méthodes précédentes, l'échelle des valeurs de la fonction :

$$y = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

pour des valeurs de x en progression arithmétique; en joignant les divisions de cette échelle à un pôle et en menant des droites parallèles à des distances $a = 1$, $a = 2\ldots$ du pôle, on obtient les ordonnées de chaînettes de toute grandeur.

496. Horizontale moyenne. — L'horizontale moyenne est l'horizontale du centre de gravité de l'arc AB (fig. 205); on l'obtient de la manière suivante : menons comme au numéro 494 la tangente BD au cercle, de rayon a, décrit du pied de l'ordonnée du point B, comme centre; prolongeons le rayon qui passe par le point de contact jusqu'au point E de l'axe des y; nous allons démontrer que l'horizontale qui passe par le milieu de la droite EB, est l'horizontale moyenne.

L'ordonnée de l'horizontale moyenne est donnée par l'équation :

$$y_1 s = \int y ds.$$

Des équations (2) on tire :

$$yds - sdy = adx,$$

on a aussi :

$$yds + sdy = d(sy).$$

En ajoutant ces deux équations et en intégrant, on a :

$$\int yds = \frac{ax + sy}{2}.$$

L'équation en y_1 donne :

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(y + \frac{ax}{s}\right).$$

Mais on a :

$$OE = x \operatorname{tang} ObE = x \operatorname{tang} BbD = \frac{ax}{s};$$

on a donc :

$$y_1 = \frac{Bb + OE}{2}.$$

y_1 est donc l'ordonnée du milieu de la droite EB, c'est ce qu'il fallait démontrer (1).

497. Axe d'oscillation conjugué à l'axe des x. — L'ordonnée y_2 de cet axe est donné par l'équation :

$$y_2 \int ydx = \int y^2 ds.$$

Calculons les deux intégrales qui entrent dans cette équation. On a d'abord :

$$\int yds = sy_1.$$

---

(1) Le milieu de la droite EB et le centre de gravité de la chaînette ont même ordonnée, mais ne coïncident pas ; pour avoir le centre de gravité de l'arc de chaînette, il suffit de remarquer que la verticale de ce point passe par le point d'intersection des tangentes en A et en B (131) ; cette verticale coupe l'horizontale moyenne au centre de gravité cherché.

On a ensuite :

$$y^2 = a^2 + s^2$$

$$\int y^2 ds = a^2 s + \frac{s^3}{3}.$$

L'équation en y_2 donne en remplaçant ces deux intégrales par leurs valeurs :

$$y_2 y_1 = a^2 + \frac{s^3}{3}.$$

ou en remplaçant s^2 par $a^2 - y^2$:

$$y_2 y_1 = \frac{2a^2 + y^2}{3}.$$

Construisons d'abord séparément les longueurs :

$$y' = \frac{a^2}{y_1} \qquad y'' = \frac{y^2}{y_1}$$

on aura : $$y = \frac{2y' + y''}{3}.$$

Pour trouver y', portons : $b\,F' = y_1$, $H'\,b = b\,H = a$; menons $H'K$ perpendiculairement à $F'H$; on a :

$$y' = b\,K.$$

En effet, si on menait HK' perpendiculairement à HF', on aurait dans le triangle rectangle $K'HF'$:

$$\overline{b\,H}^2 = \overline{b\,K'} \times \overline{b\,F'}$$

ou $$a^2 = \overline{b\,K'} \times y_1$$

d'où $$\overline{b\,K'} = y'.$$

Or on démontre aisément que $\overline{b\,K'} = \overline{b\,K}$; donc on a aussi $y' = b\,K$: ce qu'il fallait démontrer (1).

---

(1) On peut aussi considérer cette construction comme une division graphique ; si on prend $a = 1$, on a $y'' = \frac{1}{y_1}$; on considère $b\,H' = 1$ comme produit, y'' comme le facteur $b\,K$ porté en abscisse, y_1 comme le facteur connu que détermine l'inclinaison de l'intégrale $K\,H'$. La droite $H\,F'$ donne, après une rotation de 90° l'inclinaison de cette intégrale.

On trouve de la même manière :

$$y'' = \frac{y^2}{y_1} = b\,\mathrm{L}.$$

Divisons la droite K L en trois parties égales ; l'ordonnée du point de division le plus rapproché de l'axe des x est :

$$y = \frac{2y' + y''}{3}$$

c'est l'ordonnée y_2. Cette construction a l'inconvénient d'exiger un grand espace, c'est ainsi que nous n'avons pu représenter le point L ; elle donne en outre un axe très rapproché de l'horizontale moyenne.

495. Inclinaison moyenne. — Les cosinus de l'angle que forme la direction moyenne avec l'axe des x et que nous avons désigné par α est donné par l'équation :

$$s\,\alpha^2 = \int \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 ds.$$

Des équations (2), on tire :

$$\frac{dx}{ds} = \frac{a}{y}, \quad ds = \frac{y\,dy}{s}$$

d'où

$$\int \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 ds = \int \frac{a^2}{y^2}\,\frac{y\,dy}{s}.$$

Remplaçons s par $\sqrt{y^2 - a^2}$, on trouve :

$$\int \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 ds = a \text{ arc cos } \frac{a}{y}.$$

Or, l'angle φ = DbB a pour cosinus $a : y$; on a donc :

$$\int \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 ds = a\varphi = \text{arc DF}.$$

La valeur de α^2 est donc donnée par l'équation :

$$s\,\alpha^2 = \text{arc DF}.$$

Portons AM = s, AP = arc DF ; menons PN perpendiculairement à AM jusqu'à la demi-circonférence décrite sur AM comme diamètre ; AN est la direction moyenne.

En effet, soit A l'angle PAN, on a :

$$AM \cos A = AN,$$

$$AN \cos A = AP;$$

en multipliant ces deux équations, on trouve :

$$AM \cos^2 A = AP,$$

d'où $$\cos^2 A = \frac{AP}{AM} = \frac{\text{arc } DF}{s} = \alpha^2;$$

on a donc $$\alpha = \cos A;$$

ce qu'il fallait démontrer.

§ 7. Comparaison des diverses formes de voûtes.

499. Classification des formes de voûtes. — Menons des courbes de centres de pression tangentes à l'arc moyen ; nous dirons que la forme de la voûte est du premier ou second genre selon que les courbes de pression tangentes passent au-dessus ou au-dessous de l'arc moyen ; la forme d'équilibre est la forme de passage du premier au second genre : c'est la forme pour laquelle les courbes de pression tangentes coïncident avec l'arc moyen. Cette classification est identique à celle que nous avons admise (374) pour les courbes d'intrados et d'extrados. Lorsque les épaisseurs de la voûte du sommet aux naissances ne diffèrent pas considérablement, l'arc moyen, la courbe d'intrados et la courbe d'extrados sont du même genre ; mais si l'épaisseur aux naissances est beaucoup plus forte qu'à la clef, il peut se faire que la courbe d'intrados soit du premier genre, la courbe d'extrados du second, et l'arc moyen de l'un ou de l'autre genre.

500. Théorème. — *Le pivot des courbes de pression possibles sans joint de rupture se trouve au-dessous de l'arc moyen*

dans les voûtes du premier genre; il se trouve au-dessus dans les voûtes du second genre; il s'éloigne d'autant plus de l'arc moyen que la forme de la voûte diffère d'une forme d'équilibre.

Pour fixer les idées, supposons que l'arc moyen soit du premier genre; traçons l'horizontale moyenne; au point où elle coupe l'arc moyen, menons une courbe de pression tangente à cet arc. Pour cette courbe de pression, on aura évidemment $c' < 0$; l'excentricité moyenne c_1 est négative; il faut donc abaisser la ligne de pression (441) pour qu'elle satisfasse à la condition angulaire. Le pivot des courbes de pression qui satisfont à cette condition se trouve à l'intersection de l'horizontale moyenne et de la courbe de pression que l'on obtient après l'abaissement; ce pivot se trouve donc sous l'arc moyen. L'excentricité moyenne est d'autant plus grande en valeur absolue que la courbe de pression tangente s'éloigne de l'arc moyen; or, plus l'abaissement c_1 est grand plus le pivot s'éloignera de l'arc moyen; cela démontre la dernière partie du théorème.

Corollaire 1. — Considérons une voûte du premier genre; réduisons toutes les épaisseurs de la voûte indéfiniment, mais dans le même rapport; supposons que la charge ne change pas; le pivot I des courbes de pression possibles sans joint de rupture reste fixe, mais l'intrados se rapprochera de plus en plus de ce pivot et il arrivera un moment où le pivot se trouvera sous la voûte. Dans ce cas, toutes les courbes de pression qui passent par ce point sont instables. Considérons une poussée minima, c'est-à-dire une poussée qui engendre une courbe de pression tangente à l'intrados; conservons le même centre de poussée; il faudra diminuer cette poussée pour obtenir une courbe de pression passant par le point I; donc l'hyperbole principale représente des poussées plus petites que les poussées minima. Si l'intrados passe par le point I, l'hyperbole principale et la conjuguée de l'intrados se touchent en un point; si l'épaisseur augmente encore, la conjuguée coupe l'hyperbole principale en deux points qui peuvent s'éloigner de plus.

Corollaire 2. — Considérons une voûte du second genre

et faisons varier les épaisseurs dans les mêmes conditions Pour une épaisseur suffisamment petite, les poussées représentées par l'hyperbole principale sont plus grandes que les poussées maxima. Si l'épaisseur augmente, les poussées maxima augmentent et dépassent sur une étendue plus ou moins grande les poussées représentées par l'hyperbole principale.

501. Comment il faut comparer les voûtes. — Pour qu'une voûte soit établie dans de bonnes conditions, il faut qu'il ne se produise pas de joint de rupture; nous avons montré précédemment comment on détermine la limite supérieure n_1 des valeurs de n pour les courbes de pression sans joint de rupture; il faut donc chercher à réaliser la condition:

$$n < n_1.$$

Le coefficient n mesure le degré de compressibilité de la maçonnerie, il dépend du mode de construction; le coefficient n_1 dépend, au contraire, de la forme et des dimensions de la voûte. Pour satisfaire à la condition précédente et pour s'éloigner le plus possible de $n = n_1$, il faut réduire n et augmenter n_1. Nous pouvons donc dire que pour établir une voûte dans de bonnes conditions, *l'ingénieur doit augmenter* n_1, *le constructeur doit diminuer* n. Nous nous occuperons plus loin de la construction; pour le moment, nous voyons qu'il faut comparer les formes des voûtes par le coefficient n.

502. Forme d'équilibre. — Nous avons vu (fig. 200) qu'elle était la forme de l'aire des solutions stables $\alpha\beta\gamma\delta$ et la position $\gamma\beta$ de l'hyperbole principale. La poussée qui réalise la courbe de pression centrale (modifiée d'une quantité très petite p'') a son extrémité sur l'hyperbole principale; cette extrémité se trouve à peu près au centre de l'aire des solutions stables; elle se rapporte à la valeur $n = 0$. L'arc d'hyperbole, qui représente les solutions qui se produisent quand n augmente, se dirige du point central vers le sommet β. Lorsque l'arc d'hyperbole coupe le côté $\beta\delta$, l'arc utile a la plus grande étendue qu'il puisse avoir pour une épaisseur

donnée à ab. Si l'hyperbole principale était coupée par la courbe des poussées minima en dessous du point b, on pourrait toujours augmenter l'arc utile de l'hyperbole principale en augmentant légèrement l'épaisseur aux naissances.

Supposons que l'on réduise indéfiniment les épaisseurs de la voûte, tout en lui donnant, dans chaque cas, une forme d'équilibre ; l'étendue de l'arc utile diminue, l'angle bDA, le segment intercepté par cet angle sur l'axe des n diminuent également. La projection verticale de ce segment varie à peu près dans le même rapport que l'épaisseur e de la voûte ; nous l'exprimerons par $k\,e$, d'autre part, la projection verticale d'un segment de l'échelle des n est $\alpha^2\eta$; le segment qui correspond à $n = n_1$ a pour projection verticale :

$$\alpha^2 r_1 \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha^2 n_1 r^2}{y_1}.$$

En égalant les deux valeurs de cette projection, on obtient :

$$k\,e = \frac{\alpha^2 n_1 r^2}{y_1}.$$

Or le rayon de gyration est proportionnel à l'épaisseur e ; on a donc $r = k'\,e$; on tire de l'équation précédente que le produit $n_1 r$ est constant ; on a donc :

$$n_1 = \frac{\mathrm{K}}{e}.$$

Il résulte de là que le coefficient n_1 croît jusqu'à l'infini, lorsque l'épaisseur diminue jusqu'à zéro ; on pourrait donc, d'après cela, en adoptant une forme d'équilibre et en diminuant l'épaisseur de la voûte, obtenir une valeur de n_1 aussi grande que l'on voudrait et rendre les joints de rupture impossibles même avec un mortier très compressible. Ce résultat n'est pas absolument exact ; nous avons en effet supposé une résistance illimitée ; pour rentrer dans la réalité, il faut attribuer à la maçonnerie un coefficient de rupture déterminé. On trouve alors que l'aire des solutions stables s'annule, pour une épaisseur suffisamment petite ; au moment où l'aire se réduit en un point unique, on reconnaît

aisément que l'on a $n_1 = 0$. Si on fait croître l'épaisseur, n_1 croît ; mais quand l'épaisseur devient grande, l'aire des solutions stables diffère assez peu de celle qui correspond à une résistance illimitée, donc n_1 doit décroître ; il résulte de là qu'il y a une épaisseur qui fait passer n_1 par un maximum ; c'est cette épaisseur qu'il faut adopter. On peut la déterminer par tâtonnements.

503. Autres formes. — Supposons d'abord une résistance illimitée ; nous savons que pour une certaine épaisseur, l'aire des solutions stables se réduit en un point ; nous connaissons la situation de la courbe de pression unique qui soit stable dans ce cas ; il semble que l'on a à peu près $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, car la courbe de pression se trouve au-dessus de l'arc moyen et en-dessous sur des étendues à peu près équivalentes ; cette solution unique correspond donc à peu près à la valeur $n_1 = 0$. En faisant croître l'épaisseur, on obtiendra un arc utile de plus en plus grand ; mais comme l'axe des n croît comme le carré de l'épaisseur, il arrivera un moment où la valeur de n_1 cessera de croître pour commencer à décroître ; en d'autres termes, n_1 passe par un maximum. Pour la forme d'équilibre, nous avons trouvé que n_1 pouvait croître jusqu'à l'infini ; pour une forme qui en diffère peu, nous trouverons une valeur maxima de n_1 qui sera très grande ; pour des formes qui diffèrent de plus en plus de la forme d'équilibre, nous obtiendrons une valeur maxima de n_1 de plus en plus petite. Si on reprend ce calcul en attribuant à la maçonnerie un coefficient de résistance déterminé, on réduira toutes ces valeurs de n_1 à peu près dans les mêmes proportions ; le résultat de la discussion précédente subsiste encore. *On peut donc dire qu'une voûte peut être construite avec un mortier d'autant plus compressible sans qu'il se produise de joints de rupture, que la forme de la voûte s'approche davantage d'une forme d'équilibre.*

504. Conclusions. — La forme d'une voûte la plus rationnelle est la forme d'équilibre ; c'est une chaînette, si la surcharge est nulle ; c'est une courbe plus compliquée s'il y a surcharge ; mais, en général, la courbure doit dimi-

nuer du sommet vers les naissances. La voûte en arc surbaissé diffère peu de la forme d'équilibre, la voûte en plein cintre en diffère notamment; la voûte en anse de panier s'en écarte davantage encore. Si pour des motifs étrangers à la stabilité, il est nécessaire de donner à l'intrados d'une voûte la forme d'un plein cintre ou d'une anse de panier, il faut augmenter l'épaisseur vers les naissances; de cette manière on relève l'arc moyen, on abaisse la ligne de pression; on se rapproche de la forme d'équilibre.

§ 8. Procédés de construction.

505. Époque du décintrement. — Rappelons que l'une des premières règles admises dans la construction des voûtes est qu'il faut les décintrer avant que le mortier ait fait prise. Cette règle se justifie par une propriété bien connue du mortier; c'est la propriété qu'il a de ne présenter une résistance sérieuse à l'écrasement que lorsqu'il a durci sous pression. Il ne faut cependant pas décintrer trop tôt; sinon le mortier est très fluide, il est chassé par des joints et ne produit pas son effet. D'autre part, la compressibilité de la maçonnerie devient considérable; le coefficient n augmente; des joints de rupture se produisent. Il y a donc une époque précise où le décintrement peut se faire dans les meilleures conditions; on peut la déterminer de la manière suivante. Nous avons vu que pour tracer la courbe de pression qui se produira, il faut connaître le coefficient n; que l'on construise des blocs de maçonneries quelques jours avant d'exécuter la voûte; on déterminera par expérience le coefficient n; en même temps, on verra comment le mortier se comporte sous la charge et après combien de temps il s'écrase comme un corps solide. Le décintrement doit s'effectuer avant que la maçonnerie de la voûte ne soit dans cet état.

506. Mode d'exécution de la maçonnerie. — Nous avons déjà dit qu'il faut construire une voûte de manière à réduire le coefficient n autant que possible. Il faut pour cela dimi-

nuer la compressibilité de la maçonnerie. On prescrira donc aux ouvriers d'exécuter une maçonnerie serrée, de réduire l'épaisseur des joints de mortier à leur *minimum*, d'exercer perpendiculairement à ces joints une pression aussi considérable que possible.

507. Déformations. — Il est souvent indispensable de réaliser avec exactitude une courbe d'intrados déterminée; il faut pour cela calculer les déformations que la voûte subit après le décintrement et donner aux cintres une surélévation égale à ces déformations. Connaissant le coefficient n, on peut calculer l'abaissement de différents points de l'intrados au moyen de formules faciles à établir; les intégrales qu'elles contiennent, s'obtiennent graphiquement par des tracés analogues à ceux du § 3 de ce chapitre; on peut simplifier les opérations en utilisant les intégrales déjà calculées pour déterminer la courbe de pression.

508. Flexion des cintres. — Les courbes fléchissent sous le poids des voussoirs; on peut tenir compte de cette nouvelle déformation par un surhaussement des cintres; mais cela ne suffit pas. Il faut éviter que cette flexion ne se produise pendant la construction de la voûte, sinon il se produit des joints de rupture avant même que l'on procède au décintrement. Pour éviter ces effets, il faut charger les cintres avant d'exécuter la voûte. Dans les voûtes en briques, on construit la voûte par rouleaux; les premiers rouleaux forment voûte et soutiennent les autres; la flexion des cintres est peu considérable.

509. Rotules en trois points. — Nous avons fait remarquer qu'il faut donner trois conditions pour déterminer une ligne de résultantes auxiliaires (135); la ligne des pressions d'une voûte sera déterminée si on lui crée trois points de passage obligés; on y arrive en établissant trois rotules, une à la clef, deux aux naissances ou en deux points convenablement choisis. La ligne de pression s'obtient alors par le tracé graphique du numéro; le calcul des dimensions d'une voûte symétrique ou non devient une opération simple et facile.

Ce moyen a été proposé par M. Dupuit depuis assez longtemps; mais nous ne pensons pas qu'il ait jamais été employé. Les ingénieurs manifestent généralement une certaine répugnance à l'égard de l'idée d'introduire des rotules dans une voûte et peut-être cette répugnance instinctive a-t-elle sa raison d'être. Sans doute le décintrement d'une voûte ordinaire est une opération délicate, mais quand cette opération est faite dans de bonnes conditions, le mortier durcit et la voûte devient un monolithe. On préfère cet état à celui d'un assemblage d'arcs en maçonneries articulés les uns aux autres et vibrant facilement sous les charges.

Dupuit croyait à l'impossibilité d'établir une théorie des voûtes; en proposant l'emploi de rotules, il tournait la difficulté; mais elle reparaît dans le calcul des déformations. Les rotules ont pour effet d'augmenter les déformations; il faut les calculer, si on veut réaliser un intrados déterminé et les calculs des déformations supposent une théorie complète des voûtes.

510. Mortier de ciment. — On attribue au mortier de ciment la propriété de résister à des pressions assez considérables, alors même qu'il n'a pas durci sous pression. S'il en est ainsi, on peut décintrer une voûte construite avec du ciment, après le durcissement du mortier. Dans ce cas, la voûte se comporte comme un monolithe, la courbe de pression qui se produit est celle qui correspond à $n = 1$. Les déformations pendant et après le décintrement sont excessivement petites; il ne se produit que des déformations élastiques que l'on peut négliger dans la détermination des dimensions des cintres.

511. Voussoirs-verrins. — Il n'est pas démontré que le ciment possède réellement les propriétés qu'on lui attribue; si même ces propriétés existent pour certains ciments, il n'est pas toujours possible d'avoir du ciment de cette qualité. Nous proposons le moyen suivant pour provoquer l'existence d'une courbe de pression déterminée dans une voûte construite avec du mortier ordinaire.

Établissons provisoirement comme clefs, des voussoirs-verrins, c'est-à-dire des appareils formés chacun de deux plaques de fonte séparées par un verrin. Un levier agit sur ce verrin. On peut réaliser une poussée de grandeur déterminée en faisant agir, sur ce levier, un poids que le calcul indique. Lorsque tous les tassements sont produits, remplaçons successivement chaque appareil par une clef en pierre bien dressée que l'on chassera de manière à changer le moins possible la courbe de pression.

Il est d'abord évident que par ce procédé le mortier durcit sous pression et qu'on peut décintrer après le durcissement; mais nous croyons que ce procédé de construction aurait bien d'autres avantages.

Supposons d'abord la poussée nulle; le poids des voussoirs repose sur le cintre et le fait fléchir; vers les reins seulement une composante du poids des voussoirs produit une courbe de pression. Dès que la poussée se produit, il faut nécessairement que la pression des voussoirs sur le cintre diminue; sinon il se produirait une courbe de pression qui coïnciderait avec la ligne d'action de la poussée, cette courbe de pression est instable, elle provoque une charnière à l'extrados. Il faut donc admettre que la poussée va produire des compressions des joints vers l'extrados et que la voûte va se relever au-dessus des cintres; si la poussée est suffisamment grande, le cintre reprendra sa forme primitive; le décintrement est alors un fait accompli puisque la voûte ne repose plus sur le cintre. On pourra donc ainsi réaliser mathématiquement une courbe d'intrados ayant la forme du cintre avant la flexion. En choisissant convenablement la poussée que l'on produit, on pourra réaliser la courbe de pression la plus favorable à la résistance. Si la voûte a une forme d'équilibre, on réalisera la courbe de pression centrale. Dans tout autre cas, on réalisera la courbe de pression qui s'éloigne le moins de l'arc moyen: c'est la courbe qui correspond à $n = 0$ puisque pour cette courbe on a $c_1 = 0$, $c_2 = 0$.

§ 9. Influence des glissements.

Nous avons, pour simplifier l'exposition de notre théorie, négligé l'influence des glissements ; nous allons montrer comment on peut en tenir compte.

512. Hypothèse. — Soient $ds = ab$ (fig. 188) la longueur d'un prisme de section ω, K l'effort tranchant ; le glissement produit un déplacement aa'' du point a par rapport à la section b ; dans le cas d'un prisme homogène, cette déformation élémentaire $\gamma\, ds$ est donnée par la formule :

$$\gamma\, ds = \frac{K\, ds}{G\,\omega}$$

on a :

$$G = \frac{2}{5} E.$$

Nous admettons, pour la maçonnerie, la même formule ; mais nous remplacerons G par un coefficient G' qui tienne compte de la présence des joints du mortier ; nous poserons :

$$\gamma\, ds = \frac{K\, ds}{G'\,\omega} \qquad (46)$$

$$E' = (1 + m)\, G' \qquad (47)$$

Le rapport $1 + m$ doit se déterminer par l'expérience ; il serait 5 : 2 dans un monolithe ; il est assez probable que les coefficients E' et G' augmentent à peu près dans le même rapport quand la fluidité du mortier devient plus grande, le coefficient m serait alors constant ; dans tous les cas, nous prévoirons le cas où le coefficient m varierait.

513. Condition angulaire. — Les glissements ne produisent pas de mouvement angulaire des sections ; la condition $\Delta\varphi = 0$ conserve donc la même forme ; et toutes les conséquences que nous avons déduites de cette équation dans le § 2 de ce chapitre subsistent sans aucune modification.

514. Condition linéaire. — La condition linéaire est $\Delta l = 0$; nous avons obtenu l'équation (5) en calculant les termes $\Delta' l$ et $\Delta'' l$ dus respectivement à la compression et à

la flexion; nous devons y ajouter un nouveau terme $\Delta'''l$ qui exprime l'allongement par glissement. Soit ds un élément de l'arc moyen; le glissement augmente la projection horizontale de cet élément d'une quantité égale à la projection horizontale du déplacement γds; on a donc :

$$\Delta'''l = \int \gamma\, ds\, \frac{dy}{ds}.$$

C'est ce terme qu'il faut ajouter à l'équation (5).

En transformant l'équation (5), nous avons obtenu successivement la condition linéaire sous la forme des équations (12), (36), (39), (40), (41), (42). Il est inutile de reproduire le calcul des termes $\Delta'l$ et $\Delta''l$ qui ne sont pas changés; il suffit de suivre, dans toutes ses transformations, le nouveau terme dû aux glissements.

L'effort tranchant K a pour valeur :

$$K = -q\frac{dy}{ds} + P\frac{dx}{ds}.$$

L'équation (46) devient en remplaçant K par sa valeur, en tirant G' de l'équation (47) et E' de la relation $E'' = nE'$:

$$\gamma\, ds = \frac{(1+m)\,n}{E''\omega}\left(-q\frac{dy}{ds} + P\frac{dx}{ds}\right) ds.$$

La valeur de $\Delta'''l$ devient :

$$E''\,\Delta'''l = (1+m)\,n\left[-q\int\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\frac{ds}{\omega} + \int P\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}\frac{ds}{\omega}\right].$$

C'est le terme qu'il faut ajouter à l'équation (12).

Nous avons (457) déduit l'équation (36) de l'équation (12) en remplaçant les intégrales que cette dernière contient par leurs valeurs et en divisant par le terme :

$$y_1\int\frac{ds}{I}.$$

Faisons subir au terme des glissements la même transformation, remplaçons les intégrales qu'il contient par leurs

valeurs tirées des équations (30) et (33); remplaçons l'intégrale qui reste par sa valeur tirée de l'équation (34); introduisons η; divisons par le même facteur; on obtient :

$$E'' \Delta''' l : y_1 \int \frac{ds}{I} = (1 + m)(q_1 - q)\beta^2 \eta.$$

C'est le terme qu'il faut ajouter à l'équation (36) qui devient :

$$\left.\begin{array}{ll} & -\eta [q \times (q - q_1) m \beta^2] - q(y_2 - c) + \mu_2 \\ \text{ou} & q[y_2 - c + \eta(1 + m\beta^2)] = \mu_2 - q_1 m \beta^2 \eta. \end{array}\right\} \quad (36^{bis})$$

Toutes les propriétés que nous avons déduites de l'équation (36) se déduisent de la même manière, de l'équation (36^{bis}); les coefficients de η sont seuls changés et il en résulte la modification suivante : l'axe de pivotement ou l'asymptote de l'hyperbole spéciale a pour équation :

$$y = y_2 + \eta(1 + m\beta^2). \quad (37^{bis})$$

Cette équation remplace l'équation (37).

Nous avons (459) mis l'équation (36) sous la forme (39); en modifiant convenablement le terme en η, on trouve :

$$\left.\begin{array}{ll} & -\eta [q + (q - q_1) m \beta^2] + q c_2 = 0 \\ \text{d'où} & c_2 = \eta \left[1 + \dfrac{q - q_1}{q} m \beta^2 \right]. \end{array}\right\} \quad (39^{bis})$$

Traçons une ligne de pression quelconque; l'équation (39^{bis}) n'est pas satisfaite. Pour satisfaire à la condition linéaire, il suffit de relever la ligne des pressions d'une hauteur h donnée par l'équation (40) qui devient :

$$h = c_2 - \eta \left[1 + \frac{q - q_1}{q} m \beta^2 \right] \quad (40^{bis})$$

Supposons que l'on ait tracé la première ligne de pression avec la poussée moyenne; on a $q = q_1$; cette valeur de h devient indépendante de m; on retrouve

$$h = c_2 - \eta \quad (42)$$

Il résulte de là que la ligne de pression tracée avec la poussée moyenne relevée de la hauteur h satisfait à la condition linéaire quel que soit m.

515. Pivot spécial à $n = 0$. — Traçons une ligne de pression avec la poussée moyenne; pour $n = 0$, on trouve $\eta = 0$; on a donc $h = c_2$; soit AB (fig. 204) une corde de la ligne de pression relevée de $h = c_2$. Pour cette position AB la condition linéaire est satisfaite; elle restera satisfaite, si on fait tourner cette corde autour de son pivot spécial; ce pivot se trouve sur la droite représentée par l'équation (37bis) et qui devient, pour $\eta = 0$, l'axe d'oscillation $y = y_2$. Soit XY cet axe: il coupe la corde AB au point O qui est le pivot cherché. Or les deux droites XY et AB sont indépendantes du coefficient m; le pivot O convient donc pour toutes les valeurs de m. Si en particulier, on choisit $m = -1$, on reconnaît que le terme des glissements s'annule: ce point O est donc aussi l'origine de l'axe des n que nous avons trouvé, en négligeant les glissements; il est facile de vérifier par la construction qu'il en est réellement ainsi.

516. Pivot spécial à n et à m. — Traçons encore une ligne de pression avec la poussée moyenne; il faut la relever de $h = c_2 - \eta$. Soit (fig. 204) AB une corde après un relèvement égal à c_2; descendons cette corde de OD $= \eta$; nous obtiendrons la position A'B' de la corde lorsque la condition linéaire est satisfaite. Nous obtiendrons le pivot de cette corde en traçant la droite représentée par l'équation (37bis); pour y arriver portons DE $= m\eta$; on en déduit DF $= m\beta^2\eta$; l'horizontal du point F est l'axe de pivotement; le point N où cet axe coupe la corde A'B' est le pivot de la corde A'B' pour les valeurs n et m.

517. Axe des n pour m constant. — Le pivot spécial d'une corde dépend des variables n et m; supposons d'abord m constant et faisons varier n. Nous savons par l'équation 35 que η varie proportionnellement à n; si n varie, la figure ODFN varie dans le même rapport; le théorème du n° 475 est donc encore vrai quand on tient compte des glissements, pourvu que m soit constant.

Portons sur la verticale OD, les valeurs de $n = 0, 1, 2...$; menons toutes les positions correspondantes de la corde A'B';

on obtiendra sur ON une échelle à divisions égales; c'est l'axe des n; les points de divisions sont les pivots spéciaux pour les valeurs correspondantes de n.

518. Tableau graphique de toutes les solutions pour m constant. — Tout ce que nous avons dit dans le § 4 de ce chapitre est encore applicable ici. Pour obtenir les solutions sans joint de rupture (476), on joint le pivot principal d'une corde aux divisions de l'axe des n, on obtient les faisceaux des cordes possibles, les centres de poussées et les poussées pour toutes les valeurs de n. L'axe des n dépend de l'axe des x; si on déplace l'axe des x, l'axe des n se déplace en restant semblable et semblablement placé par rapport au pivot principal (477). S'il y a une rotule ou un joint de rupture fixe, le pivot principal d'une corde se trouve sur l'horizontale de la charnière, l'axe des n est conjugué à cette horizontale (480, 482, 483). Si le joint de rupture se déplace quand n varie, les pivots spéciaux décrivent une courbe qui sert de courbe de rebroussement (484).

519. Axe des m pour n constant. — Nous avons obtenu le point N, en portant $DF = m\beta^2\eta$; si m varie, DF varie dans le même rapport et il en est de même de DN. Le point D est la position du pivot pour $m = 0$; pour $m = -1$, on doit retrouver le pivot que nous avons obtenu en négligeant les glissements; on trouve en effet $DF = -\beta^2\eta$, on doit porter cette valeur en DH, on a $OH = \eta - \beta^2\eta = \alpha^2\eta$; on retrouve la construction du numéro 475. On peut énoncer le théorème suivant: Si le coefficient m varie, et si n reste constant, le pivot d'une corde décrit sur une droite des segments proportionnels aux variations du coefficient m. En traçant les différentes positions du point N, on obtiendra un axe des coefficients m; D correspond à $m = 0$, K à $m = -1$. En prenant le point K comme origine, on obtiendrait un axe des valeurs de $1 + m$ ou du rapport $E' : G'$. L'axe des m a la direction de la corde qui correspond à la poussée moyenne; les autres directions des cordes possibles ne font pas un très grand angle avec cet axe; le glissement n'exerce donc pas

m et de n qui se trouveraient au-delà de la deuxième corde limite, il y a deux joints de rupture; c'est alors la courbe de pression déterminée par cette corde limite qui se produit.

§ 10. Méthode expéditive.

522. Objet. — Si l'on voulait établir une voûte de grandes dimensions, nous croyons qu'il serait indispensable de procéder à une étude complète de stabilité de l'ouvrage par la théorie précédente; il serait même nécessaire, pour une très grande voûte, de recourir aux moyens que nous avons recommandés, pour provoquer une courbe de pression centrale. Pour les ouvrages ordinaires, on peut se borner à suivre les enseignements de la pratique; on calcule l'épaisseur à la clef par une formule empirique; on vérifie si les dimensions des reins et des culées sont suffisantes par une méthode expéditive que nous allons rappeler en lui donnant une forme et une justification nouvelles.

523. Épaisseurs à la clef. — Soit A l'ouverture, e l'épaisseur à la clef d'une voûte; on peut adopter les formules suivantes :

formule de Léveillé $\quad e = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{10}\,\mathrm{A}\right)$

formules de Dupuit $\quad e = 0{,}20\,\sqrt{\mathrm{A}}$ (voûtes complètes)

$\quad e = 0{,}15\,\sqrt{\mathrm{A}}$ (voûtes en arc).

On construirait facilement des échelles donnant les valeurs de e pour toutes les ouvertures.

524. Voûtes du premier genre. — *Règle.* Prenons un centre de poussée au sommet de l'extrados; déterminons la poussée minima par l'une des méthodes du numéro 367; on obtient une courbe de pression qui touche l'intrados. Prolongeons cette courbe de pression jusqu'à la base du pied-droit; on doit donner aux reins de la voûte et au pied-droit assez d'épaisseur pour que cette courbe soit stable; il

convient, par exemple, qu'elle ne dépasse plus la ligne moyenne en dessous du joint de rupture.

Justification. — La courbe de pression que nous venons de tracer a deux joints de rupture; on reconnaît aisément que c'est celle qui se produira si le mortier est très compressible. Nous n'affirmons pas qu'elle se produira réellement; au contraire, il faut éviter qu'elle ne se produise; mais nous allons démontrer que par cette fausse position, on obtient un critérium absolu de la stabilité statique.

Supposons d'abord que la courbe de pression ainsi tracée passe précisément par l'arête extérieure de la base d'appui; il est facile de voir qu'on se trouve alors dans le cas où l'aire des solutions stables se réduit à un seul point (390); la courbe de pression tracée est la seule qui puisse se produire; la valeur de n n'exerce d'influence que sur les angles dont s'ouvrent les joints de rupture. La voûte est cependant en équilibre; mais il est facile de voir que cet équilibre est sur le point de se rompre; qu'une charnière subisse un petit écrasement, il n'y a plus de courbe stable possible, la voûte s'effondre; qu'une charge aussi petite qu'elle soit agisse entre la clef et le joint de rupture intermédiaire, la courbe de pression s'éloigne davantage de la forme de la voûte, la solution stable disparaît, la voûte s'effondre encore (1); que l'on diminue les dimensions des reins et des pieds-droits, la voûte devient encore instable.

Supposons, au contraire, que la courbe de pression que nous considérons passe à l'intérieur de la base d'appui, il est facile de voir qu'il y a alors une aire des solutions stables d'autant plus grande que la courbe des pressions est plus éloignée de l'arête extérieure de la base. En augmentant la poussée sans toucher au centre de poussée jusqu'à ce que

(1) Si on chargeait la voûte entre le joint de rupture intermédiaire et la naissance, la courbe de pression prendrait une forme nouvelle plus rapprochée de celle de la voûte; l'aire des solutions stables augmenterait et la voûte serait stable.

la courbe de pression passe par cette arête extérieure, on obtiendrait le côté horizontal de l'aire des solutions stables; en faisant pivoter la courbe de pression autour de cette arête, on obtiendrait l'hyperbole des poussées maxima; si l'une de ces courbes de pression touchait l'intrados, elle donnerait le sommet inférieur de l'aire qui aurait alors une forme triangulaire. Il n'est pas nécessaire de déterminer cette aire; son existence est démontrée, cela suffit pour pouvoir affirmer qu'il y a des solutions stables; on peut même espérer qu'en diminuant n, on parviendra à produire une solution sans joint de rupture; mais, pour s'en convaincre, il faudrait appliquer la théorie que nous avons exposée précédemment (1).

525. Règle applicable à toutes les voûtes. — La règle précédente ne peut s'appliquer qu'aux voûtes du premier genre; pour la rendre applicable à toutes les voûtes, il suffit de la modifier de la manière suivante : menons une courbe de pression qui touche l'extrados et l'intrados; la charnière à l'extrados étant au-dessus de la charnière à l'intrados, on obtiendra la poussée qui produit cette courbe, en déterminant l'intersection de la courbe des poussées minima, soit avec la courbe des poussées maxima, soit avec l'horizontale du sommet de l'extrados; on modifie, s'il y a lieu, les dimensions de la voûte pour qu'à la clef la courbe de pression reste à une assez grande distance de l'intrados et pour qu'à la naissance elle reste à une assez grande distance de l'extrados (2). Cette règle se justifie comme la précédente.

---

(1) Nous disons que cette règle est un critérium absolu de la stabilité statique, parce que nous supposons que la maçonnerie de la voûte soit établie convenablement, sinon il faudrait avoir égard aux considérations qui terminent le numéro 487 et appliquer la règle à la voûte déformée.

(2) On pourrait être tenté d'appliquer la méthode du coefficient de stabilité, mais on est très embarrassé pour faire le partage des forces en forces sollicitantes et en forces résistantes; selon le mode de partage on arrive à des résultats différents. Pour une même voûte, le coefficient de

526. Simplifications. — Il n'est pas nécessaire de déterminer avec une grande précision la courbe de pression limite dont il est question dans la méthode précédente; si on trace une autre courbe stable différant assez peu de cette courbe limite, on sera conduit à des dimensions un peu plus fortes; il n'y a à cela aucun inconvénient. La courbe de pression qui sert au calcul de la voûte peut donc s'obtenir d'une manière très expéditive.

On peut d'ailleurs, dans l'application, utiliser certaines remarques. Ainsi dans les voûtes du premier genre les joints de rupture se produisent à l'intrados à une hauteur à peu près égale à la demi-montée de la voûte complète. Dans une voûte en arc, dont l'angle au centre est plus petit que 30°, entre la clef et la naissance, la charnière se trouve à l'extrémité de l'intrados.

CHAPITRE VII.

Critique des diverses théories des voûtes.

§ 1. Théorie de Lamé et Clapeyron.

527. Expériences de Boistard. — On considère d'abord les voûtes comme un assemblage de coins sans frottement : cette hypothèse est contraire à la réalité; elle conduit à des résultats absurdes. En 1822, Boistard publia un recueil de résultats d'expériences sur la stabilité des voûtes; ces expériences ont démontré que la rupture des voûtes ne se produit pas par glissement, mais par la décomposition en quatre

---

stabilité est une fraction dont les deux termes ont une différence constante; cette fraction s'approche de l'unité quand les termes augmentent Si on prend la pression aux naissances comme force sollicitante, on trouve pour le pied-droit un coefficient de stabilité très considérable; il se rapproche de l'unité si on prend la poussée comme force sollicitante.

parties, dont deux subissent une rotation vers l'extérieur et deux vers l'intérieur. La théorie suivante repose sur ces expériences.

528. Théorie de Lamé et Clapeyron. — Ces auteurs exposent leur théorie de la manière suivante :

« Parmi les hypothèses sur lesquelles on a fondé la théorie de l'équilibre des voûtes, la seule admissible est celle qui la ramène à l'équilibre de quatre leviers pesants, assemblés à charnière, égaux en poids aux deux portions de la voûte comprise entre le milieu de la clef et les joints de rupture et à celles limitées par ces joints de rupture et par les bases des pieds-droits. De nombreuses observations, sur une grande quantité de voûtes dégradées, et des expériences faites directement par d'habiles constructeurs, ont prouvé que les deux derniers leviers tendent à tourner autour des arêtes extérieures de leurs bases et qu'alors les deux premiers, se touchant entre eux par l'arête extrados du milieu de la clef, touchent les autres par les arêtes intrados des joints de rupture.

» Pour trouver l'équation d'équilibre de ces leviers, il est donc nécessaire de connaître la position des joints où la rupture tend à se faire dans chaque espèce de voûtes. Or, parmi tous les joints que l'on peut concevoir sur les reins d'une voûte, le joint où la rupture tend à se faire, sera celui pour lequel le levier supérieur pressera l'extrémité mobile du levier inférieur avec une force horizontale dont le moment pris par rapport au point fixe du dit levier, sera le plus grand possible comparé au moment de la pression verticale exercée à la même extrémité mobile. »

Observations critiques. — Au point de vue pratique, nous verrons que la théorie de Lamé et Clapeyron conduit pour les voûtes du premier genre à une règle qui se ramène facilement à celle du numéro 524; mais la justification de cette théorie se prête à des objections très graves. On ne dit pas, en effet, si les charnières que l'on détermine fonctionneront réellement ou si l'on admet de propos délibéré une fausse

position des centres de pression ; on ne démontre même pas théoriquement que la règle assure la stabilité statique. La seule justification de la règle, ce sont les expériences de Boistard ; mais ces expériences n'ont pu embrasser tous les cas ; que ferait-on si on devait vérifier la stabilité d'une voûte dont on ignore le mode de rupture, telle qu'une voûte intermédiaire entre l'ogive et le plein-cintre ? Il aurait fallu, nous semble-t-il, rendre la théorie indépendante des expériences et démontrer qu'elle donnait un critérium absolu de la stabilité statique ; c'est ce que nous avons fait précédemment Malgré cela, la règle est toujours insuffisante pour les grandes constructions, attendu qu'on ne s'occupe pas des pressions.

529. Détermination du joint de rupture. — Lamé et Clapeyron déterminent assez péniblement le joint de rupture ; il s'agit de chercher le maximum du moment qui tend à renverser le pied-droit. On peut aussi raisonner comme suit : Le moment de toutes les forces qui sollicitent la demi-voûte comprend le moment du poids résistant qui est constant et le moment de la poussée ; on est donc amené à chercher le maximum de la poussée pour toutes les positions de la charnière à l'extrados. Soient q la poussée, y l'ordonnée de la charnière pour un axe des x passant par le sommet de l'extrados, μ le moment autour de la charnière de l'arc de voûte compris entre le sommet de la voûte de cette charnière ; on a $qy = \mu$, donc on doit chercher la valeur maximum de

$$\frac{\mu}{y}.$$

C'est la première règle de Lamé et Clapeyron ; ces auteurs en déduisent une autre règle qui est la suivante :

« Le point de rupture est celui pour lequel la tangente de l'intrados en ce point vient couper l'horizontale passant par le sommet de la clef, au même point que la verticale passant par le centre de gravité de la masse tendant à se détacher. »

Ce théorème est inexact ; les auteurs l'ont déduit de l'égalité

$$d\frac{\mu}{y} = 0 \qquad \text{ou} \qquad d\mu = dy.$$

Mais ils ont négligé dans l'évaluation de $d\mu$, le moment du quadrilatère infiniment petit compris entre les deux positions infiniment voisines de la charnière. Le moment du quadrilatère n'est pas du second ordre; on ne peut pas le négliger.

Il est facile de trouver d'une autre manière le théorème vrai qui doit être substitué au théorème faux de Lamé et Clapeyron. Si on compose la poussée q avec le poids P de l'arc de voûte compris entre le sommet de la voûte et le joint de rupture, on obtient la pression sur le joint de rupture. La tangente à l'intrados est aussi la tangente à la courbe des centres de pression; or, on sait (346) que la tangente à la courbe de pression est la direction d'une force R', résultante de la pression R et d'une force fictive p; on obtiendra donc R' en composant q_1, P et p; de là le théorème suivant : Le point de rupture est celui pour lequel la tangente à l'intrados, en ce point, vient couper l'horizontale passant par le sommet de la clef au même point que la résultante de la force fictive p et du poids de la masse tendant à se détacher.

§ 2. Méthode des courbes de pression.

530. Hypothèses diverses. — C'est M. Méry qui a eu le premier l'idée de tracer la courbe des centres de pression (1); il n'a pas ignoré que pour la déterminer complètement, il aurait fallu étudier les tassements qui se produisent lors du décintrement; mais jugeant cette étude impossible, il s'est borné à faire passer la courbe de pression par deux points, l'un situé au tiers supérieur du milieu de la clef, l'autre situé au tiers inférieur de l'épaisseur de la voûte dans le joint de rupture. MM. Carvallo, Yvon Villarceau,

(1) M. Méry n'a publié sa méthode qu'en 1840; dès 1833 Moseley a fait connaître l'existence de la courbe de pression; mais il a été prouvé qu'en 1829 M. Méry en avait déjà fait usage.

De Saint-Guilhem ont étudié la forme la plus rationnelle que l'on peut donner à une voûte; leurs calculs supposent l'existence d'une certaine courbe de pression; Carvallo adopte l'hypothèse de M. Méry, Yvon Villarceau et Saint-Guilhem admettent une courbe de pression centrale. Non-seulement il serait plus simple de remplacer tous ces calculs par des tâtonnements graphiques faciles à imaginer, mais il est évident que la courbe de pression que l'on admet ainsi ne se produira que dans des circonstances exceptionnelles.

531. Mémoire de M. Durand-Claye. — M. Durand-Claye s'est proposé de déterminer l'ensemble de toutes les courbes de pression stables; il a donné la solution de ce problème dans un mémoire que nous avons déjà cité. Nous avons vu précédemment tout le parti que l'on peut tirer de cette étude; mais, seul, elle n'apprend absolument rien sur la courbe de pression qui doit se produire. Que l'aire des solutions stables soit petite ou grande, qui dit que toutes ces solutions stables ne seront pas rendues impossibles par les conditions de la déformation. Il aurait fallu démontrer que quand il existe des solutions stables, c'est l'une d'elles qui se produira : c'est ce que nous avons fait dans le chapitre précédent.

§ 3. Méthodes de MM. Drouets et Scheffler.

532. Théorie de M. Scheffler. — Le premier auteur qui se soit occupé de déterminer par une théorie la courbe de pression qui doit se produire est un savant allemand, M. Scheffler. Mais, au lieu de fonder cette théorie sur un raisonnement scientifique, il s'est appuyé sur un principe philosophique mal défini, énoncé depuis longtemps par Moseley. Ce principe est le principe de la moindre résistance; il revient à admettre que toutes les fois qu'il y a indétermination dans l'état de sollicitation d'un système, le mode d'action qui se réalise est celui pour lequel la résistance que la matière doit opposer est la plus petite possible.

En appliquant ce principe à une voûte, M. Scheffler énonce la proposition suivante : la poussée qui se produit est la plus petite de toutes les poussées possibles.

Cette proposition conduit précisément au même tracé que la méthode expéditive que nous avons exposée précédemment (525); pour les voûtes du premier genre elle conduit à une règle identique au fond à celle de Lamé et Clapeyron. Au moyen de notre théorie, nous avons démontré que la courbe de pression de moindre poussée est celle qui se produit lorsque le mortier est très compressible. D'après M. Scheffler, au contraire, cette courbe se produirait toujours. Il est facile de réfuter cette opinion.

Le premier défaut de la théorie de M. Scheffler, c'est qu'elle repose sur un principe que l'on n'a pas démontré; ce n'est pas, en effet, une démonstration que de prétendre qu'en cas d'indétermination, la nature, obéissant à je ne sais quel penchant, se prononce en faveur de la moindre résistance. Il y a plus; ce principe découle d'une idée fausse, c'est qu'il puisse y avoir, dans la nature, des problèmes indéterminés. Si quelquefois les lois de l'équilibre ne suffisent pas pour résoudre une question, on dit qu'il y a indétermination statique; mais c'est une manière de s'exprimer, et l'indétermination est si peu réelle, qu'on la fait disparaître dès qu'on introduit les conditions de la formation. Il ne peut y avoir d'indétermination que pour notre ignorance; la nature n'aura jamais d'hésitation, elle n'aura jamais à obéir à une inclination secrète vers telle ou telle solution, elle est soumise à des lois fatales.

Ajoutons que l'on trouverait des milliers d'exemples où le principe de la moindre résistance est en défaut; il suffit pour s'en convaincre de l'appliquer aux problèmes bien étudiés, tels que celui des poutres à plusieurs tracés, ou celui des arcs métalliques.

533. Mémoire de M. Drouets. — M. Drouets détermine avec beaucoup de sagacité, la courbe de pression pour laquelle les pressions par unité de surface, dans les joints de plus grande fatigue, sont les plus petites possibles. « Cette

courbe de pression la plus favorable, satisfait, dit-il, au principe métaphysique de la moindre action, car c'est de tous les systèmes d'équilibre possibles, celui qui assure cet équilibre en exigeant des matériaux le moindre effort possible et en développant les forces réactrices moléculaires dans la mesure nécessaire, mais la moindre possible. »

Au fond, M. Drouets applique aussi le principe de la moindre résistance, mais au lieu de mesurer la résistance par la poussée, il la mesure par la pression par unité de surface ; toutes les objections que nous avons faites à la méthode de M. Scheffler s'appliquent à celle de M. Drouets. Nous pouvons y ajouter une objection nouvelle en faisant voir combien le principe que ces auteurs invoquent est mal défini, puisqu'ils en déduisent des conséquences diamétralement opposées ; en effet, la courbe de pression de M. Scheffler produirait des pressions infinies, celle de M. Drouets produit les pressions les plus petites possibles.

Il serait intéressant de voir par notre théorie si la courbe de moindre pression est possible et à quelle valeur de n elle correspond. Le procédé employé par M. Drouets pour trouver cette courbe est très compliqué ; on peut y substituer la méthode suivante. Divisons l'arc moyen de la clef à la naissance en deux parties à peu près égales, faisons passer une courbe de pression par les milieux de ces deux parties ; on obtiendra entre ces deux points un joint où la pression passe par un maximum ; le milieu de la clef et la naissance sont deux autres joints de plus grande fatigue. Les trois plus grandes pressions seront généralement inégales ; faisons pivoter la ligne de pression de manière à diminuer la plus grande, à augmenter la plus petite, et à conserver la moyenne ; après quelques tâtonnements, les trois plus fortes pressions deviendront les mêmes et il sera impossible de diminuer l'une d'entre elles sans augmenter l'une des deux autres, on obtiendra la courbe de moindre pression. Cette courbe de pression est une de celles qui s'éloignent le moins de l'arc moyen, elle est en partie au-dessus, partie en-dessous. Mais si nous voulons trouver la courbe de pression qui correspond

à $n = 0$, nous devons satisfaire aux deux équations : $c_1 = 0$ et $c_2 = 0$; nous obtiendrons aussi une courbe qui doit se trouver partie au-dessus, partie en-dessous de l'arc moyen; en général donc la courbe qui correspond à $n = 0$ différera assez peu de la courbe de moindre pression. Mais sauf des cas exceptionnels, la courbe de moindre pression ne satisfera pas à la condition angulaire et ne pourra se produire dans aucun cas. Lorsque la voûte a une forme d'équilibre, la courbe centrale est celle qui correspond à $n = 0$ (1); si l'on suppose que l'épaisseur de la voûte croît proportionnellement à la pression totale, cette courbe centrale est aussi la courbe de moindre pression; si les épaisseurs ne croissent pas suivant cette loi, elles en diffèrent mais très peu.

§ 4. Théorie de M. Dupuit.

La méthode de M. Dupuit peut se résumer dans les deux propositions suivantes que nous réfuterons successivement.

534. Proposition I. — *Dans toute voûte il se produit une charnière à l'intrados.* Pour démontrer cette proposition, M. Dupuit étudie les phénomènes qui se passent lors du décintrement. Quand la voûte repose sur le cintre, la poussée est nulle; dans les premiers moments du décintrement, la partie supérieure de chaque demi-voûte tombe en obéissant aux lois de la pesanteur (2); la partie inférieure

(1) Nous sommes ici en contradiction avec M. Drouets qui démontre par l'analyse qu'il est impossible de trouver une forme d'équilibre. La démonstration de M. Drouets est inexacte; il suppose la courbe de pression identique avec la ligne de pression et la prétendue impossibilité est précisément la condition qui exprime l'identité de ces deux courbes. M. Drouets trouve que le centre de gravité du joint devrait se trouver au milieu du joint dans une forme d'équilibre et il considère cette hypothèse comme impossible; or, cette hypothèse est précisément celle qu'il a faite.

(2) Il serait intéressant d'étudier les mouvements que prendrait une demi-voûte, si on décintrait brusquement; nous avons trouvé les propo-

prend appui sur la naissance et reste immobile; l'arête qui sépare ces deux parties sert de charnière à la partie mobile. La présence des deux demi-voûtes symétriques empêche ce mouvement de s'accentuer, il se produit une poussée et cette poussée croît jusqu'au moment où elle engendre une courbe de pression statique tangente à l'intrados et alors l'équilibre est établi. « Si le décintrement s'est opéré lentement, dit M. Dupuit, il est évident que tout mouvement a dû cesser en ce moment et que la courbe n'a pu s'avancer dans l'intérieur; que si le décintrement s'est opéré brusquement, la poussée a pu dépasser cette limite sous l'influence de la vitesse acquise par la voûte, mais réagissant contre la voûte, elle a dû diminuer d'intensité, et, après quelques oscillations, s'arrêter à la force qui suffit pour l'équilibre. »

535. Proposition II. — *Le centre de poussée se trouve au-dessus du milieu du joint et au-dessous du tiers supérieur.*

Si la poussée n'existait pas, le joint situé au milieu de la clef se déplacerait et il est facile de reconnaître que les déplacements normaux au joint suivent la loi du trapèze; les pressions sur le joint doivent suivre la même loi; donc la poussée qui est la résultante de ces pressions doit passer par le centre de gravité de ce trapèze; la forme du trapèze indique que le centre de poussée a la position annoncée.

---

sitions suivantes : 1° S'il n'y a qu'un seul joint, le bloc supérieur se meut comme un pendule composé, la courbe de pression qui passe par la charnière comprend une courbe de pression dynamique et une courbe de pression statique; ces deux courbes forment un angle; chacune d'elles fait avec les pressions des angles que l'on déterminerait par le théorème du numéro 346 ; la force fictive p dans la courbe dynamique est augmentée d'une force due à la réaction d'inertie du voussoir infiniment petit; 2° Si les joints sont infiniment rapprochés, la courbe dynamique est séparée de la courbe statique par un arc de l'intrados; tous les points de cet arc forment charnières; les forces d'inertie se développent dans cette partie de voûte dans une mesure suffisante pour que la courbe de pression coïncide avec l'arc d'intrados.

M. Dupuit fait remarquer cependant que si les culées cèdent ou si la partie fixe de la voûte se compriment fortement, le trapèze en question peut se réduire en un triangle et que le centre de poussée peut se rapprocher de l'extrados.

536. Objection générale. — Nous remarquerons, en premier lieu, que M. Dupuit n'étudie que les phénomènes qui se passent au décintrement mais ne considère pas les déformations qui accompagnent la production d'une courbe de pression. Supposons même que son argumentation soit irréfutable, tout ce que l'on peut en conclure c'est que les phénomènes qui se passent au décintrement tendent à provoquer la courbe de pression dont il s'agit. Admettons provisoirement l'existence de cette courbe de pression; considérons chaque demi-voûte séparément, elle va subir des déformations diverses; remettons en place les deux demi-voûtes, qui dit que les faces que nous avons séparées vont se joindre, qu'elles ne laisseront pas entre elles un certain écart, ou que les deux demi-voûtes ne vont pas pénétrer l'une dans l'autre. Il y a là deux conditions à établir, ce sont ces deux conditions qui peuvent rendre impossible la courbe de M. Dupuit.

537. Réfutation de la proposition I. — Au fond, l'argumentation au moyen de laquelle M. Dupuit démontre la première proposition revient à dire : si chaque demi-voûte existait seule, il y aurait rotation; donc cette rotation existe. Il nous semble que l'auteur attache beaucoup trop d'importance à un mouvement qu'il reconnaît lui-même comme impossible. Il y a tendance à rotation, il y a tendance à la production d'une poussée, mais de ces deux tendances on ne peut rien conclure.

Si nous supposons un décintrement suffisamment lent, les réactions du cintre sur la voûte diminueront d'après une loi aussi lente que nous voulons, les forces d'inertie seront aussi petites que nous voulons, en aucun instant du décintrement une partie de la voûte ne tombera comme si elle n'était pas soutenue; à chaque instant il se produira une courbe de pression statique compatible avec l'équilibre et les conditions

de la déformation ; et rien ne prouve que cette courbe touche en aucun instant la courbe d'intrados.

Considérons une voûte formée d'un monolithe reposant sur des culées invariables ; incontestablement avec le décintrement il se produira une courbe de pression bien déterminée par la théorie des arcs métalliques. Supposons que cette courbe soit tout entière à l'intérieur à la voûte ; établissons alors des joints rigoureusement plans sans mortier ; ni l'état de sollicitation, ni les déformations ne pourront changer, et cependant le raisonnement de M. Dupuit s'applique encore ; n'est-ce pas la preuve évidente que ce raisonnement est faux.

Notre théorie prouve qu'il n'y a de joint de rupture à l'intrados que si le mortier est compressible et que dans certains cas il peut y avoir charnière à l'extrados, alors qu'elle n'existe pas à l'intrados. On peut nous objecter que nos formules ne sont pas mathématiquement exactes ; mais qui nous empêche de supposer des matériaux qui se comportent rigoureusement d'après nos formules ; l'argumentation de M. Dupuit subsisterait encore et serait en désaccord avec des déductions d'une exactitude absolue ; c'est une preuve irréfutable de la fausseté de cette argumentation.

538. Réfutation de la proposition II. — La seconde proposition tombe d'elle-même, quand la première disparaît ; néanmoins nous tenons à relever certaines erreurs contenues dans la démonstration que nous avons rappelée. M. Dupuit remarque que les pressions sur le joint du milieu de la clef doivent anéantir des déplacements qui suivent la loi du trapèze ; il en déduit la loi des pressions. Il y a dans ce raisonnement une confusion entre les déplacements absolus et les déplacements élémentaires d'une section par rapport à sa voisine. La loi des pressions est celle des déplacements élémentaires, mais elle n'a rien de commun avec les déplacements absolus. Supposons une poutre sur deux appuis, la poutre dépasse les appuis, la partie située entre ces appuis est seule sollicitée ; il est bien facile d'imaginer un état de sollicitation qui produise sur les sections extrêmes des déplacements absolus selon la loi du trapèze ; on en conclurait

que ses sections extrêmes subissent des pressions, et elles ne sont pas sollicitées. Considérons même la moitié d'un arc métallique encastré à la naissance et calculons la poussée qui produirait au joint supérieur des déplacements suivant la loi du rectangle; le raisonnement de M. Dupuit donnerait une poussée au milieu du joint; il est évident, au contraire, qu'une pareille poussée produira une flexion de l'arc et que les déplacements absolus ne suivront pas la loi supposée. Si enfin nous prenons le cas de la demi-voûte et si nous essayons de déterminer la poussée capable d'anéantir les déplacements que la rotation autour du joint de rupture tend à produire, il nous paraît que si on considère la voûte comme décomposée en deux parties invariables, on anéantira les déplacements dès que la poussée sera assez grande pour fermer l'angle du joint de rupture et cela quel que soit le centre de poussée. Quelle que soit l'hypothèse que l'on fasse sur la nature des matériaux qui constituent la voûte, il nous paraît difficile de rendre compréhensible le raisonnement de M. Dupuit.

PP
a

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION GRAPHIQUE ET SES APPLICATIONS,

PAR

J. MASSAU,

Ingénieur des ponts et chaussées, à Gand.

(Extrait des *ANNALES DE L'ASSOCIATION DES INGÉNIEURS* sortis des Écoles spéciales de Gand.)

LIVRE V

POUTRES DROITES ET COURBES.

CHAPITRE I.

Déformation des poutres droites.

§ 1. Poutres prismatiques.

539. Courbes des déformations et des inclinaisons. — Nous avons vu (120 à 128), qu'en intégrant deux fois la courbe des charges, on obtient successivement la ligne des efforts tranchants et celle des moments fléchissants. La détermination des réactions inconnues ne présente aucune difficulté (124), quand les conditions de la statique suffisent. Dans les autres cas, il faut introduire les conditions de la déformation.

Supposons que la fibre moyenne de la poutre non déformée ne diffère pas sensiblement d'une droite; prenons, pour axe des x, une parallèle à cette droite. Quelle que soit la direction de cet axe, nous l'appellerons horizontale; l'axe des y est alors dirigé suivant la verticale.

Soient : M le moment fléchissant en un point;

x, y, les coordonnées de ce point;

I, le moment d'inertie de la section;

E, le coefficient de raideur à l'extension;

ε, le produit EI ou *moment d'inflexibilité*.

Un élément ds de la poutre tourne par rapport à son voisin d'un angle $d\psi$ donné par l'équation :

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{M}{EI} \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon \frac{d\psi}{ds} = M. \tag{1}$$

On sait que les déformations sont toujours très petites; l'élément ds avant et après la déformation a donc pour valeur approchée :

$$ds = dx.$$

Cet élément fait, avec l'axe des x, un angle assez petit pour qu'on puisse le mesurer par sa tangente :

$$\eta = \frac{dy}{dx}.$$

L'angle des deux éléments voisins, avant la déformation, est mesuré par $d\eta$; on a donc :

$$d\psi = \Delta d\eta,$$

le signe Δ représente l'accroissement algébrique dû à la déformation; on tire de là :

$$\frac{d\psi}{ds} = \Delta \frac{d\eta}{dx} = \Delta \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2(\Delta y)}{dx^2}.$$

L'équation de la déformation devient :

$$\varepsilon \frac{d^2(\Delta y)}{dx^2} = M.$$

Δy est le déplacement vertical d'un point de la fibre moyenne; on peut le considérer comme une ordonnée; c'est

l'ordonnée de la fibre moyenne déformée quand on prend la fibre moyenne non déformée comme ligne de repère; nous pouvons donc convenir de désigner cette ordonnée par y, au lieu de la désigner par Δy. On a alors l'équation :

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \mathrm{M}. \qquad (2)$$

Si la fibre moyenne non déformée est rigoureusement droite et horizontale, y est une ordonnée ordinaire. Sinon, y a une signification plus compliquée; mais il est facile de ramener ce dernier cas au premier. En effet, rectifions par la pensée la ligne des repères des y, en conservant les mêmes ordonnées pour la fibre moyenne déformée; l'équation de la déformation prouve que M ne change pas; l'état de sollicitation de la nouvelle poutre est donc le même que celui de la poutre donnée; on est ramené au cas d'une poutre rigoureusement droite. Il importe de remarquer cependant, qu'il faut faire subir aux ordonnées des appuis et des lignes d'encastrements, les mêmes opérations qu'aux ordonnées y.

De l'équation (2), on tire :

$$\varepsilon\eta = \int \mathrm{M}\,dx \qquad (3)$$

$$\varepsilon y = \int\int \mathrm{M}\,dx \qquad (4)$$

Il résulte de là, qu'en intégrant deux fois la ligne des M, on obtient successivement deux lignes dont les ordonnées représentent $\varepsilon\eta$ et εy. Mais le coefficient ε est constant; ces deux intégrales représentent donc aussi η et y à une échelle que dépend de ε et des bases d'intégration (55). Nous désignerons la première sous le nom de courbe des η ou des inclinaisons, la seconde sous le nom de courbe des y ou des déformations. Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant : *La courbe des inclinaisons est l'intégrale première de la ligne des moments fléchissants; la courbe des déformations est l'intégrale seconde de cette même ligne des moments fléchissants.*

En résumé, on obtient successivement les lignes des K, des η, des y, en intégrant quatre fois la courbe des charges. Mais les intégrales successives sont aussi des courbes de moments (105); les intégrales secondes sont des lignes de résultantes

ou courbes funiculaires (132, 133); on peut donc déduire du théorème précédent les corollaires suivants.

Considérons la surface engendrée par les ordonnées de la courbe des charges; assimilons les forces isolées à des surfaces finies comprises entre les deux ordonnées infiniment rapprochées; la ligne des K représente ces surfaces; la ligne des M, les moments statiques de ces surfaces; la ligne des η, les moments d'inertie divisés par 2; la ligne des y, les moments du second ordre divisés par 6.

Considérons la surface engendrée par les ordonnées de la ligne des K. La ligne des M représente ces surfaces; la ligne des η, leurs moments statiques; la ligne des y, leurs moments d'inertie divisés par 2.

Considérons la surface engendrée par les ordonnées de la ligne des M. La ligne des η représente ces surfaces; la ligne des y, leurs moments statiques. Enfin la ligne des y représente aussi les aires engendrées par les ordonnées de la ligne des η.

Si on compose les charges avec une force auxiliaire, on obtient une ligne des résultantes; la ligne des M est une de ces lignes; c'est donc aussi la courbe funiculaire d'un fil inextensible portant les mêmes charges que la poutre. Si on opère de la même manière sur les charges fictives représentées par la ligne des K, on obtient la ligne des η pour ligne des résultantes et pour courbe funiculaire. Enfin, si on opère de même sur les charges fictives représentées par la ligne des M, on obtient la ligne des y pour ligne des résultantes et pour courbe funiculaire.

540. Règles d'intégration. — Nous avons vu (69) que l'on peut obtenir exactement et très élégamment les n intégrales successives d'une droite; cette règle nous permettra de déterminer rigoureusement, par polygones semi-circonscrits, les lignes des K, des M, des η et des y, dans les cas où la poutre supporte des forces isolées ou des charges uniformément réparties.

Cette méthode s'applique aussi au cas où la courbe des charges serait formée d'arcs paraboliques de degré quelconque; on considère alors chacun de ces arcs comme l'intégrale simple ou multiple d'une ligne droite.

Si, par exemple, nous reprenons la figure 30 du livre II, nous pouvons considérer $p = Aa$ comme une charge uniformément répartie sur un tronçon de poutre; la ligne des K est la droite A_1B_1; la ligne des M est une parabole du second degré dont les tangentes extrêmes sont A_2r_2 et r_2B_2; la ligne des η est une parabole du troisième degré dont les tangentes extrêmes sont A_3r_3 et s_3B_3; enfin la ligne des y est une parabole du quatrième degré dont les tangentes extrêmes sont A_4r_4 et t_4B_4. Pour simplifier le langage, nous désignerons les polygones semi-circonscrits que l'on obtient ainsi par *polygones d'intégration*; les sommets de ces polygones se trouvent sur les verticales qui divisent le tronçon de poutre en un certain nombre de parties égales; ces verticales sont les *directrices de l'intégration.*

Dans les applications, on peut quelquefois réduire le nombre de côtés du polygone final en utilisant la proposition suivante : *la corde qui joint deux sommets d'un polygone d'intégration est l'intégrale de l'ordonnée du centre de gravité des extrémités des dérivées des côtés sous-tendus.* Ainsi la corde A_1B_1, dont il vient d'être question, est l'intégrale de l'ordonnée du centre de gravité des points A_3, r_3, s_3, B_3. En effet, soient η_0, η_1, η_2, η_3, les ordonnées de ces points; de A_1 en B_1, l'accroissement de l'intégrale finale est :

$$\eta_0 \frac{h}{4} + \eta_1 \frac{h}{4} + \eta_2 \frac{h}{4} + \eta_3 \frac{h}{4} = \frac{\eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3}{4} h,$$

on sait que la quantité qui multiplie h est l'ordonnée du centre de gravité des points A_3, r_3, s_3 B_3; en intégrant cette ordonnée, on retrouvera donc la même corde A_1B_1.

541. Règles des signes. — Nous avons admis les formules :

$$K = \int p\,dx, \qquad M = \int K\,dx, \qquad \varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = M.$$

Ces formules supposent certaines conventions sur les signes de p, K, M, y; il importe de les préciser.

Supposons d'abord que l'on intègre de droite vers gauche,

c'est-à-dire que l'axe des x et les bases d'intégration soient dirigés vers la gauche, les axes d'ordonnées sont tous dirigés vers le bas ou tous dirigés vers le haut. On reconnaît sans peine que l'ordonnée K représente la résultante des forces qui sollicitent le tronçon de poutre situé à droite du point considéré; l'ordonnée M représentera le moment de cette force et sera dirigée vers la concavité de la fibre moyenne déformée. Il résulte de là que d^2y et M sont positifs en même temps et cela justifie la formule des déformations. Une autre convention, sur le signe des M, aurait conduit à la formule

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = - \mathrm{M}.$$

Supposons que l'on intègre de gauche vers droite, c'est-à-dire que l'axe des x et les bases d'intégration soient dirigés vers la droite; cette hypothèse revient à changer les signes des dx; donc les intégrales d'ordre pair M et y restent les mêmes, mais les intégrales d'ordre impair K et η changent de signe. Il est facile de reconnaître directement qu'il doit en être ainsi; il est évident, par exemple, que l'ordonnée K représentera la résultante des forces qui sollicitent le tronçon de gauche; or cette résultante doit faire équilibre à la résultante des autres forces; donc les deux efforts tranchants sont égaux et de sens contraire. Nous pouvons résumer comme suit toutes les considérations qui précèdent : *1° les charges, les forces et les* y *sont portés suivant leurs directions; 2° les moments fléchissants sont représentés par des ordonnées dirigées vers la concavité de la fibre moyenne déformée; 3° selon que l'on intègre vers la gauche ou vers la droite, l'effort tranchant est la résultante des forces qui sollicitent le tronçon de droite ou le tronçon de gauche; 4° l'ordonnée* η *change de sens avec l'axe des* x.

Il est évident que c'est le sens de la base de l'intégration qui indique que l'on intègre vers la droite ou vers la gauche; mais, dans chacun de ces cas, il est indifférent de tracer la courbe intégrale à partir de l'une ou l'autre extrémité.

549. Méthode générale. — Lorsque les conditions d'équilibre ne suffisent pas pour déterminer les réactions des appuis,

on doit utiliser les conditions de la déformation. Pour chaque travée, on intègre deux fois la courbe des charges ; le lieu des M que l'on obtient ainsi doit être rapporté à une ligne de repère droite que nous appellerons ligne des M'. Si on intègre deux fois la ligne des M, on obtient la ligne des η et celle des y, mais, en prenant pour lignes de repère les intégrales de la ligne des M' (65), ce sont les lignes des η' et des y'. La question revient à tracer soit la ligne des M', soit celle des η', soit celle des y'. La ligne des η' est une parabole du second degré que l'on détermine par deux tangentes extrêmes ; la ligne des y' est une parabole du troisième degré que l'on détermine par un polygone d'intégration de trois côtés. Ces polygones d'intégration doivent satisfaire à certaines conditions : ce sont les conditions de la déformation. Nous verrons qu'en exprimant ces conditions on détermine soit la ligne des y', soit celle des η', soit celle des M' ; chaque problème peut aussi être résolu de trois manières (1).

Remarquons que les lignes des K, des M, des η, des y ont deux espèces d'ordonnées : 1° les ordonnées limitées aux lignes des K', des M', des η', des y', qui représentent les véritables valeurs de K, M, η, y ; 2° les ordonnées absolues que nous désignerons par K'', M'', η'', y''.

---

(1) En statique graphique, on établit la théorie des poutres droites en considérant la courbe des y comme une courbe funiculaire. Or la courbe funiculaire est une intégrale seconde ; on trace donc ainsi l'intégrale seconde de la surface des M, sans utiliser l'intégrale première ; on supplée aux règles d'intégration que l'on ignore par des artifices particuliers. Ces artifices consistent à décomposer la surface des M en parties connues et inconnues.

La statique graphique ne donne pas une solution complète des problèmes ; elle les ramène à la recherche de certains centres de gravité et de certaines surfaces. Au contraire, en appliquant les principes que nous venons de rappeler et que nous avions déjà publiés dans le *Bulletin mensuel* de décembre 1877, on arrive à trois solutions graphiques complètes, toutes les fois que les charges continues s'expriment par des fonctions entières. La solution la plus simple est précisément celle qui échappe à la statique graphique.

Les lignes des K, des M, des η, des y sont aussi celles des

$$K'',\ M'',\ \eta'',\ y'';$$

on a: $K = K'' - K'$, $M = M'' - M'$, $\eta = \eta'' - \eta'$, $y = y'' - y'$.

513. Principe de l'indépendance des effets des forces. — *Une poutre est sollicitée par différents groupes de forces ; on détermine les éléments* K, M, η, y *pour le premier groupe ; on détermine ensuite ces éléments pour les autres groupes, mais en supposant les appuis et les encastrements de niveau ; on superpose tous les résultats ; on obtient les éléments de la poutre donnée sollicitée pour toutes les forces considérées.*

En effet, en superposant les K'', M'', η'', y'' d'une part, les K', M', η' y' d'autre part, nous obtiendrons évidemment les éléments d'une certaine poutre sollicitée par toutes les forces considérées. En ajoutant des groupes de forces en équilibre, on obtient un nouveau système de forces en équilibre; donc les conditions de la statique sont satisfaites après la superposition ; voyons s'il en est de même des conditions de la déformation.

Sur un appui, on trouvera une déformation $\Sigma y'' - \Sigma y'$; soit y l'ordonnée de cet appui; pour le premier groupe de forces, nous avons déterminé l'état de sollicitation de la poutre en tenant compte des niveaux des appuis, donc :

$$y'' - y' = y.$$

Pour les autres groupes de forces, au contraire, nous avons déterminé l'état de sollicitation en supposant les appuis de niveau ; donc :

$$y'' - y' = 0.$$

On a donc :

$$\Sigma y'' - \Sigma y' = y.$$

La condition de la déformation est satisfaite sur l'appui.

Le même raisonnement s'applique à un encastrement ; outre l'ordonnée y de l'appui, on donne la direction η de l'encastrement. Pour le premier groupe de forces, on a :

$$\eta'' - \eta' = \eta.$$

Pour les autres, on a :

$$\eta' - \eta' = 0.$$

On a donc :

$$\Sigma\eta'' - \Sigma\eta' = \eta,$$

ce qui prouve que la condition de la déformation est satisfaite aussi, quand il y a encastrement.

Remarques. — 1° Si on superposait les effets des forces sans avoir soin de supposer les appuis de niveau pour tous les groupes de forces sauf le premier, on obtiendrait évidemment

$$\Sigma y'' - \Sigma y' = \Sigma y$$
$$\Sigma\eta'' - \Sigma\eta' = \Sigma\eta.$$

Il faudrait donc aussi superposer les ordonnées des appuis et des lignes d'encastrement pour obtenir les appuis et les encastrements de la nouvelle poutre.

2° Divisons les forces en deux groupes et supposons que le premier groupe se réduise à zéro; le théorème général devient le corollaire suivant : *on obtient les éléments d'une poutre en superposant : 1° les éléments d'une poutre non chargée soumise aux mêmes conditions; 2° les éléments d'une poutre sollicitée par les forces données, les appuis et encastrements étant rendus de niveau* (1).

§ 2 Raccordement des arcs paraboliques.

544. Problème à résoudre. — Considérons pour fixer les idées, le cas d'une charge uniforme p ; intégrons en divisant la poutre en tronçons; on obtient pour chaque ligne des polygones d'intégration qui appartiennent à une même parabole. Si, en passant d'un tronçon au suivant, la charge

(1) Nous démontrerons plus loin (670) que ces théorèmes s'appliquent aussi aux arcs courbes. La démonstration plus générale que nous donnerons à cette occasion est aussi applicable ici.

varie de p à p', l'intégrale première sera formée de deux droites formant un angle; l'intégrale seconde, de deux arcs paraboliques tangents; l'intégrale troisième, de deux arcs paraboliques ayant un contact du second ordre; enfin la ligne des y ou l'intégrale quatrième sera formée de deux arcs paraboliques ayant un contact du troisième ordre. Si entre les deux tronçons agit une force isolée, la ligne des K présente une discontinuité; la ligne des M, un angle; la ligne des η, un contact du premier ordre; la ligne des y, un contact du second ordre. Si, dans une section, on introduit un couple isolé, la ligne des M présente un saut brusque, celle des η, un angle; celle des y un contact du premier ordre. Le problème suivant présente donc de l'intérêt : *deux arcs paraboliques se raccordent par un contact d'un certain ordre; quelles sont les relations entre les polygones d'intégration.*

Nous supposerons d'abord que les arcs paraboliques soient du même degré; nous verrons ensuite comment les résultats obtenus peuvent se généraliser.

545. Théorème fondamental. — *Si deux arcs paraboliques de degré* n *se raccordent par un contact d'ordre* k, *les* k *côtés des polygones d'intégration, comptés à partir du point de jonction, peuvent être considérés comme les polygones d'intégration de deux arcs paraboliques de degré* k; *ces arcs font partie d'une même parabole.*

Nous exprimerons que deux arcs paraboliques ont un contact d'ordre k, en égalant, au point de jonction, dans les deux arcs, les dérivées :

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \cdots\cdots \frac{d^ky}{dx^k}.$$

Mais nous avons démontré (69) qu'il existe des relations entre les dérivées à l'extrémité d'un arc parabolique et les différences successives des ordonnées des polygones d'intégration; ces relations sont de la forme :

$$\Delta^k y_n = \frac{h}{n}\frac{h}{n-1}\frac{h}{n-2} y_{n-3}$$

On a :

$$y_{n-3} = \frac{d^3 y_n}{dx^3}.$$

Si on remplace y_n par la rotation y, il vient :

$$\Delta y^3 = \frac{h}{n}\,\frac{h}{n-1}\,\frac{h}{n-2}\,\frac{d^3 y}{dx^3}.$$

Posons :

$$\Delta x = \frac{h}{n}.$$

On a :

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\,\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}.$$

Exprimons le contact d'ordre k, en remplaçant les dérivées par les expressions analogues à la précédente; les coefficients numériques disparaissent comme facteurs communs ; il faut donc que les expressions :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x},\ \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2},\ \ldots\ \frac{\Delta^k y}{\Delta x^k},$$

aient les mêmes valeurs dans les deux polygones d'intégration.

Considérons les deux paraboles de degré k définies par les côtés les plus voisins de chacun des polygones d'intégration; les conditions précédentes sont précisément les conditions nécessaires pour que ces paraboles aient un contact d'ordre k; ces paraboles de degré k n'ont un contact d'ordre k que si elles coïncident.

Cette parabole est la *parabole du contact*; le *polygone du contact* est le polygone d'intégration que l'on obtient en réunissant les deux arcs de cette parabole en un seul; les directrices de ce polygone sont les *directrices du contact*.

Corollaire. — On donne le polygone d'intégration de l'un des deux arcs paraboliques qui ont un contact d'ordre k; on peut trouver les k premiers côtés de l'autre polygone d'intégration. En effet, les k premiers côtés du polygone connu déterminent la parabole de contact; on peut obtenir les poly-

gones d'intégration de tout arc de cette parabole en la considérant comme l'intégrale multiple d'une droite ; on obtiendra donc facilement les k côtés que l'on cherche.

Cas particulier. — Si deux arcs compris entre deux mêmes verticales ont, à l'une de leurs extrémités, un contact d'ordre k, les polygones d'intégration ont k côtés communs. En effet, les deux arcs de la parabole de contact étant compris entre deux mêmes verticales doivent coïncider ; il en est donc de même de leurs polygones d'intégration.

546. Contact du second ordre. — *Les côtés adjacents au côté commun se coupent sur la verticale menée à égale distance des extrémités, de ces côtés, qui sont les plus éloignées du point de contact.*

Soit (fig. 206) A le point de contact ; les côtés AB' et AB forment un côté unique s'il y a contact simple. Supposons que le contact soit du second ordre ; les côtés ABC, AB'C' enveloppent une même parabole. Réunissons ces deux arcs en un seul CC' ; les côtés CF et FC' sont les tangentes extrêmes, donc le point F est sur l'ordonnée qui divise CC' en deux parties égales. Cette ordonnée est la directrice du contact ; on l'obtient aussi en portant $bf = ab'$. Le polygone CFC' est le polygone du contact d'ordre 2.

547. Contact du troisième ordre. — *Le polygone du contact d'ordre trois est circonscrit au polygone du contact d'ordre deux.*

Si le contact est du troisième ordre, il est à plus forte raison du second ordre ; la proposition précédente est donc applicable. Il faut aussi que les trois côtés DCBA et les trois côtés AB'C'D' appartiennent à deux arcs d'une même parabole du troisième degré. Réunissons ces deux arcs en un seul ; soit DHKD' le polygone d'intégration de l'arc total DD'. Considérons cet arc total DAD' et le premier arc DA de la parabole du contact d'ordre 3 ; ces arcs coïncident ; à plus forte raison, ils ont en D un contact d'ordre 2. Appliquons le théorème précédent ; DCB et DHK définissent deux arcs d'une même parabole du second degré ; donc les tangentes

CB et HK se coupent au milieu de l'intervalle qui sépare les verticales des points B et K; il est facile de voir que ce point est F. En effet, soient $\lambda = ab$, $\lambda' = ab'$ les projections horizontales des côtés des polygones d'intégration; on a :

$$cf = \lambda + \lambda', \; cb = \lambda, \qquad \text{donc } fb = \lambda'.$$

On a aussi $kd' = \lambda + \lambda'$, $fd' = \lambda + \lambda' + \lambda'$; donc $fk = \lambda'$.

Ces deux égalités donnent :

$$fb = fk.$$

Donc le côté HK passe par le point F; cela démontre le théorème.

548. Contact du quatrième ordre. — *Le polygone du contact d'ordre quatre est circonscrit au polygone du contact d'ordre trois.*

Les polygones EDCBA et AB'C'D'E' appartiennent à une même parabole du quatrième degré; soit ELMNE' le polygone relatif à l'ensemble des deux arcs; démontrons qu'il est circonscrit au polygone DHKD'. Exprimons qu'au point E les avis EA et EE' de la parabole du contact d'ordre quatre ont un contact du second ordre; on prouve comme précédemment que le côté LM passe par le point H. Exprimons ensuite qu'au point E', les arcs EE' et AE' ont aussi un contact du second ordre; on prouve que le côté MN passe par le point K; cela démontre le théorème.

549. Contact d'ordre n. — *On vérifie le contact d'ordre* n *en traçant successivement les polygones des contacts d'ordre 2, 3 . . .* n ; *chaque polygone est circonscrit au précédent.*

Soient (fig. 206) ABCDE et AB'C'D'E' les polygones de n côtés qui appartiennent aux deux arcs de la parabole du contact d'ordre n. Réunissons ces deux arcs en un seul; soit ELMNE' le polygone d'intégration de l'arc unique. Les directrices de ce polygone sont à une distance facile à calculer; soient : λ la projection horizontale de chacun des côtés du polygone ABCDE, λ' la projection horizontale de chacun des côtés du polygone AB'C'D'E'; l'arc EE' a pour projection

horizontale $n(\lambda + \lambda')$; chacun des côtés du polygone ELMNE' a donc pour projection $\lambda + \lambda'$.

Supprimons les côtés ED, D'E'; les polygones qui restent, ABCD et AB'C'D' appartiennent à deux arcs de la parabole du contact d'ordre $n - 1$; réunissons ces deux arcs en un seul et soit DKHD' le polygone d'intégration de l'arc total; il faut démontrer que ce polygone est inscrit dans le polygone ELMNE'.

Soient : K, le $k^{\text{ième}}$ sommet du polygone DKHD'; M et N, le $k^{\text{ième}}$ et le $k + 1^{\text{ième}}$ sommet du polygone ELMNE'; nous allons calculer les coordonnées de ces points et démontrer que le point K se trouve sur le côté MN. On trouve facilement les abscisses des points M, N, K; prenons la projection e du point E comme origine; on obtient :

$$\begin{aligned} &\text{point M}, \quad x = k(\lambda + \lambda') \\ &\text{point N}, \quad x' = (k+1)(\lambda + \lambda') \\ &\text{point K}, \quad x'' = k(\lambda + \lambda') + \lambda. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} x'' &= x + \lambda \\ x' &= x'' + \lambda'. \end{aligned}$$

La verticale du point K divise donc MN dans le rapport $\lambda : \lambda'$; pour que le point K soit sur MN, il faut et il suffit que les ordonnées z, z', z'' des points M, N, K satisfassent à la relation

$$z'' = \frac{\lambda' z + \lambda z'}{\lambda + \lambda'}.$$

Partons du point E et soient, comme au numéro 69 :

$$y_n \quad y_n^1 \quad y_n^2 \quad \dots \quad y_n^n,$$

les ordonnées du polygone EDCBA; on obtient une ordonnée quelconque par la formule symbolique :

$$y_n^k = (1 + \Delta)^k y_n.$$

Passons du polygone EDCBA au polygone ELMNE'; prenons (69) la valeur d'une différence; soit par exemple :

$$\Delta^3 y_n = \frac{h}{n} \frac{h}{n-1} \frac{h}{n-2} y_{n-3}.$$

La dérivée y_{n-3} est la même par les deux arcs EA et EE' de la même parabole; mais pour le premier arc, on a $h = n\lambda$; pour le second, on a $h = n(\lambda + \lambda')$; on voit donc que h varie dans le rapport :

$$r = \frac{\lambda + \lambda'}{\lambda}.$$

Il résulte de là que $\Delta^5 y_n$ devient $r^5 \Delta^5 y_n$ quand on passe du polygone EDBCA au polygone ELMNE'. Comme cette relation est générale, on peut dire que dans la formule symbolique il faut remplacer Δ par $r\Delta$. On a donc :

$$z = (1 + r\Delta)^k y_n \qquad (2)$$
$$z' = (1 + r\Delta)^{k+1} y_n. \qquad (3)$$

Considérons de même les $k^{\text{ièmes}}$ sommets du polygone DCBA et du polygone DHKD'; on a, pour le premier :

$$y_n^{k+1} = (1 + \Delta)^k y_n^1.$$

Pour passer au $k^{\text{ième}}$ sommet du polygone DHKD', on doit remplacer Δ par $r\Delta$, donc :

$$z'' = (1 + r\Delta)^k y_n^1.$$

Mais l'ordonnée y_n^1 du point B a pour valeur :

$$y_n^1 = (1 + \Delta) y_n.$$

On a donc :

$$z'' = (1 + r\Delta)^k (1 + \Delta) y_n \qquad (4)$$

Vérifions que les valeurs de z, z', z'' satisfont à l'équation (1). Le second membre de cette équation devient en remplaçant $\lambda + \lambda', \lambda, \lambda'$ par les quantités proportionnelles $r, 1, r - 1$.

$$z'' = z + \frac{z' - z}{r} \qquad (1^{bis})$$

Les équations (2), (3), (4) donnent symboliquement :

$$z' = (1 + r\Delta) z,$$
$$z'' = (1 + \Delta) z.$$

L'équation (1^{bis}) devient l'identité :

$$(1 + \Delta)\, z = z + \Delta z.$$

Cela démontre le théorème.

COROLLAIRE. — *Une parabole de degré* n *est déterminée par son polygone d'intégration ; trouver un point quelconque et la tangente en ce point.*

Soit le polygone ELMNE' ; on demande la tangente au point de la parabole qui se trouve sur la verticale a.

Supposons le problème résolu ; soient : A, le point cherché ; EDCBA et AB'C'D'E' les polygones d'intégration des arcs paraboliques EA et AE' ; ces deux arcs font partie de la même parabole ; nous exprimerons qu'il ont en A un contact d'ordre n. Connaissant le polygone ELMNE', on peut tracer les polygones des divers contacts de ces deux arcs ; on trace d'abord les directrices d'intégration de ces deux arcs et les directrices des divers contacts en divisant : ea, ae', ee' en n parties égales ; dd', en $n - 1$ parties égales ; cc', en $n - 2$ parties égales, etc. Cela étant le polygone du contact d'ordre $n - 1$ s'inscrit en DHKD' dans le polygone ELMNE' ; le polygone CFC' du contact d'ordre $n - 2$ s'inscrit dans le polygone DHKD' ; finalement la tangente commune BB' s'inscrit dans le polygone du contact d'ordre 2 ; le problème est résolu.

On peut donner le polygone EDCBA et demander la tangente en un point situé sur une verticale extérieure e'. Menons les directrices de l'arc inconnu AE' et les directrices des divers contacts qui existent au point A entre l'arc connu EA et son prolongement AE' ; on peut alors tracer successivement CFC', DHKD', ELMNE' ; on obtient CFC', en prolongeant CB jusqu'en F et en joignant FB', que l'on prolonge jusqu'en C' ; on obtient les autres polygones de la même manière ; finalement on obtient la tangente D'E'.

550. Contact de deux paraboles de degrés différents. Soit à exprimer le contact entre une parabole de degré n et une parabole de degré $n - 2$ déterminées par leurs polygones d'intégration. On peut toujours considérer la parabole de

degré $n - 2$ comme un cas particulier de la parabole de degré n ; il suffit dans cette dernière d'égaler à zéro les coefficients des deux termes des plus hauts degrés ; elle donne lieu dans cette hypothèse à un polygone d'intégration de n côtés ; si on connaissait ce polygone le problème serait ramené au cas précédent de deux paraboles du même degré.

Pour l'obtenir, considérons la parabole de degré $n - 2$ comme l'intégrale $n - 3^{\text{ième}}$ d'une droite ; opérons comme si cette droite était une parabole du troisième degré ; le polygone d'intégration de cette dernière a ses trois côtés en ligne droite ; intégrons cette parabole $n - 3$ fois, nous obtiendrons le polygone d'intégration de n côtés appartenant à la parabole de degré $n - 2$.

La transformation du polygone de $n - 2$ côtés en polygone de n côtés peut aussi se faire en appliquant le théorème suivant : *une parabole de degré* n *peut être considérée comme cas particulier d'une parabole de degré* n + 1 : *le polygone d'intégration de* n + 1 *côtés est inscrit dans le polygone de* n *côtés.*

Il est facile de voir que le théorème est vrai pour une parabole du second degré que l'on considère comme une parabole du troisième degré. Nous allons supposer que le théorème soit vrai pour une parabole de degré $n - 1$; démontrons qu'il est également vrai pour une parabole de degré n.

La parabole de degré n est l'intégrale d'une parabole de degré $n - 1$ à laquelle on peut appliquer le théorème. Soient (fig. 207) : ABC, deux côtés du polygone d'intégration de la dérivée ; DE un côté du polygone d'intégration que l'on obtient en considérant cette dérivée comme de degré n ; A'B'C', les côtés qui sont les intégrales des ordonnées des points A et B ; démontrons que la dérivée du côté inscrit D'E' est l'ordonnée du point D.

Soient : A et B les ordonnées des points A et B, dérivées des côtés A'B' et B'E' ; y' la dérivée de la corde D' E' ; en exprimant de deux manières l'accroissement de l'ordonnée d'un point qui passe de D' en E', on trouve :

$$y' \overline{d'e'} = A \overline{d'b'} + B \overline{b'e'}.$$

L'ordonnée y' est donc l'ordonnée du centre de deux poids $d'b'$ et $b'e'$ appliqués en A et en B ; ce centre divise AB dans le rapport inverse du rapport $d'b' : b'e'$.

Pour démontrer que ce centre est le point D, il faut donc prouver que l'on a :

$$ad : db = b'e' : b'd'.$$

Soit O l'origine d'abscisse ; on a :

$$Oa = (k-1)\frac{h}{n-1}, \quad Od = k\frac{h}{n}, \quad Ob = k\frac{h}{n-1},$$

d'où :

$$ad = \frac{(n-k)h}{n(n-1)}, \quad db = \frac{kh}{n(n-1)},$$

d'où

$$\frac{ad}{db} = \frac{n-k}{n}.$$

On trouve de même :

$$O'd' = \frac{kh}{n+1}, \quad O'b' = k\frac{h}{n}, \quad O'e' = \frac{(k+1)h}{n+1},$$

d'où

$$\frac{d'b'}{b'e'} = \frac{n}{n-k}.$$

En comparant les valeurs des rapports $ad : db$ et $d'b' : b'e'$, on trouve :

$$ad : db = b'e' : b'd'.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Ce que nous venons de prouver pour le côté D'E' existe pour toutes les cordes analogues inscrites dans le polygone A'B'C'... ; l'ensemble de ces cordes forme donc le polygone d'intégration de $n + 1$ côtés ; il est inscrit dans le polygone de n côtés.

Remarque. — Dans le cours de la démonstration précédente, nous avons établi une proposition qui sera souvent appliquée dans ce qui va suivre ; nous l'énoncerons comme

suit : *la dérivée d'une corde* D'E' *qui sous-tend l'angle* B' *d'un polygone est l'ordonnée du point* D *qui divise la distance* AB *des extrémités des dérivées des côtés de l'angle, dans le rapport inverse des projections horizontales des côtés sous-tendus.*

§ 3. Poutres à section variable.

551. Intégration approchée et exacte. — La formule générale des déformations est toujours applicable; mais le moment d'inflexibilité ε varie d'un point à un autre; on obtient alors :

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = M,$$

$$\eta = \frac{M\,dx}{\varepsilon},$$

$$y = \int \eta\, dx.$$

Il est évident que la méthode générale et le principe de l'indépendance des effets des forces (542, 543) sont encore applicables; mais ce sont les règles d'intégration qui diffèrent et qu'il s'agit d'examiner ici.

Considérons un élément dx de la poutre; l'élément de la ligne des η est déterminé par l'équation :

$$d\eta = \frac{M\,dx}{\varepsilon}.$$

Cette formule est la même que si la pièce était prismatique; on obtiendra donc la direction de cet élément par un diagramme des inclinaisons; M est l'ordonnée de ce diagramme; la base d'intégration dépend des échelles et du coefficient ε. Si on voulait obtenir $M\,dx$, on prendrait une base λ_0; pour diviser par ε, il faut multiplier cette base par ε; on prendra donc pour base :

$$\lambda = \lambda_0 \varepsilon.$$

Cette base est donc proportionnelle à ε. Pour chaque élément $d\eta$, on obtiendra un pôle; en joignant ces pôles aux

points correspondants de l'axe du diagramme, on obtient les directions de tous ces éléments. On trace la courbe par polygone circonscrit ; on prend des points suffisamment rapprochés pour admettre que les tangentes en deux points voisins se coupent sur la verticale qui passe à égale distance de ces deux points. On obtient la courbe des y, en intégrant la courbe des η avec une base constante.

Nous nous occuperons spécialement du cas où la ligne des M est une parabole, de degré quelconque, déterminée par son polygone d'intégration ; nous allons démontrer que les tracés rappelés au numéro 540 peuvent encore être appliqués, pourvu qu'on y apporte les modifications suivantes :

1° Pour chaque tronçon h de la poutre, la base d'intégration des η se calcule comme si la poutre avait un moment d'inflexibilité constant ε_1 donné par l'équation :

$$\frac{h}{\varepsilon_1} = \int \frac{dx}{\varepsilon}; \qquad (1)$$

2° Les directrices des polygones d'intégration des η et des y ne divisent plus le tronçon de poutre en parties égales, mais doivent être déterminées par les règles qui font l'objet des numéros suivants.

Ainsi, soit (fig. 209, fig. a) ABCDE, le polygone d'intégration d'un arc de la ligne des M ; cet arc est du quatrième degré. Si ε était constant, on obtiendrait les lignes des η et des y en continuant l'intégration ; opérons de même mais déterminons convenablement les directrices, nous obtiendrons le polygone des η en FGHIKL, celui des y en MNPQRST. Ces polygones déterminent exactement les extrémités des arcs des η et des y ; le polygone des η ne touche pas l'arc ; celui des y touche l'arc aux deux extrémités. Connaissant le polygone des y, on peut retrouver le polygone des M au moyen de la construction inverse.

Le cas général d'une parabole de degré n est moins important que celui d'une ligne droite des M ; ce dernier cas se présente toujours quand la ligne de repère des M ou ligne des M' doit être déterminée par les conditions de la déformation. Aussi nous traiterons d'abord ce cas particulier. Pour sim-

plifier le langage, nous adopterons les expressions suivantes : nous attribuerons à la fibre moyenne de la poutre une densité fictive $1 : \varepsilon$; les poids fictifs des différentes parties de la poutre se représenteront par les aires de la courbe $z = 1 : \varepsilon$; la *verticale centrale* d'un tronçon de poutre est la verticale qui passe par le centre de gravité du tronçon calculé dans cette hypothèse.

En retournant le tronçon bout pour bout, la verticale centrale prend une nouvelle position : c'est la *verticale anticentrale*. En prenant deux axes de rotation aux extrémités du tronçon, on obtient deux centres de percussion ; nous les désignerons par *points principaux* du tronçon.

559. M constant — *La ligne des η se détermine par une corde; celle des y par deux tangentes extrêmes. Ces tangentes se coupent sur la verticale centrale du tronçon.*

Soit la ligne $M = M_0$; on a :

$$\eta = \int \frac{M dx}{\varepsilon} \quad \text{ou} \quad \eta = \eta_0 + M_0 \int_0^h \frac{dx}{\varepsilon}.$$

Introduisons le coefficient ε_1, il vient :

$$\eta = \eta_0 + \frac{M_0 h}{\varepsilon_1}.$$

C'est cette valeur que l'on obtiendrait si la poutre était prismatique et si ε était égal à ε_1; car alors, on aurait :

$$\eta = \eta_0 + \int \frac{M_0 dx}{\varepsilon_1},$$

valeur identique à la précédente.

On obtient donc la corde des η par la même construction que s'il s'agissait d'intégrer la ligne des M. Soit (fig. 208, fig. *e*) AB, cette ligne $M = M_0$; on obtient pour corde des η, la ligne DF (fig. *f*); la base d'intégration se détermine par le coefficient ε_1. Connaissant la ligne DF, on obtient la ligne des M par différentiation.

Soient HL et LN les tangentes extrêmes à la ligne des y;

il suffit pour tracer ces tangentes de connaître la directrice du point L. Or, la ligne des y est l'intégrale seconde de $M_0 : \varepsilon$; donc on peut la considérer comme une ligne des résultantes auxiliaires; les tangentes extrêmes se coupent sur la verticale du centre des poids à composer; ces poids $M_0 dx : \varepsilon$ sont proportionnels $dx : \varepsilon$; c'est le poids de l'élément de la fibre moyenne de la poutre dans l'hypothèse d'une densité fictive $1 : \varepsilon$; donc la verticale du point L passe par le centre de gravité du tronçon de poutre : ce qu'il fallait démontrer.

553. Ligne droite des M. — *Le polygone des η se compose de deux côtés qui se coupent sur la verticale anticentrale. Les directrices du polygone des y tombent aux points principaux du tronçon.*

Soit AC (fig. 208, fig. *e*) la ligne des M; en appliquant cette règle, on obtient DEG polygone des η et HKMR polygone des y Pour la démontrer, considérons la figure *ab*CA comme l'élévation d'un tronc de prisme, dont la section droite serait projetée en *ab*; prenons pour section droite l'aire limitée par la courbe dont les ordonnées normales à *ab* soient :

$$z = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Le volume élémentaire compris entre deux plans x et $x + dx$ est :

$$M z\, dx = \frac{M dx}{\varepsilon},$$

c'est précisément $d\eta$; donc $\eta - \eta_0$ est le volume total. Mais ce volume est le même que celui d'un cylindre de hauteur constante égale à la génératrice I*i* qui passe par le centre de gravité de la base; on obtient donc la corde des η en appliquant la règle du numéro précédent à la ligne M = I*i*. Cette construction par corde n'est pas réversible, car de la corde DG, on ne peut déduire que la dérivée I*i* et non AC. La construction proposée est réversible; nous allons prouver qu'elle conduit au même résultat que la précédente.

En effet, traçons DE, EG intégrales des ordonnées A*a* et C*c*; démontrons que la corde DG est l'intégrale de I*i*. Les

dérivées de DE et EG sont Aa et Cc; la corde DG a donc pour dérivée l'ordonnée du point qui divise AC dans le rapport ef : de ou ib : ai; cette ordonnée est Ii; c'est ce qu'il fallait démontrer.

Si on applique la règle que nous venons de justifier, au cas où Aa s'annule, on trouve le polygone E'EG; donc :

$$E''G = \text{volume } abC.$$

Si on applique cette même règle au cas où Cc s'annule, on trouve le polygone DEE''; donc :

$$DE' = \text{volume } Aab.$$

Le volume total est représenté par DE' + E''G; cela est conforme au principe de la superposition des lois planes (254, 275). Cette remarque nous conduit au polygone des y.

Considérons la courbe des y comme une ligne des résultantes des poids $d\eta$. Remplaçons le poids résultant par les deux poids composants : 1° le poids du volume Aab qui tombe au centre de percussion conjugué à l'axe B et qui est égal à DE'; 2° le poids du volume AbC on abC qui tombe à l'autre point principal du tronçon et qui est égal à E''G.

Nous trouvons alors la ligne des résultantes HKMR; les côtés HK et MR touchent la ligne des y; le côté KM est un côté auxiliaire. C'est ce qui démontre la seconde partie de la règle. Remarquons aussi que l'une des intégrales secondes cherchées est AkmC (254).

Nous avons indiqué (fig. a, b, c, d) les constructions qui permettent de trouver la base d'intégration des η et les directrices; nous avons supposé que la courbe des $1 : \varepsilon$ était une droite; la corde de la première intégrale (fig. b) a pour dérivée (fig. a) l'ordonnée moyenne $\alpha\beta = 1 : \varepsilon_1$; on obtient des quantités proportionnelles à ε_1 sur un axe Oλ convenablement choisi : $O\gamma = \lambda_0\varepsilon_1$. Le centre de gravité et le centre de percussion conjugué à l'extrémité droite du tronçon s'obtiennent par les constructions ordinaires (fig. c et fig. d).

Connaissant (fig. e) le centre de percussion k conjugué à B et le centre de gravité i, on obtient l'autre centre de percussion m par une construction connue.

Soit AB une horizontale, en joignant Ak et Bm, ces droites (254) se coupent en s sur la verticale du centre de gravité du prisme abBA ; cette verticale est la verticale centrale. Connaissant i, k, la figure donne s ; on trouve m en joignant sB.

554. Ligne parabolique des M. — Supposons pour plus de généralité que la ligne des M soit une parabole de degré n déterminée par un polygone d'intégration ABCDE (fig. 209, fig. a) ; on a, en prenant l'origine des coordonnées au point a :

$$M = M_0 + \frac{x}{1}\frac{dM_0}{dx} + \frac{x^2}{1.2}\frac{d^2M_0}{dx^2} + \dots$$

Soient : M_0, M_1, M_2,... M_n les ordonnées du polygone d'intégration ; nous savons (69) que les dérivées de M_0 sont égales aux différences ΔM_0, $\Delta^2 M_0$,... multipliées par des coefficients ; en remplaçant les dérivées par leurs valeurs, la valeur de M devient :

$$M = \Sigma a_i M_i. \qquad (2)$$

En effet, les dérivées contiennent linéairement les moments M_0, M_1, M_2... ; les coefficients a_0, a_1, a_2,... a_n sont des fonctions entières de x de degré n.

THÉORÈME I. — *Les fonctions* a_0, a_1..., a_n *sont les termes du développement par la formule du binôme de Newton de l'expression :*

$$\left[\left(1 - \frac{x}{h}\right) + \frac{x}{h}\right]^n. \qquad (3)$$

Proposons-nous de démontrer que :

$$a_i = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{1.2 \qquad\qquad i}\left(\frac{x}{h}\right)^i\left(1-\frac{x}{h}\right)^{n-i}. \qquad (4)$$

Pour y arriver, appliquons la formule (2) au cas particulier :

$$M = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{1.2 \qquad\qquad i}\left(\frac{x}{h}\right)^i\left(1-\frac{x}{h}\right)^{n-i}.$$

La forme de cette équation montre immédiatement que la ligne qu'elle représente passe par les points :

$$x = 0, \qquad x = h,$$
$$M = 0, \qquad M = 0.$$

Au premier de ces points, la parabole a, avec l'axe des x, un contact d'ordre $i-1$; car si x est infiniment petit, M est infiniment petit d'ordre i. Au point $x=h$, cette parabole a, avec l'axe des x, un contact d'ordre $n-i-1$, car si $h-x$ est infiniment petit, M est infiniment petit d'ordre $n-i$. Considérons la droite $M=0$ comme une parabole d'ordre n, son polygone d'intégration s'aligne sur la droite, exprimons les deux contacts que nous venons de constater; nous trouvons que les $i-1$ premiers côtés, et les $n-i-1$ derniers côtés des polygones d'intégration de la parabole et de la droite doivent coïncider; donc on a :

$$M_0=0, \quad M_1=0, \quad M_{i-1}=0,$$
$$M_{i+1}=0\ldots\ldots, \quad M_n=0.$$

Il n'y a qu'une seule ordonnée M_i qui ne s'annule pas; nous allons la calculer au moyen de la formule symbolique :

$$M_i=(1+\Delta)^i M_0.$$

Toutes les différences de 0 à $i-1$ s'annulent comme les dérivées; donc cette formule devient :

$$M_i=\Delta^i M_0.$$

Or on a :

$$\Delta^i M_0=\frac{h}{n}\frac{h}{n-1}\cdots\cdots\frac{h}{n-i+1}\frac{d^i M_0}{dx^i}$$

et

$$\frac{d^i M_0}{dx^i}=n(n-i)\ldots\ldots(n-i+1)\frac{1}{h^i}.$$

On trouve donc :

$$M_i=1.$$

La formule (2) appliquée au cas qui nous occupe devient :

$$M=a_i.$$

Donc :

$$a_i=\frac{n(n-1)\ldots\ldots n-i+1}{1\quad 2\qquad\qquad i}\left(\frac{x}{h}\right)^i\left(1-\frac{x}{h}\right)^{n-i};$$

ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. — Le binôme qu'il s'agit de développer pour obtenir les fonctions a_0, a_1.... a_n, a pour valeur l'unité ; donc :

$$\Sigma a_i = 1. \qquad (5)$$

THÉORÈME II. — ***On obtient les extrémités de l'arc des η par un polygone d'intégration; les directrices des sommets de ce polygone divisent le tronçon de poutre en segments proportionnels aux intégrales :***

$$\int \frac{a_0 dx}{\varepsilon}, \quad \int \frac{a_1 dx}{\varepsilon} \ldots \int \frac{a_n dx}{\varepsilon};$$

la base d'intégration se calcule comme si l'intégrale des M devait être divisée par ε_1.

De l'équation (2), on déduit :

$$\eta = \eta_0 + \Sigma M_i \int_0^x \frac{a_i dx}{\varepsilon}. \qquad (6)$$

La valeur de η à l'extrémité du tronçon est :

$$\eta_{n+1} = \eta_0 + \Sigma M_i \int_0^h \frac{a_i dx}{\varepsilon} \qquad (7)$$

Traçons n directrices dans des positions indéterminées ; soient α_0, α_1, ... α_n, les segments de la longueur h divisée par ces directrices ; intégrons la ligne des M par la méthode proposée, mais avec une base telle que l'on obtienne l'intégrale divisée par un coefficient indéterminé ε_1 ; on obtient un polygone FGHIKL (fig. 209, fig. *c*) dont les ordonnées sont :

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= \eta_0 + \frac{M_0 \alpha_0}{\varepsilon_1} \\ \eta_2 &= \eta_1 + \frac{M_1 \alpha_1}{\varepsilon_1} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \eta_{n+1} &= \eta_n + \frac{M_n \alpha_n}{\varepsilon_1} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

d'où :

$$\eta_{n+1} = \eta_0 + \Sigma \frac{M_i \alpha_i}{\varepsilon_i}. \qquad (9)$$

Exprimons que la construction résout le problème quelles que soient les ordonnées $M_0 \ldots M_n$; on trouve en identifiant les équations (9) et (7)

$$\frac{\alpha_i}{\varepsilon_i} = \int_0^h \frac{a_i dx}{\varepsilon}. \qquad (10)$$

Cela démontre la première partie du théorème.

Si nous ajoutons les $n + 1$ équations semblables à (10), on obtient :

$$\frac{\Sigma \alpha_i}{\varepsilon_i} = \int_0^h \frac{\Sigma a_i dx}{\varepsilon}.$$

Mais $\Sigma \alpha_i = h$, $\Sigma a_i = 1$, donc :

$$\frac{h}{\varepsilon_i} = \int_0^h \frac{dx}{\varepsilon}.$$

Cela démontre que le coefficient ε_i est celui de l'équation (1).

THÉORÈME III. — *On obtient un polygone qui touche les extrémités de l'arc des* y, *en intégrant le polygone des* η *avec une base ordinaire; les directrices du polygone des* y *tombent aux centres de gravité que l'on obtient en attribuant successivement aux points du tronçon de poutre les densités :*

$$\frac{a_0}{\varepsilon}, \quad \frac{a_1}{\varepsilon} \ldots\ldots \frac{a_n}{\varepsilon}.$$

En intégrant l'équation (6), on obtient :

$$y_{n+2} = y_0 + \eta_0 h + \Sigma M_i \int_0^h \int_0^x \frac{a_i dx^2}{\varepsilon}. \qquad (11)$$

Appliquons la construction proposée en considérant les directrices comme indéterminées; soient β_0, $\beta_1 \ldots \beta_n$ les dis-

tances de ces directrices au point $x = h$; les segments sont $h - \beta_0$, $\beta_0 - \beta_1$, etc.; on trouve :

$$y_{n+2} = y_0 + \eta_0(h - \beta_0) + \eta_1(\beta_0 - \beta_1) + \ldots + \eta_n \beta_n$$

ou $$y_{n+2} = y_0 + \eta_0 h + \Sigma \beta_i (\eta_{i+1} - \eta_i).$$

Des équations (8) on tire les différences $\eta_{i+1} - \eta_i$ et l'équation précédente devient :

$$y_{n+2} = y_0 + \eta_0 h + \Sigma \beta_i M_i \int_0^h \frac{a_i \, dx}{\varepsilon}. \qquad (12)$$

Identifions l'équation (12) avec l'équation (11) ; il vient $n+1$ équations de la forme :

$$\beta_i \int_0^h \frac{a_i \, dx}{\varepsilon} = \int_0^h \int_0^x \frac{a_i \, dx^2}{\varepsilon}. \qquad (13)$$

L'intégrale seconde du second membre de cette équation est aussi le moment autour du point $x = h$ de la surface représentée par l'intégrale du premier membre ; donc l'une des directrices tombe au centre de gravité de cette surface Ce raisonnement s'applique à toutes les directrices.

En résumé, il faut : 1° intégrer la courbe $z = 1 : \varepsilon$ pour obtenir ε_1 ; 2° intégrer deux fois chacune des fonctions :

$$\frac{a_0}{\varepsilon}, \frac{a_1}{\varepsilon} \ldots \frac{a_n}{\varepsilon}.$$

Les intégrales premières sont proportionnelles aux segments qui séparent les directrices des η. Les tangentes extrêmes aux intégrales secondes se coupent sur les directrices des y.

Occupons-nous spécialement des deux premières directrices ; on a :

$$a_0 = \left(1 - \frac{x}{h}\right)^n,$$

$$\frac{\alpha_0}{\varepsilon_1} = \int_0^h \left(1 - \frac{x}{h}\right)^n \frac{dx}{\varepsilon}. \qquad (14)$$

$$\beta \int_0^h \left(1-\frac{x}{h}\right)^n \frac{dx}{\varepsilon} = \int_0^h \int_0^h \left(1-\frac{x}{h}\right)^n \frac{dx}{\varepsilon}. \quad (15)$$

Intégrons $n+1$ fois la ligne $z = 1 : \varepsilon$; soient les intégrales $u_0, u_1, u_2 \ldots u_{n+1}$; on a (104) :

$$u_n = \int_0^h \frac{(h-x)^n}{1.2\ldots n} \frac{dx}{\varepsilon},$$

$$u_0 = \int_0^h \frac{dx}{\varepsilon_1} = \frac{h}{\varepsilon_1}.$$

Multiplions l'équation (14) par $\frac{h}{1}, \frac{h}{2} \ldots \frac{h}{n}$;

il vient :

$$\alpha_0 u_0 \frac{h}{2}, \frac{h}{3} \ldots \frac{h}{n} = u_n. \quad (16)$$

Cette équation donne α_0, en divisant successivement u_n par u_0, le quotient par $\frac{h}{2}$, etc.

Multiplions l'équation (15) par les mêmes termes; on a :

$$\beta_0 u_n = \int_0^h \int_0^x \frac{(h-x)^n}{1.2.3\ldots n} \frac{dx}{\varepsilon}.$$

L'intégrale seconde du second membre est aussi un moment du premier degré ; donc elle peut s'écrire :

$$\int_0^h (h-x) \frac{(h-x)^n}{1.2.3.n} \frac{dx}{\varepsilon} \quad \text{ou} \quad (n+1)\, u_{n+1}.$$

On a donc

$$\beta_0 u_n = (n+1)\, u_{n+1}.$$

Menons les tangentes aux extrémités de l'intégrale u_{n+1}; elles se coupent en un point dont la distance d au point $x = h$ est donnée par l'équation :

$$d\,u_n = u_{n+1}.$$

D'où $$\beta_0 = (n+1)\,d.$$

Appliquons cette construction au cas d'une droite des M; on a $n = 1$ et :

$$\beta_0 = 2\,\frac{u_1}{u_2} = 2\,d.$$

On retrouve la construction ordinaire du centre de percussion effectué fig. 208, fig. d.

Les autres coefficients α_i et β_i pourraient aussi s'exprimer en fonction des intégrales u_0 à u_{n+1}; mais les méthodes suivantes sont préférables.

555. Deuxième méthode. — Supposons connues les directrices pour le cas d'une parabole des M de degré $n-1$; montrons comment on détermine les directrices pour le cas de la parabole de degré n. Soient pour le cas de la parabole de degré $n-1$: $b'c'$ (fig. 209, a) les directrices du polygone des M; $g'h'i'$, celles du polygone des η; n', p', q', r' celles du polygone des y. Pour le cas de la parabole de degré n, on obtient les directrices bcd du polygone des M en divisant (fig. b) ae en n parties égales. Déterminons les deux premières directrices g et n par la méthode précédente; on obtient (fig b) les directrices h, i, k en reproduisant de g en k les rapports inverses des rapports

$$\frac{ab}{bb'},\ \frac{b'c}{ce'},\ \frac{c'd}{de}$$

comme l'indique les lignes croisées. On obtient de même les directrices p, q, r, s en reproduisant (fig. d) de n en s les rapports inverses des rapports

$$\frac{fg}{gg'},\ \frac{g'h}{hh'},\ \frac{h'i}{ii'},\ \frac{i'k}{kl}.$$

On pourrait démontrer ces relations en utilisant les for-

mules analytiques qui déterminent les directrices ; mais nous arriverons plus rapidement au but de la manière suivante.

Proposons-nous de trouver les η et les y pour la ligne des M :

$$M = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + l.$$

Décomposons M en deux parties :

$$M' = bx^{n-1} + \ldots + l$$
$$M'' = ax^n.$$

Considérons séparément M′ et M″ et additionnons les résultats. Pour les M′, on trouve le polygone des η FG′H′I′K′ (fig. *c*) et le polygone des y MN′P′Q′R′S′ (fig. *e*). Le polygone des M″ est *ad*E′, car la ligne des M″ a un contact d'ordre $n-1$ avec l'axe des x; on trouve le polygone des η'' en *f*KL′ (fig. *b*) et le polygone des y'' en *ms*T′ (fig. *d*). En superposant les M, les η et les y, on trouve :

AB′C DE, FG′H′I′KL, MN P′Q′R ST.

On obtient ainsi les extrémités de l'arc des η et les tangentes extrêmes de l'arc des y en n'utilisant que les deux dernières directrices inconnues k et s; mais les polygones que l'on obtient se déduisent des polygones des M′ et des M″ ; il s'agit d'arriver au même résultat en intégrant le polygone des M sans le décomposer.

Supposons que les directrices k et s soient connues, déterminons les autres par les constructions des figures *b* et *d* ; nous allons prouver qu'en intégrant le polygone des M nous obtenons des polygones inscrits dans les précédents, les côtés extrêmes étant conservés. Démontrons, par exemple, que le côté IK qui s'inscrit dans l'angle I′ est l'intégrale de l'ordonnée du point D. En effet, la dérivée de la corde IK est l'ordonnée du point qui divise la droite C′D′ dans le rapport inverse du rapport $i'i'' : i''k$; par construction (fig. *b*), c'est précisément le point D qui est ce point. Cette démonstration s'applique à tous les autres côtés inscrits, soit du polygone des η, soit du polygone des y ; donc en intégrant le polygone des M, on obtient le même résultat qu'en utilisant les M′ et les M″. Cette solution du problème ne peut pas différer de la

solution trouvée par l'analyse au numéro précédent ; car la théorie analytique prouve qu'il n'y a qu'une solution de cette espèce :

Dans la démonstration, nous avons supposé connues les dernières directions k et s ; si on détermine les deux premières directrices g et n, les constructions des figures b et d sont encore applicables et donnent toutes les autres directrices ; on pourrait même déterminer deux directrices quelconques et en déduire les autres par ces constructions.

556. Troisième méthode. — Soient, pour une parabole des M de degré $n-1$: g, h', i' (fig. 210, fig. b) les directrices du polygone des η ; n', p', q' r' les directrices du polygone des y ; il s'agit d'obtenir ces directrices pour le cas d'une parabole de degré n. Les directrices des η s'obtiennent par la construction de la figure b qui repose sur les proportions :

$$\frac{fg}{gg'} = \frac{mn}{n't}, \qquad \frac{g'h}{hh'} = \frac{mp'}{p't}, \text{ etc.}$$

On détermine la première directrice n du polygone des y ; on obtient les autres par la construction de la figure c qui repose sur les propositions :

$$\frac{nn'}{n'p} = \frac{mn'}{n't}, \qquad \frac{pp'}{p'q} = \frac{mp'}{p't}, \qquad \frac{qq'}{q'r} = \frac{mq'}{q't}, \text{ etc.}$$

Commençons par démontrer la relation :

$$\frac{qq'}{q'r} = \frac{mq'}{q't}.$$

Appliquons la construction ordinaire à la parabole de degré $n-1$ déterminée par le polygone $ab'C'e$ (fig, d) ; c'est un polygone dans lequel toutes les ordonnées sont nulles sauf l'ordonnée $C'c'$; la formule $M = \Sigma M_i a_i$ devient, en donnant à l'ordonnée M_i qui ne s'annule pas, une valeur convenable,

$$M = M_i a_i = \left(\frac{x}{h}\right)^i \left(1 - \frac{x}{h}\right)^{n-i-1}.$$

Nous trouvons de même que si on choisit convenablement les ordonnées Cc et Dd, les paraboles de degré n, représentées

par les polygones *ab*C*de* et *abc*D*e* ont respectivement pour équations :

$$M' = \left(\frac{x}{h}\right)^{i} \left(1 - \frac{x}{h}\right)^{n-i},$$

$$M'' = \left(\frac{x}{h}\right)^{i+1} \left(1 - \frac{x}{h}\right)^{n-i-1}.$$

Si nous additionnons les ordonnées de ces deux polygones, nous obtenons le polygone *ab* C*De* qui représente la parabole $M = M' + M''$, or le calcul donne :

$$M' + M'' = \left(\frac{x}{h}\right)^{i} \left(1 - \frac{x}{h}\right)^{n-i-1}.$$

donc le polygone *ab*C*De* représente la même parabole que le polygone *a'b'C'e*; donc le premier polygone doit s'inscrire dans le second.

Intégrons ces deux polygones, on trouve FH'I'L ou bien FH*i*KL, pour ligne des η; l'intégrale des M' est FH*il*; l'intégrale de M'' est *fi*KL. Menons l'axe des x par le point *i* et construisons les polygones des y; on trouve : pour M, MQ'T ou MQR'T; pour M', MQR*t*; pour M'', *m*QRT. Le côté QR est horizontal, grâce au choix de l'axe $\eta = 0$; nous allons démontrer que MT est parallèle à QR.

En effet, l'intégrale seconde des M' est une ligne des moments; on a donc :

$$Mm = \int_0^{ih} x M' \frac{dx}{\varepsilon}.$$

L'intégrale seconde des M'' est aussi une ligne des moments; on a donc :

$$Tt = \int_0^{h} (h - x) M'' \frac{dx}{\varepsilon}.$$

Les valeurs de M' et de M'' montrent immédiatement que :

$$x M' = (h - x) M'',$$

donc $Mm = Tt$, ce qui prouve que QR et MT sont parallèles.

On trouve alors la proportion :

$$\frac{Qq'}{q'R} = \frac{mq'}{q't}.$$

Connaissant le point q' et l'un des points q ou r', on trouve l'autre. En répétant la figure f pour tous les points analogues à q', on trouve la figure c; on voit que si on connaît n', p', q', r', il suffit de déterminer l'une des directrices nouvelles telles que n; la figure c donne toutes les autres.

Il nous reste à démontrer la règle que nous avons annoncée pour la détermination des nouvelles directrices des r_i : g, h, i, k. Nous savons déjà que l'on a :

$$\frac{i'k}{kl} = \frac{r's}{r'r}.$$

Nous venons de prouver que :

$$\frac{r's}{rr'} = \frac{r't}{mr'}.$$

Donc on a :

$$\frac{i'k}{kl} = \frac{rt}{mr'}.$$

De là on déduit la construction indiquée (fig. b) : menons $i't$ et lm; joignons r' au point de concours et prolongeons; on obtient k; on trouve de même les autres points.

CHAPITRE II.

Poutres sur deux appuis.

§ 1. Charge permanente.

557. Forces isolées. — Soit AB (fig. 211, fig. a) une poutre droite portant quatre poids. La ligne de K est une ligne à gradins (fig. b) que l'on trace immédiatement; on laisse indéterminée la ligne de repère CD, dont la position dépend de la grandeur de la réaction DT de l'appui B. La ligne des M s'obtient (fig. c) en intégrant la précédente. Les lignes de repère se déterminent par les conditions d'équilibre; le

moment fléchissant est nul sur les appuis ; la ligne de repère des M est donc EF.

Dérivons la droite EF ; on obtient l'horizontale CD ; c'est la ligne de repère des efforts tranchants.

Il est facile de voir que la droite CD a pour ordonnée, par rapport à un axe horizontal quelconque, l'ordonnée moyenne de la ligne des K ; en effet, EF est une corde de l'intégrale de la ligne des K (8). Cette propriété résulte aussi de ce que le moment fléchissant est nul sur les appuis ; le moment fléchissant est, en effet, la surface engendrée par les ordonnées de la ligne des K ; cette surface est donc nulle entre les appuis. Il faut pour cela que la surface négative située au-dessus de CD, soit équivalente à la surface située au-dessous de la même droite CD : c'est ce qui caractérise l'ordonnée moyenne.

Pour obtenir la courbe des déformations, effectuons une double intégration de la ligne des M. La première intégration donne la ligne des η ; on obtient (fig. *d*) un polygone circonscrit à l'intégrale ; la ligne des η est formée d'arcs paraboliques du second degré déterminés chacun par ses deux tangentes extrêmes. On remarquera que pour obtenir les M sur l'axe du diagramme des inclinaisons des η, il faut projeter la ligne des M par des droites parallèles à la ligne de repère EF.

La seconde intégrale de la ligne des M est la ligne des y ; nous avons déterminé les ordonnées moyennes des arcs de la ligne des η (19) ; nous en avons déduit un polygone inscrit à la ligne des y (fig. *e*). On obtient les lignes de repère comme précédemment ; sur les appuis, les y sont nuls ; donc la ligne de repère des y est la droite KL ; en dérivant KL, on trouve la ligne de repère GH de la ligne des η ; GH a pour ordonnée l'ordonnée moyenne de la ligne des η.

558. Échelles et bases d'intégration. — La base d'intégration λ, pour la ligne des M, est donnée par la formule connue (50) qui devient :

$$\lambda = \frac{\text{mètre} \times \text{tonne}}{\text{tonne-mètre}}.$$

On peut aussi obtenir λ graphiquement.

Pour obtenir les η à une échelle déterminée d, on devrait déterminer la base d'intégration par la formule du numéro 55; η est l'intégrale des M multipliée par $1 : \varepsilon$, on a donc

$$\lambda = \frac{\text{tonne-mètre} \times \text{mètre}}{d} \varepsilon.$$

Au lieu d'appliquer cette formule, nous avons choisi arbitrairement la base d'intégration; on détermine alors l'échelle des η, en appliquant l'intégration à un exemple simple. Supposons connu le moment fléchissant μ qui développe dans une des fibres extrêmes la dilatation maxima $\delta = R : E$; soit V la distance de cette fibre à la fibre moyenne; si ce moment fléchissant sollicitait la poutre sur une longueur l, on aurait :

$$d\eta = \frac{\delta ds}{V}, \qquad \eta = \frac{\delta l}{V}.$$

Nous aurons $\eta = 0{,}001$, si

$$\frac{\delta l}{V} = 0{,}001, \quad \text{d'où} \quad l = \frac{V}{1000\,\delta}.$$

Calculons l, en intégrant μ sur cette longueur, on trouve l'ordonnée qui représente $\eta = 0{,}001$.

Supposons, par exemple, que la poutre soit en fer et que $V = 0^m30$; on trouve $l = 1$ mètre. Nous avons pris $NH = 2^m$; nous avons supposé que la poutre soit calculée pour résister au moment fléchissant maximum représenté par 09 (fig. c); nous obtenons MN qui doit représenter $\eta = 0{,}002$.

On trouve de même l'échelle des y; on a :

$$y = \int \eta dx.$$

Supposons $\eta = MN = 0{,}002$; on trouve une valeur de y représentée par RS; or cette valeur de y est :

$$y = 0{,}002 \times 2 = 0^m004.$$

Si RS représente 4 millimètres, on sait facilement en déduire l'échelle des y.

559. Charges uniformes. — Soit (fig. 212) AB une poutre portant deux charges uniformément réparties; la

courbe des deux charges se composent de deux horizontales. Intégrons de gauche vers droite, afin de montrer l'influence du sens de l'intégration sur les lignes des K et des η. On obtient pour la ligne des K une ligne brisée 12 (fig. *b*); on obtient pour ligne des M deux arcs paraboliques du second degré que l'on détermine par leurs tangentes extrêmes. En subdivisant la poutre en tronçons plus petits, on aurait obtenu autant de points et de tangentes que l'on aurait voulu; mais il est à remarquer que si chaque arc est déterminé par ses tangentes extrêmes, il est bien facile de trouver des points et tangentes intermédiaires. On obtient les lignes de repère EF et CD comme précédemment.

On obtient la ligne des η en intégrant celle des M; on trouve (fig. *d*) deux arcs paraboliques du troisième degré; on détermine chacun d'eux par ses tangentes extrêmes avec un côté auxiliaire. La ligne des y est formée de deux arcs paraboliques du quatrième degré que l'on détermine chacun par un polygone d'intégration de 4 côtés (fig. *e*). Les lignes de repère sont KL et sa dérivée GH; comme précédemment, les lignes de repère des K et des η, ont pour ordonnées les ordonnées moyennes des K et des η. Le polygone d'intégration de la ligne des y tel que nous l'avons tracé, ne donne que la déformation au milieu de la poutre; mais on obtiendrait d'autres points en subdivisant la poutre en tronçons plus petits et en recommençant l'intégration. On peut aussi appliquer la règle du corollaire du numéro 549.

560. Charge variable. — Soit AB (fig. 213) une poutre supportant une charge variable; supposons que la courbe des charges soit un arc parabolique du second degré déterminé par trois points. On détermine aisément les tangentes extrêmes à cet arc. On obtient alors pour ligne des K, un arc parabolique du troisième degré et pour ligne des M, un arc parabolique du quatrième degré. Chacun de ces arcs est déterminé par son polygone d'intégration: les lignes de repère sont EF et CD. Nous aurions obtenu un nombre quelconque de points des lignes des K et des M en subdivisant la poutre en tronçons; la courbe des charges est l'intégrale

d'une droite facile à tracer ; on intègre cette droite en prenant un nombre suffisant de tronçons ; le problème est résolu. Nous avons sur la figure déterminée le moment fléchissant au milieu de la poutre, en appliquant la règle du corollaire du numéro 549; nous avons inscrit : KLMN, dans EGF; PQR, dans KLMN; ST, dans PQR; ST touche la parabole au point H.

561. Poutre qui se prolonge au-delà des appuis. — Reprenons la poutre AB de la figure 211; mais supposons que les appuis soient placés en A′ et en B′; les lignes des K et des M ne sont pas changées, mais il s'agit de trouver les lignes de repère. Occupons-nous d'abord de la ligne des M (fig. *b*); entre l'extrémité B et la force la plus voisine, le moment fléchissant est nul; donc, pour le tronçon BB′ la ligne de repère est FF′ prolongement du côté 1 ; on trouve de même la ligne de repère EF′ pour le tronçon AA′. Entre A′ et B′, la ligne de repère diffère des deux précédentes à cause des réactions d'appuis; mais comme le moment fléchissant doit varier continûment, cette ligne de repère est E′F′. En dérivant le polygone EF′E′E, on obtient TT′D′C′U′U ; c'est la ligne de repère des efforts tranchants.

§ 2. Train mobile.

Le passage d'un train sur une poutre provoque des lignes des K et des M variables ; il s'agit de déterminer en chaque point l'effort tranchant et le moment fléchissant maximum. Dans les applications, il y a lieu de considérer un poids mort ; nous ne nous occuperons que de la charge mobile, on y ajoute facilement l'effet de la charge permanente.

562. Théorème I. — *Quand un train passe sur une poutre, les sommets du polygone des moments fléchissants décrivent des paraboles du second degré, les sommets du polygone des efforts tranchants décrivent des droites parallèles. Les paraboles ont pour dérivée seconde le double de la charge moyenne ; les droites ont pour dérivée cette même charge moyenne.*

Prenons l'appui de gauche pour origine d'abscisse; soient: x l'abscisse d'un point quelconque, M et K le moment fléchissant et l'effort tranchant en ce point; P, P', P''... les forces situées à gauche de ce point; a, a', a''... les abscisses des points d'application de ces forces; Q, Q', Q''... les forces situées à droite du point x; b, b', b''... les abscisses des points d'application de ces forces; $q = (\Sigma P + \Sigma Q) : l$, la charge moyenne.

La réaction R de l'appui de droite est donnée par l'équation:

$$R l = \Sigma P a + \Sigma Q b. \qquad (1)$$

L'effort tranchant au point x, pour le tronçon de droite, est:

$$K = - R + \Sigma Q,$$

pour le tronçon de gauche, on a:

$$K = R - \Sigma Q.$$

Le moment fléchissant est:

$$M = - R (l - x) + \Sigma Q (b - x).$$

En éliminant R, on trouve:

$$K = \Sigma P \frac{a}{l} + \Sigma Q \left(\frac{b}{l} - 1\right) \qquad (2)$$

$$M = - \Sigma P \frac{a}{l} (l - x) - \Sigma Q \left(1 - \frac{b}{l}\right) x. \qquad (3)$$

Supposons que les abscisses a, a',... b, b'... s'appliquent à une position déterminée du train; si le train se déplace d'une quantité variable u, toutes ces abscisses augmentent de u; les équations (2) et (3) deviennent en remplaçant a, b.... par $a + u$, $b + u$....:

$$K = \Sigma P \frac{a}{l} + \Sigma Q \left(\frac{b}{l} - 1\right) + u \frac{\Sigma (P + Q)}{l} \qquad (4)$$

$$M = - \Sigma P \frac{a}{l} (l - x) - \Sigma Q \left(1 - \frac{b}{l}\right) x + u \left(\Sigma \frac{Q}{l} x - \Sigma P \frac{l - x}{l}\right) \qquad (5)$$

Appliquons ces équations au point d'application de la force P; pour cela prenons:

$$x = a + u, \qquad (6)$$

Éliminons u des équations (4), (5), (6), on trouve :

$$K = \Sigma P \frac{a}{l} - \Sigma Q \left(\frac{b}{l} - 1\right) + (x - a) \frac{\Sigma (P + Q)}{l} \quad (7)$$

$$M = -\Sigma P \frac{a}{l}(l - x) - \Sigma Q \left(1 - \frac{b}{l}\right) x + (x - a) \left(\Sigma \frac{Qx}{l} - \Sigma P \frac{l - x}{l}\right). \quad (8)$$

On tire de là :

$$\frac{dK}{dx} = \frac{\Sigma P + Q}{l} = q, \quad (9)$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = 2q, \quad (10)$$

c'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

563. Théorème II. — *Quand un train passe sur une poutre, les côtés du polygone des moments fléchissants pivotent autour de points fixes ; les abscisses des pivots s'obtiennent en divisant la portée de la poutre en parties proportionnelles aux forces mobiles.*

En effet, l'équation (5) représente un des côtés du polygone ; u est un paramètre variable ; c'est l'équation d'un système du premier degré ; le côté passe constamment par le point déterminé par les deux équations :

$$\Sigma P (l - x) - \Sigma Q x = 0, \quad (11)$$

$$M = -\Sigma P \frac{a}{l}(l - x) - \Sigma Q \left(1 - \frac{b}{l}\right) x. \quad (12)$$

De l'équation (11), on tire :

$$\frac{x}{l - x} = \frac{\Sigma P}{\Sigma Q}.$$

Le pivot du côté compris entre les forces P, P'... et les forces Q, Q'... divise donc la portée dans le rapport $\Sigma P : \Sigma Q$; on obtiendra par conséquent les abscisses de tous les pivots en divisant la portée dans les rapports des forces mobiles ; on détermine les pivots eux-mêmes en traçant le polygone des M pour une position quelconque du train.

Nous avons dit que les différentes positions d'un côté forment un système du premier degré en u ; on reconnaît

facilement que l'axe des u est vertical; donc, en pivotant, chacun des côtés détermine sur une verticale quelconque, des longueurs proportionnelles au déplacement du train.

564. Force unique. — Soient : (fig. 214) AB la poutre ; MCDEFN et KHG la ligne des K et la ligne des M pour une position de la force mobile. En conservant la même ligne de repère GK, les pivots des côtés sont évidemment G et K. Le point H décrit une parabole; lorsque la force mobile se trouve aux extrémités de la poutre, le point H prend les positions G et K ; donc la parabole est déterminée par trois points; on peut la tracer par points et tangentes (85 à 90). Les différentes méthodes que nous avons données à ce sujet peuvent facilement se retrouver en utilisant les propriétés des lignes des M ; ainsi le tracé du n° 88 s'obtient aisément en remarquant que le côté mobile HK détermine sur la verticale du point G des distances proportionnelles au déplacement de la force. La parabole GHK est le lieu des plus grands moments fléchissants.

Les points D et E du lieu des K décrivent des droites; on obtient deux points de chacune de ces droites en plaçant la force sur les appuis.

565. Cas général. — Étudions (fig. 215) l'influence du passage d'un train sur une poutre sur deux appuis. Soient : (fig. a) la poutre et le train dans une position ; (fig. b) le lieu des K ; (fig. c) la ligne des M. La ligne de repère AF de la ligne des M est horizontale parce que nous avons placé les forces dans une position telle que les réactions HL et GK se déterminent par raison de symétrie; mais les raisonnements qui suivent ne perdront rien de leur généralité.

Le sommet M de la ligne des K décrit une droite dont la dérivée est q ; la direction de cette droite est KL. En faisant mouvoir le train, on trouve que le point M décrit M'M" ; la position M" correspond à l'instant où une nouvelle force arrive sur la poutre ; le point M" décrit alors la droite M"N parallèle à K'L ; en considérant les positions qui précèdent, on trouve que le point M décrit la ligne GM'MM"N On trouve de même le polygone décrit par les autres sommets ; l'épure

indique quels sont les efforts tranchants limites ; ainsi, c'est le sommet M qui donne les plus grands efforts tranchants négatifs ; on trouverait de même les plus grands efforts tranchants positifs.

Passons aux moments fléchissants. Soit ABCDF (fig. *c*) le lieu des M pour une position du train ; nous obtiendrons les abscisses des pivots en divisant la poutre en segments proportionnels aux forces ; les points P_1, P_2, P_3 de la droite KL (fig. *b*) déterminent ces abscisses ; on les rapporte sur la figure *c* en P_1, P_2, P_3. Chaque sommet du polygone des M décrit une parabole déterminée par trois points et que l'on trace comme au numéro précédent. Ainsi le sommet C décrit une parabole qui passe par les points P_1, C et P_2. Pour obtenir, en chaque point de la poutre, les plus grands moments fléchissants, on doit placer le train mobile dans toutes les positions. Il arrive qu'une force nouvelle s'introduit sur la poutre ; ainsi pour la position AB'C'D'E'F, une force est sur l'appui A ; il suffit de déterminer graphiquement l'un des sommets de ce polygone pour obtenir tous les autres au moyen des pivots ; faisons mouvoir le train vers la droite ; les pivots se déplacent brusquement ; les abscisses des nouveaux pivots sont données par les points Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 de la droite K'L (fig. *b*) ; on les rapporte sur la figure *c* et on trace les paraboles. L'épure indique quelles sont les positions du train qu'il faut considérer pour obtenir les plus grands moments fléchissants dans les différentes parties de la poutre ; on ne trace que les paraboles qui font partie de la courbe limite.

Lorsque la portée de la poutre est considérable, il est avantageux de remplacer certains groupes de forces par leurs résultantes ; ainsi dans la figure 216, nous avons remplacé les forces par trois résultantes ; le sommet D décrit la parabole PDQ ; le sommet C, la parabole CPR. Si on remplace les résultantes par leurs composantes, les angles C et D sont remplacés par des polygones inscrits ; mais on reconnaît immédiatement que ce sont les sommets qui accompagnent le point D qui donneront les plus grands moments fléchissants dans la région PQ et qu'il faut se rapprocher de la

position pour laquelle l'ordonnée du point D est maximum; on peut de cette manière éviter des essais inutiles. Entre les points P et Q on exécutera la même épure que s'il s'agissait d'une poutre dont la portée serait la projection horizontale de PQ. Pour résoudre complètement la question, il faut considérer successivement les différentes régions de la poutre et tracer les paraboles limites.

566. Assimilation à une charge permanente. — Lorsque le même système de forces se déplace sur la poutre, le lieu des plus grands moments fléchissants est formé d'arcs paraboliques; on peut démontrer que ces arcs paraboliques sont précisément la ligne des M pour une charge permanente composée comme suit : 1° une charge $2q$ sur toute la poutre; 2° des forces isolées dirigées de bas en haut, passant par les pivots et données par la formule $F = q\gamma$, γ étant la distance entre deux forces voisines, F la force qui passe par le pivot du côté de la ligne des M compris entre ces deux forces.

567. Deuxième méthode. - Traçons une ligne des M pour le train donné et pour une poutre indéterminée; faisons mouvoir la poutre sous les forces, on aura pour chaque position de la poutre une corde pour ligne de repère; on obtient ainsi les moments fléchissants pour toutes les hypothèses et en tous les points de la poutre. Pour avoir le maximum des moments fléchissants en un point de la poutre, on relève tous les moments fléchissants en ce point pour toutes les positions de la poutre, on les porte en ordonnée à partir d'un axe horizontal, on trace la courbe et on mène une tangente horizontale.

Lorsque l'on ne veut obtenir que le plus grand de tous les moments fléchissants, il suffit de chercher le maximum des ordonnées comprises entre la ligne des M et l'enveloppe des lignes de repère; cette méthode est celle qui est donnée dans la plupart des ouvrages de statique graphique.

568. Méthode expéditive. — Au lieu de déterminer les plus grands moments fléchissants et efforts tranchants en tous les points, on peut se borner à chercher le maximum

absolu des moments fléchissants ; on remplace alors le train par une charge uniforme qui réalise le même moment fléchissant maximum. Le problème à résoudre est alors beaucoup plus facile ; le tracé graphique indique rapidement la parabole qui dépasse les autres ; on y mène une tangente parallèle à la ligne de repère (90).

569. Charge uniforme mobile. — On sait que toute charge isolée produit, sur une poutre sur deux appuis, des moments fléchissants de même signe ; on obtiendra donc les plus grands moments fléchissants en chargeant toute la poutre ; le tracé de la ligne des M est donc le même que pour une charge permanente.

Occupons-nous de la ligne des K. Soient : (fig. 217) la poutre A'B' ; D'', un point quelconque. On reconnaît facilement qu'une force isolée produit en D'' un effort tranchant de l'un ou l'autre signe selon que cette force est à droite ou à gauche du point D'' ; donc en chargeant le tronçon A'D'', on aura l'un des efforts tranchants limites au point D'' ; en chargeant le tronçon D''B', on obtiendra l'autre limite. Soit CDE la ligne des K pour la courbe des charges C'D'D''B' ; l'ordonnée Dd' est la limite des efforts tranchants négatifs ; au point de vue de l'épure, le point D est la limite supérieure des efforts tranchants. Il s'agit de tracer le lieu du point D ; remarquons que la ligne de repère AB est l'horizontale moyenne de la ligne CDE ; on a donc :

$$\mathrm{D}d' \times \mathrm{AB} = \text{aire CFD} = \text{aire AK}d'$$

$$\mathrm{D}d' = \frac{\text{aire AK}d'}{\mathrm{AB}}.$$

Intégrons AKM en prenant AB comme base d'intégration ; nous obtiendrons la parabole ADN ; c'est la limite supérieure des efforts tranchants. On trouverait de même la limite inférieure ; on reconnaît d'ailleurs aisément que les deux courbes limites sont symétriques par rapport au milieu de la poutre.

Menons la droite AK' dont l'inclinaison soit $p : 2$; on obtient aussi la parabole ADN en multipliant les ordonnées de cette droite par ses abscisses ; on a évidemment :

$$\mathrm{D}d' \times \mathrm{AB} = \mathrm{K}'d' \times \mathrm{A}d'.$$

§ 3. Charges transmises par entretoises.

Nous admettrons que la charge qui se trouve comprise entre deux entretoises se décompose en deux résultantes appliquées sur ces entretoises ; il s'agit d'examiner l'influence de cette décomposition sur les lignes des K et des M.

570. Charge fixe. — Soient : (fig. 218) AB, un tronçon de poutre, CD la ligne des K, EF la ligne des M. Supposons que la charge qui agit sur la distance AB se transmette sur la poutre par deux entretoises placées en A et en B ; cette charge se décompose en deux résultantes appliquées en A et en B ; nous savons qu'alors (128) l'arc EF est remplacé par la corde EF et que la ligne CD est remplacée par l'horizontale moyenne MN. Ce que nous disons de l'intervalle AB, nous le dirions de tous les intervalles compris entre deux entretoises. On voit donc que les entretoises ont pour effet de remplacer la ligne des M par un polygone inscrit dont les sommets se trouvent sur les verticales menées par les entretoises ; la ligne des K s'obtient en dérivant ce polygone. Si on trace la ligne des M en intégrant par polygone inscrit, on obtient directement les véritables lignes des K et des M.

571. Forces mobiles. — Il est d'abord facile de démontrer que toute corde de la ligne des M, comprise entre deux verticales fixes, pivote autour d'un point fixe, quand on fait mouvoir le système de forces. Soient : x', x'' les abscisses des extrémités de la corde ; M', M'' les ordonnées de ces extrémités ; l'équation de la corde est :

$$M - M' = \frac{M'' - M'}{x'' - x'}(x - x').$$

Appelons, comme au numéro 563, u, le déplacement du système de forces ; M' et M'' sont des fonctions linéaires de u, il en est de même de M ; donc les positions des cordes forment un système du premier degré en u et l'axe des u est vertical. Il faut remarquer que si une force nouvelle s'intro-

duit ou si une force disparaît, soit de la poutre, soit de l'intervalle compris entre les entretoises, le pivot subit un déplacement brusque; dans ce cas la corde enveloppe un polygone dont les sommets sont les diverses positions des pivots.

Considérons d'abord le cas d'une force unique (fig. 214) et examinons l'influence de deux entretoises placées sur les verticales des points S et T. Pour une position H de la force, on obtient la corde UV; si la force vient en S et en T, on obtient les positions limites SY et TX; ces droites se coupent en R et l'on voit que l'arc SHT doit être remplacé par les côtés SR et RT. On trouve l'effort tranchant dans chaque position par l'inclinaison de la corde; on reconnaît facilement que l'horizontale S'R' donne la limite supérieure des efforts tranchants. On opère de même pour tous les intervalles.

Connaissant les 3 points G, S, K, on obtient la parabole des M en multipliant les ordonnées de la droite SK par ses abscisses comptées à partir du point G. On trouve le point T en menant YX parallèlement à GK et en tirant la droite GXT. De cette construction résulte la position du pivot R; on démontre facilement que la verticale du point R divise dans le même rapport la distance des entretoises et la distance des appuis.

Si la force passe par le point R, on peut considérer GXYK comme la ligne des M à une échelle réduite; à l'échelle vraie, ce lieu devient GUVK; mais UV, comme XY, est parallèle à GK, donc l'effort tranchant est nul entre les entretoises. Si la force se meut de la gauche vers la droite du point R, la ligne UV pivote autour de R, l'effort tranchant change de signe. On déduit de là que si la poutre supporte une charge uniforme mobile, c'est en chargeant la poutre dans l'étendue GR, puis dans l'étendue RK, que l'on obtiendra les deux limites de l'effort tranchant dans l'intervalle des entretoises.

Considérons le cas d'un système quelconque de forces; soient (fig. 219): PABCQ une partie de la ligne des M pour une position des forces; E, F, les entretoises; P et Q les pivots des côtes des M qui sortent de l'intervalle compris

entre les entretoises, M, N les pivots des côtés AB, BC. Pour la position ABC, le sommet C est sur l'entretoise F, la ligne des M doit être remplacée par la corde dirigée suivant RC. Faisons mouvoir le train vers la gauche : cette corde pivote autour du point R. Lorsque le sommet A vient en A', cette corde prend la direction RS. Au-delà de cette position, une force s'échappe de l'intervalle compris entre les entretoises, la loi change, la corde pivote autour d'un autre point S ; les plus grands moments sont représentés par le polygone CRSB'.

Pour déterminer ce polygone avec facilité, cherchons d'abord les abscisses des pivots par une épure spéciale.

Quand les trois sommets ABC sont situés entre les entretoises, la corde des M est la même que si la résultante des trois forces agissait ; or les côtés PA et QC pivotent autour de P et Q ; on se trouve donc dans le même cas que celui d'une force unique sur une poutre PQ ; la verticale du pivot R divise PQ et la distance entre les entretoises dans le même rapport, Menons F'F'' parallèlement à P'Q' (fig. *b*) ; joignons P'E', Q'F'' ; ces droites se coupent en R' sur la verticale du pivot R. Reculons le système des forces jusqu'à ce que A vienne en A' ; ce point A' est sur la parabole AMP ; joignons A'R, nous obtiendrons en CR et SR les deux positions extrêmes de la corde qui pivote autour de R. Quand le sommet A passe au-delà de E, la corde des M tourne autour d'un nouveau pivot S et s'appuie sur les côtés qui pivotent autour de M et de Q, on obtient un point S' de la verticale du pivot S en joignant M'E' et Q'F'' qui se coupe en S'. La corde pivote de SR à SB'. Les autres positions donnent un pivot T ; la corde B'T vient en C'T, les moments fléchissants diminuent ; il est inutile de considérer ces positions.

Passons aux efforts tranchants. Nous avons vu (fig. 215) que c'est en général en suivant la première force que l'on trouve les plus grands efforts tranchants ; quand il y a des entretoises, il s'agit de savoir si entre deux entretoises, on obtiendra l'effort tranchant le plus grand, en faisant avancer cette force jusqu'à la première entretoise, ou en faisant avancer une partie du train dans l'intervalle des deux entre-

toises. Nous allons démontrer qu'il faut faire avancer le train jusqu'au moment où la charge moyenne devient plus grande entre les entretoises que sur la poutre toute entière. En effet, soient : Q, Q', Q'' les forces engagées dans l'intervalle considéré λ ; P, P', P''... toutes les forces. Si le train s'avance de Δu, les sommets du lieu des K tracé comme s'il n'y avait pas d'entretoises, décrivent la droite d'inclinaison q ; cela revient à dire que le lieu des K subit une translation horizontale Δu, et s'élève de $q\Delta u$. Entre les deux entretoises, l'effort tranchant véritable pour chaque position est l'ordonnée moyenne $\int K dx : \lambda$; l'effort tranchant négatif augmente de $q\Delta u$ à cause de la translation verticale ; il diminue de $\Sigma Q \Delta u$: ou $q'\Delta u$ à cause de la translation horizontale ; donc l'horizontale des efforts tranchants vrais s'élève de :

$$(q - q')\,\Delta u.$$

Si $q' < q$, l'effort tranchant augmente en faisant avancer le train vers la gauche, on s'arrêtera dès que q' devient plus grand que q.

Lorsque λ est très petit, la première force donnerait déjà $q' = Q : \lambda > q$; cette force s'arrêtera sur la première entretoise. Si λ est plus grand et si $Q : \lambda < q$, on fait avancer la première force jusqu'à ce que la seconde force Q' arrive sur la première entretoise ; on s'arrêtera dans cette position si $Q + Q' : \lambda > q$. Si λ est encore plus grand, et si l'on a $Q + Q' : \lambda < q$, on fait avancer le train jusqu'au moment où la troisième force se trouve sur l'entretoise, etc.

572. Charge uniforme mobile. — Il est d'abord évident que l'on obtiendra les plus grands moments fléchissants en chargeant toute la poutre, car toute charge que l'on introduit fait naître des moments fléchissants de même signe ; on est donc ramené au cas d'une charge permanente. Il nous reste à nous occuper du lieu des K.

Soient (fig. 217) : $a'b'$, l'intervalle compris entre deux entretoises ; CDE, la ligne des K pour une position de la surcharge ; RS, l'horizontale qui remplace une partie de cette ligne

quand il y a des entretoises. Soient : $x_0 = Aa$, $x = Ad'$, $x' = ad'$, $l = AB$, $\lambda = ab$; on a :

$$Dd' \times l = px \times \frac{x}{2},$$

$$Dd \times \lambda = px' \times \frac{x'}{2}.$$

L'effort tranchant $K = Dd' - Dd$ a donc pour valeur :

$$K = \frac{px^2}{2l} - \frac{px'^2}{2\lambda}.$$

On a aussi $x - x' = x_0$. Déterminons x de manière que K passe par un maximum ; on trouve :

$$\frac{pxdx}{l} - \frac{px'dx'}{d} = 0 \quad \text{et} \quad dx - dx' = 0.$$

On en déduit :

$$\frac{x}{l} = \frac{x'}{\lambda}.$$

Cette proportion est précisément celle qui détermine le point qui divise dans le même rapport la distance des entretoises et celle des appuis ; nous sommes déjà arrivé à ce résultat d'une autre manière (571). On en déduit :

$$\frac{x}{l} = \frac{x'}{\lambda} = \frac{x_0}{l - \lambda}.$$

La valeur de K devient en remplaçant x et x' par leurs valeurs :

$$K = \frac{px_0^2}{2(l - \lambda)}.$$

Or au point a l'effort tranchant K' a pour valeur :

$$K' = \frac{px_0^2}{2l}.$$

On a donc :

$$K = K' \frac{l}{l - \lambda}.$$

Cette équation justifie la construction suivante :

Soit $Ua = K'$; tirons la droite AU, l'horizontale UV, la droite BV ; l'horizontale RS qui passe par le point de rencontre des droites AU et BV est précisément la limite supérieure des efforts tranchants, dans l'intervalle ab. En raisonnant de la même manière pour tous les intervalles analogues, on trouve que la parabole AN doit être remplacée par une ligne à gradins dont toutes les horizontales se déterminent comme la ligne RS.

On peut aussi démontrer que RS coupe la tangente U à la courbe des K', au milieu de l'intervalle compris entre les ordonnées des points U et D ; cela permet de trouver RS d'une autre manière.

Si en particulier les entretoises sont à égale distance les unes des autres, les points analogues au point où la tangente U est coupée par RS, sont aussi à égale distance les unes des autres ; la construction peut être considérablement simplifiée.

CHAPITRE III.

Poutres encastrées prismatiques.

§ 1. Poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre.

573. Forces isolées. — Soit (fig. 220) AB une poutre encastrée en A, libre en B, sollicitée par trois forces. Le lieu des efforts tranchants est une ligne à gradins DE ; la ligne de repère CD est déterminée par la condition : $K = 0$ au point B. La ligne des M est un polygone DF, intégrale de la ligne des K ; la ligne de repère DC est déterminée par la condition : $M = 0$ au point B. La ligne des η est formée d'une série d'arcs paraboliques du second degré ; on la détermine par un polygone circonscrit GK ; la ligne de repère GH est déterminée par la condition : $\eta = 0$ au point A. La ligne des y est formée d'arcs paraboliques du troisième degré ; on la détermine par le polygone d'intégration ML ; la ligne de repère MN se dé-

termine par la condition : $y = 0$ au point A. Le polygone ML donne exactement trois points de la ligne des y; mais on peut en déduire facilement autant de points et de tangentes que l'on veut.

574. Charges uniformément réparties. — Soit (fig. 221) AB une poutre supportant deux charges uniformément réparties, l'une égale à BB', l'autre à AA'; la poutre est encastrée en A et libre à l'extrémité B.

La ligne des K est le polygone DE, la ligne de repère est CD. La ligne des M est formée de deux arcs paraboliques du second degré; elle est déterminée par le polygone circonscrit GK; la ligne de repère est FG. La ligne des η est formée de deux arcs paraboliques du troisième degré; elle est déterminée par le polygone d'intégration LM; la ligne de repère est MN. Enfin la ligne des y est formée de deux arcs paraboliques du quatrième degré; elle est déterminée par le polygone d'intégration PR; la ligne de repère est PQ.

575. Charge variable. — Soit AB (fig. 222) une poutre encastrée en A, libre en B; supposons que la courbe des charges soit une droite A'B'. On trouve successivement pour ligne des K, des M, des η, des y, des paraboles du second, du troisième, du quatrième et du cinquième degré, elles sont respectivement déterminée par les polygones DE, GK, LM, PR; les lignes de repère sont CD, FG, MN, PQ.

576. Expressions de la valeur de y à l'extrémité libre. — Sur l'épure des η, les y sont évidemment représentés par des aires :

$$\varepsilon y = \text{S}. \qquad (1)$$

Sur l'épure des M, les η sont représentés par des aires, les y par des moments (539). Ainsi, soit (fig. 222) μ le moment, autour de l'extrémité G, de l'aire FGK limitée par la ligne des M; on a ;

$$\varepsilon y = \mu. \qquad (2)$$

Sur l'épure des K, les y représentent les moments d'inertie divisés par 2 ; mais il faut pour cela prendre pour lignes de

repère, les paraboles osculatrices (107). Ainsi au point R, la parabole osculatrice est une droite, car $M = 0$; on a donc en P'P une ordonnée qui représente le demi-moment d'inertie de l'aire EDC autour de la verticale du point C. L'ordonnée RQ a une signification bien simple. En P, la parabole osculatrice est l'intégrale seconde de $M = M_0$, M_0 désignant le moment fléchissant dans la section d'encastrement. Soit y', l'ordonnée au point Q de cette parabole osculatrice ; cette parabole passe sous le point R et l'on a :

$$\varepsilon (y' - y) = \frac{1}{2} I.$$

I est le moment d'inertie de l'aire ECD autour de la verticale du point D. Or on a :

$$\varepsilon y' = \frac{M_0 l^2}{2}.$$

Il vient donc :

$$\varepsilon y = \frac{M_0 l^2}{2} - \frac{I}{2}. \qquad (3)$$

Les formules (1), (2), (3) s'appliquent aussi à une poutre quelconque, si on prend comme ligne de repère des y une tangente à la fibre moyenne déformée et si on assimile le point de contact à une section d'encastrement ; il est à remarquer, en effet, que tous les raisonnements qui précèdent subsistent complètement.

On peut aussi représenter les deux dernières valeurs par des aires ; prenons l'extrémité libre comme origine, on a :

$$\varepsilon y = \mu = \int_0^l M x \, dx,$$

$$\varepsilon y = \frac{M_0 l^2 - I}{2} = \frac{1}{2} \int_0^l K (l^2 - x^2) \, dx.$$

Les aires qui représentent y sont limitées par les courbes Mx, et $K (l^2 - x^2)$ que l'on obtient par une méthode connue (70).

§ 2. Poutres encastrées à ses deux extrémités.

577. Solution par l'épure des y. — Intégrons quatre fois la courbe des charges en nous donnant arbitrairement les premiers points ; nous obtiendrons les lignes des K, des M . des η, des y ; il s'agit de trouver les lignes de repère. Soit, (fig. 223) ACD la ligne des M ; la ligne des M' est une droite inconnue A'B'. Nous avons représenté la ligne des η par sa corde EF, la ligne des y par ses tangentes extrêmes, afin de simplifier la figure qui est destinée uniquement à l'explication de la méthode. La ligne des η' est une parabole du second degré qui doit être déterminée par deux tangentes extrêmes ; la ligne des y' est une parabole du troisième degré qui doit être déterminée par un polygone d'intégration de trois côtés. Exprimons les conditions de la déformation ; aux deux extrémités de la poutre, on doit avoir $y = 0, \eta = 0$, si les extrémités sont encastrées suivant la même horizontale ; il faut donc que les tangentes extrêmes des lignes des y et des y' coïncident ; on connaît les tangentes extrêmes KS et SL de la ligne des y ; le polygone d'intégration de la ligne des y' est donc KMNL. On obtient en prenant les dérivées, la ligne des η' en DGF, la ligne des M' en A'B' ; le problème est résolu. On peut obtenir les moments AA' et BB' plus rapidement, si on a soin de prendre deux bases d'intégration $l : 2$ et $l : 3$; nous savons qu'alors (115) l'une des intégrales secondes de B'A' est B'*ee*'A' ; donc si nous avions pris ces bases d'intégration, nous aurions $Kb = BB'$, $aL = AA'$.

La méthode que nous venons d'exposer s'applique avec la même facilité au cas où les encastrements seraient situés à des niveaux différents et où les fibres encastrées feraient avec l'horizon des angles connus. On trace alors les tangentes extrêmes à la ligne des y' de manière à réaliser ces conditions et on achève comme précédemment. Supposons, par exemple, que les encastrements soient horizontaux, mais que l'encastrement de droite soit plus bas que celui de gauche d'une longueur représentée par L'L ; on trouve en KMN'L' le polygone d'intégration de la ligne des y'.

578. Solution par l'épure des η. — Les conditions de la déformation donnent les extrémités de la ligne des η' et de la ligne des y'; ce sont les points E et F et les points K et L, si les fibres extrêmes sont encastrées suivant une même horizontale. En prenant la dérivée de la corde des y', on obtiendra le point H, *point moyen des* η'; c'est le centre de gravité du triangle EGF (19). Pour construire le triangle EGF, il suffit de tripler la distance du point H au milieu de la corde EF, on obtient le sommet G. On peut aussi déterminer le milieu R du côté GF en traçant la médiane EHR.

Cette construction peut quelquefois s'effectuer sans utiliser l'épure des y. Si les fibres extrêmes sont encastrées suivant une même horizontale, les cordes des y et des y' coïncident, le point H est aussi le point moyen des y; on peut obtenir ce point par divers procédés sans se servir de l'épure des y.

579. Solution par l'épure des M. — Déterminons le point H comme nous venons de l'indiquer; nous allons démontrer que *les dérivées des médianes* EH *et* HF *ont pour valeur les* M' *principaux*. On reconnaît facilement que dans le cas d'une poutre prismatique les points principaux (559) divisent la poutre en trois parties égales; les M' principaux sont donc les ordonnées Pe, Qe' en ces points. Démontrons, par exemple, que la dérivée de EH est Pe. En effet, la droite EH prolongée passe par le milieu R du côté GF; la dérivée de cette corde ER de l'angle G est donc (550, remarque) l'ordonnée du point qui divise B'A' dans le rapport inverse des projections horizontales des côtés EG et GR; ce rapport est 2 : 1; donc la dérivée de EH est Pe. En prenant la dérivée des côtés EHF, on trouve donc les deux points principaux P et Q de la ligne des M'.

580. Solutions diverses. — Nous ne considérerons plus que le cas où les fibres extrêmes sont encastrées suivant une même horizontale; s'il n'en est pas ainsi, on pourra toujours ajouter l'influence des conditions de la déformation, en appliquant le principe de l'indépendance des effets des forces.

La ligne des M' doit satisfaire à deux conditions; il faut,

qu'aux deux extrémités de la poutre on ait $\eta = 0$ et $y = 0$; la première exprime que la surface des M est nulle ; la seconde que le moment de cette surface est aussi nul (539) ; donc les poids positifs et négatifs de cette surface doivent se faire équilibre. Or cette suface est la différence entre la surface ACDB et la surface AA'B'B ; il faut, par conséquent, que ces surfaces ACDB et AA'B'B aient des poids égaux et dirigés suivant la même verticale. On est donc ramené au problème suivant : *trouver un trapèze* AA'B'B *connaissant sa surface et la verticale de son centre de gravité* ; ce problème se présente dans beaucoup de questions ; c'est pour ce motif que nous en avons transporté la solution dans la partie théorique de ce mémoire (117).

On peut aussi joindre les points principaux e et e' à l'extrémité I' de l'ordonnée moyenne de la ligne ACD ; on obtient (247) : UW = AA', VW = BB'.

Ces moments extrêmes peuvent aussi se représenter par des aires ; mais on arrive à une formule plus simple en calculant les moments principaux. Prenons l'extrémité A pour origine ; le moment principal Pe s'obtient par la formule :

$$\overline{Pe} \times \frac{l^2}{2} = \int_0^l M'' x dx.$$

En effet, on reconnaît aisément que, si on remplace la ligne des M' par $y = \overline{Pe}$, l'intégrale première devient la médiane EH prolongée, et que l'intégrale seconde conserve la même corde KL, et la même tangente KM ; donc le moment de la surface des M' autour du point A ne change pas en faisant pivoter la ligne des M' autour du point P : il est égal au moment du rectangle de hauteur Pe. En exprimant que ce moment est aussi égal au moment de la surface ACDB, on obtient la formule qu'il fallait démontrer. L'intégrale est l'aire de la courbe $y = M''x$; on obtient facilement cette courbe (70). On trouve de même le moment Qe' ; on a aussi :

$$\overline{II'} \times l = \int_0^l M'' dx,$$

On en déduit K' par la formule :

$$K' \frac{l}{6} = \overline{II'} - \overline{Pe}.$$

On tire de là :

$$K' \frac{l^3}{6} = \int_0^l M'' (l - 2x)\, dx.$$

En intégrant par parties, on trouve :

$$K' \frac{l^3}{6} = \int_0^l K'' (l - x)\, x dx.$$

On peut aussi démontrer le théorème suivant : le centre de percussion de la surface couverte par les efforts tranchants vrais, par rapport à un axe vertical passant par l'une des extrémités de la poutre, se trouve sur la verticale qui passe par l'autre extrémité. On peut déduire de là la formule :

$$l \int K x dx = \int K x^2 dx.$$

En remplaçant K par K'' — K' on retrouve la valeur de K' établie plus haut.

581. Forces isolées. — Soit (fig. 224) AB une poutre encastrée sollicitée par deux forces isolées. On trouve successivement la ligne des K en CD, la ligne des M en EFG, la ligne des η en HKL, la ligne des y en MNR. On trouve alors la ligne des y' en MN'P'R, la ligne des η' en HK'L, la ligne des M' en E'G', la ligne des K' en C'D'; le problème est résolu.

582. Charges uniformément réparties. — Soient : (fig. 225) AB, la poutre; AA' BB' les charges. On trouve successivement: la ligne des K en CD, la ligne des M en EFG, la ligne des η en MRNL. Au lieu de tracer la ligne des y, déterminons directement l'ordonnée moyenne des arcs LP et PE par la construction du numéro 24; on obtient facilement le point moyen I des η. En prenant les dérivées des droites LI et IM, on obtient les points principaux S et T de la ligne des M'.

583. Charge variable. — tneioS (fig. 226): AB, la poutre; A'B', la courbe des charges. En intégrant on trouve succes-

sivement : la ligne des K en CDE, la ligne des M en FGH, la ligne des η en KLM, la ligne des y en PQRS. On remarquera que dans le polygone d'intégration, nous avons remplacé les trois côtés intermédiaires par un côté unique RQ; on reconnaît facilement que l'inclinaison de ce côté s'obtient en intégrant l'ordonnée du point L, centre de gravité des trois sommets intermédiaires de la ligne des η (540).

Traçons la ligne des y' en PQ'R'H; prenons les dérivées successives, on obtient la ligne des η' en KL'M, la ligne des M' en F'H', la ligne des K' en C'E'.

584. Force isolée. — Soient (fig. 227) : AB, la poutre; CD, la ligne des K; EFG, celle des M; E'G', la ligne inconnue des M'. Le trapèze GG'E'E a même poids résultant que le triangle EFG; on obtiendra donc E' et G' par la construction du numéro 119. On porte $MN = \frac{1}{2} FF'$ sur le milieu N de GE et par le point F, on mène des parallèles FG' et FE' aux droites GM et ME.

Cette construction se modifie aussi de la manière suivante: on mène par le point F, HK parallèle à GE; les droites FG' et FE' sont parallèles aux diagonales KG et HE du parallélogramme HKEG.

Aux points S et T, le moment fléchissant est nul; ce sont les points d'inflexion; démontrons que ces points se trouvent aussi sur les droites NK et NH. En effet, les figures MTEN et TFKE' sont semblables; les côtés NT et TK sont homologues : ils doivent être en ligne droite. Lorsque la force se déplace, les points d'inflexion varient; la position des points d'inflexion est indépendante de la grandeur de la force, car la droite FF' peut, en modifiant l'échelle des M, représenter des moments de toute grandeur. Donc, en déplaçant le point F sur la droite, en joignant GF et FE, on obtiendra les positions du point d'inflexion pour toutes les positions de la force isolée.

585. Couple isolé. — Soient (fig. 228) : AB, la poutre sollicitée par un couple isolé; CDEFL, la ligne des M; HK la ligne inconnue des M'. Il faut que le rectangle CDEF et le

trapèze HKCL ait un même poids dirigé suivant la même verticale. On trouve l'ordonnée moyenne MN en joignant les milieux des côtés LF et ED; le point M est le milieu de la droite HK. Appliquons alors la construction du numéro 247; c'est le même problème que s'il s'agissait de trouver la pression sur un mur. Joignons le point M aux points principaux de LC, on obtient sur la verticale du centre de gravité du rectangle DEFC, les points K' et H'; on en déduit les points H et K de la ligne des M'.

Les moments fléchissants changent de signe aux points S et T : ce sont les points d'inflexion de la fibre moyenne déformée; il nous sera très utile de construire l'épure des points d'inflexion produits par un couple isolé qui se déplace. La position de ces points est indépendante de la grandeur du moment du couple isolé, car une même ordonnée CD peut représenter des moments de toute grandeur. Nous admettrons que l'ordonnée moyenne MN reste constante et nous prendrons :

$$MN = ee' = \frac{l}{3}.$$

On reconnaît facilement que l'on a alors :

$$PH = hH' = 2Mh = LF.$$

On obtient donc le point d'inflexion S par la construction suivante : on porte $MN = l : 3$; on porte en PH l'abscisse LF du couple isolé, on joint MH. Il est évident que la même construction s'applique au point d'inflexion T; on portera donc QR = FC, on joindra MR, le point T' est sur la verticale du point T; c'est le second point d'inflexion. C'est en utilisant cette règle que nous avons dressé (fig. 229, *c*) l'épure des points d'inflexion pour différentes positions du couple isolé.

586. Force isolée mobile. — En appliquant la construction du numéro 584, pour chaque position de la force, on obtiendra les M pour chaque cas; mais il convient de modifier légèrement cette construction pour obtenir les lignes des M rapportées à une ligne de repère unique. Pour y arriver,

commençons (fig. 229, *b*) par tracer la ligne des M pour une poutre sur deux appuis mais en changeant le sens des ordonnées; on trouve ACB. Quand la charge se meut, le point C décrit une parabole que l'on trace facilement. Appliquons la construction connue à la position C, on trouve la ligne de repère EF. Prenons alors AB comme ligne de repère et revenons au sens habituel des ordonnées M; on reconnaît facilement que les moments fléchissants BE et AF sont portés à partir de AB précisément dans le sens qui convient; on obtient donc la ligne des M en EGF, en portant DG = CK. On obtient de cette manière les M pour toutes les positions; nous les avons transportés sur la figure *a*. Le sommet G décrit une courbe; les côtés EG et GF enveloppent deux autres courbes; ces courbes constituent les limites supérieures et inférieures des M.

Il est utile pour tracer les courbes-enveloppes de déterminer exactement les points où ces courbes sont touchées par leurs enveloppées. Nous allons démontrer que ces points de contact se trouvent sur les verticales des points d'inflexion produits par un couple isolé que l'on substituerait à la force mobile.

Remarquons, en effet, que si la force est dans une position, nous la déplacerons infiniment peu en introduisant un couple isolé dans la section où elle agit; aux points d'inflexion produits par ce couple, il faut ajouter des moments nuls; donc sur les verticales de ces points se trouvent les points immobiles des côtés de la ligne des M; ce sont les points où ces côtés touchent leurs enveloppes.

On obtient la ligne des K, pour chaque position de la force, en prenant la dérivée de la ligne des M; on trouve une ligne telle que QPMN (fig. *d*); les sommets P et M décrivent les courbes AB et A'B' que l'on détermine par points et qui constituent les limites des efforts tranchants.

Ces courbes s'obtiennent plus rapidement par la méthode suivante. Prenons le point B' comme une origine d'abscisse; soit $x = CB'$ l'abscisse de la force $P = \overline{PM}$. Prenons la droite QR pour axe provisoire, la surface des K'' est le rectangle

PMNR, on trouve l'ordonnée K' — PC du point P en appliquant la formule du numéro 580 qui devient :

$$K' \frac{l^3}{6} = \int_0^l K''x\,(l-x)\,dx = P\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right).$$

On en conclut que le point P décrit une parabole du troisième degré qui touche la droite AB' au point B' ; comme les courbes AB et A'B' sont identiques ($\overline{MP} = P$), la tangente en B est aussi horizontale. Par raison de symétrie, les mêmes propriétés doivent exister en A et A'. On connaît alors les polygones d'intégration des deux paraboles ; on trouve pour la parabole AB, le polygone ACDB ; on peut obtenir alors autant de points de la parabole que l'on veut ; on trouve notamment le point H ; on démontre aisément que c'est un centre et un point d'inflexion.

587. Train mobile. — Un système de forces isolées se déplace sur la poutre ; on peut obtenir la ligne des M pour chaque position du système, en utilisant le principe de l'indépendance des effets des forces ; on construit l'épure des M pour le cas d'une force unique mobile ; par un changement d'échelle on obtient les M pour toute autre force ; pour chaque position du système, on superpose les moments dus aux différentes forces.

On peut aussi laisser les charges immobiles et déplacer la poutre sous les forces ; on trace pour une poutre indéterminée les lignes des K, des M, des η et des y ; on a soin de prendre pour effectuer l'intégration des tronçons de poutre égaux à une fraction déterminée de la portée, un cinquième par exemple ; on place alors la poutre dans diverses positions, en la déplaçant chaque fois d'un cinquième de sa longueur ; on s'arrange de manière que les extrémités de la poutre correspondent aux points de la ligne des y où l'on a tracé les tangentes ; on détermine aisément les lignes de repère. On peut alors obtenir tous les moments fléchissants et tous les efforts tranchants qui se produisent en chacun des points de la poutre et déterminer leurs valeurs limites.

Charge uniforme mobile.— Si la charge uniforme s'avance en AD sur la poutre AB (fig. 230, *b*), la ligne des M sera formée d'une parabole et d'une droite; traçons ces lignes pour toutes les positions du point D; faisons ensuite entrer la charge de la gauche vers la droite; traçons les enveloppes de toutes les lignes des M; nous obtenons les courbes $adfb$ et $gd'f'h$; ce sont les courbes limites cherchées. Cette méthode est pénible; en outre, on peut se demander si, en fractionnant la charge, on obtiendrait pas des positions plus défavorables que celles que l'on a considérées. Nous allons d'abord faire disparaître ces doutes, ensuite nous indiquerons le moyen d'obtenir plus facilement les enveloppes des M.

Construisons (fig. *b*) l'épure des points d'inflexion produits par une force isolée mobile. Proposons-nous, par exemple, de chercher sur la verticale du point S les moments fléchissants limites. La figure *b* nous indique que toute charge placée dans l'intervalle HF produit un point d'inflexion situé à gauche de S et par conséquent produit en S un moment fléchissant négatif; toute charge placée dans l'intervalle FK produit au contraire en S un moment fléchissant positif. Nous obtiendrons donc le plus grand moment fléchissant négatif en enlevant toutes les charges qui donnent un moment positif en S, et en introduisant toutes les autres; c'est en chargeant AD que nous réaliserons ces conditions. On trouve de la même manière qu'en chargeant DB, on obtient en S le plus grand moment fléchissant positif. Au point F correspond aussi le point d'inflexion T, en chargeant AD ou DB on obtient aussi les deux limites du moment fléchissant en T. En résumé, les positions les plus défavorables s'obtiennent en faisant avancer la charge continûment de l'un ou de l'autre côté, sans la fractionner; cela justifie la méthode des enveloppes que nous avons exposé précédemment.

Ce raisonnement nous conduit aussi à la détermination des points où les enveloppées touchent leurs enveloppes. Plaçons la charge en AD; les points m et p' de la ligne des M, situés sur les verticales des points d'inflexion produits par une force isolée en D, appartiennent aux courbes limites; ce

sont les points de contact cherché. Cette proposition se démontre aussi en reproduisant le raisonnement du n° 586; déplacer la charge AD, c'est introduire une force isolée en D; or cette force produit aux points d'inflexion des moments nuls; donc sur ces points d'inflexion se trouvent les points immobiles des enveloppées : ce sont les points où elles touchent leurs enveloppes.

Avant de passer aux tracés graphiques, voyons de quoi se composent les courbes limites. Si nous déplaçons le point F, nous voyons que le point S ne peut dépasser S'; on démontre aisément que ce point S' tombe sur l'une des verticales principales ; on démontre de la même manière que le point T ne peut dépasser l'autre verticale principale ; donc dans la région centrale comprise entre les points principaux, il ne se produit que des moments fléchissants négatifs ; on obtiendra donc la limite supérieure de ces moments en chargeant toute la poutre, ce qui donne la parabole df ; la limite inférieure est la droite $d'f'$.

Si on se place en un point C du premier tiers de la travée, on trouve deux limites m et p ; la première s'obtient en chargeant AD, la seconde en chargeant DB; le lieu du point m est une courbe ad, le lieu du point p est une autre courbe gd'. Ces deux courbes satisfont à la relation suivante : la somme algébrique de leurs ordonnées est précisément l'ordonnée de la parabole gd que l'on obtient en chargeant toute la poutre. En effet, si on charge AD, on obtient le moment cm ; si on charge BD, on obtient cp ; superposons ces résultats ; cela revient à charger toute la poutre : on doit trouver cn ; donc :

$$cn = cp + (-cm).$$

On déduit de là :

$$mc = np.$$

Cette relation existe aussi pour un point infiniment voisin du point m ; on en déduit aisément qu'elle existe aussi entre les ordonnées des tangentes aux points m, n et p. Supposons la parabole $gdfh$ déterminée par points et tangentes ;

chargeons AD, déterminons les points m et p' et les tangentes en ces points des enveloppées ; les tangentes aux enveloppées et aux enveloppes coïncident aux points de contact ; de la tangente en m, on déduira la tangente en p (les tangentes en n et en p se coupent sur la verticale du point q) ; de même, la tangente en p' donnera la tangente en m' ; mais chacun des 4 points m, p, m', p', donne aussi son symétrique par rapport à la verticale élevée au milieu de la poutre ; donc la position AD de la charge donne 8 points et 8 tangentes des courbes limites.

Déplaçons la charge de manière que le point D vienne en B ; la poutre est complètement chargée ; cherchons les huit points et les huit tangentes qui correspondent à cette position particulière. Lorsque le point D vient en B, le point S vient en S' ; donc mp vient en dd' ; par conséquent en d, il y a contact entre l'enveloppée gd et l'enveloppe ad ; on en conclut qu'en d' il y a aussi contact entre gd' et l'axe ab. Lorsque le point D vient en B, le point T vient en K, donc $m'p'$ vient en bh ; donc en h il y a contact entre l'enveloppe fh et l'enveloppée qui est la tangente au point h de fh ; on en conclut qu'il y a aussi contact au point b entre l'enveloppe fb et l'axe ab. Les points d, d', b, h donnent leurs symétriques f, f', a, g. On obtient donc les extrémités et les tangentes extrêmes des quatre courbes-enveloppes qu'il s'agit de tracer.

Ces diverses propriétés permettent de construire rapidement l'épure. Traçons d'abord la parabole $g\,d\,f\,h$ pour toute la poutre chargée ; on l'obtient en intégrant deux fois la charge ou de toute autre manière ; nous traçons cette parabole de manière qu'elle soit symétriquement placée par rapport à la verticale centrale. Par raison de symétrie, la ligne de repère ab doit être horizontale et comme l'aire couverte par les M doit être nulle, la droite ab a pour ordonnée l'ordonnée moyenne de la parabole ; donc elle divise la hauteur de cette parabole en trois parties égales (18). Traçons ab, divisons cette droite en trois parties égales, menons les verticales principales dd' et ff' ; l'arc df et la droite $d'f'$ font partie

des courbes limites. Les arcs ad, fb, gd,', $f'h$ sont déjà plus ou moins déterminés par leurs tangentes extrêmes. En chargeant AD, nous obtiendrons deux points et deux tangentes de chacune de ces courbes. Pour y arriver, traçons (fig. c) la ligne des M en laissant la ligne de repère indéterminée; nous avons tracé cette ligne en prenant l'horizontale comme ligne des M entre B et D; de D en A, la ligne des M est un arc parabolique que l'on détermine par deux tangentes extrêmes; on les obtient par une double intégration de la charge ou en utilisant la parabole $gdfh$ déjà tracée; nous n'avons pas représenté ces opérations qui ne présentent aucune difficulté. Intégrons la ligne des M, tous les côtés du polygone des η sont horizontaux sauf un seul; le polygone des y a une forme du même genre, mais comme la place fait défaut, nous avons opéré sur la ligne des η; le point moyen des η se trouve facilement par les constructions indiquées sur la figure; on en déduit les M' principaux et la ligne de repère $a'b'$. Il s'agit alors de rapporter les M de la figure c à la figure a, en prenant ab comme ligne de repère; on obtient les tangentes aux points m et p' en rapportant la tangente $q'm'$ que l'on obtient facilement et le côté rectiligne des M; il suffit de rapporter l'intersection de ces deux droites et les points où elles rencontrent la ligne de repère. On déduit des points m et p' les points p et m'; on prend ensuite les symétriques des quatre points connus. On connaît alors quatre points et quatre tangentes de chacune des courbes. On obtiendrait d'autres points en plaçant la surcharge dans d'autres positions.

Occupons-nous des efforts tranchants. On démontre, comme dans le cas d'une poutre sur deux appuis, que les efforts tranchants limites en un point D d'une poutre AB s'obtiennent en chargeant AD ou DB. Pour chacune de ces positions de la charge, la ligne des K est formée d'une horizontale et d'une ligne de direction constante. Si on introduit la charge de gauche vers droite, le sommet de la ligne des K décrit la limite supérieure des efforts tranchants; on obtient la limite inférieure en introduisant la charge de droite ver

gauche. Pour chaque position, on trace la ligne des M, on prend la dérivée du côté rectiligne, on obtient l'effort tranchant limite à la tête de la charge. On trouve ainsi autant de points que l'on veut des courbes limites. Soient (fig. *d*) AD la limite supérieure, E'B une partie de la limite inférieure.

Il est facile de démontrer : 1° que l'une des courbes est la symétrique de l'autre par rapport au milieu de la poutre ; 2° que la somme algébrique de leurs ordonnées au même point de la poutre est l'effort tranchant de la poutre complètement chargée. La ligne des K pour la poutre complètement chargée est la droite CD intégrale de la charge ; elle passe par le milieu C par raison de symétrie. Connaissant un point de l'arc AD, on trouve immédiatement un point de l'arc E'B, en utilisant la propriété de la droite CD. On en déduit deux autres points en prenant les symétriques des points connus par rapport au point C. Chaque position de la charge donne deux points de chacune des courbes.

On peut tracer directement ces courbes limites avec beaucoup de facilité. En calculant l'effort tranchant limite par l'analyse ou par une méthode analogue à celle que nous avons suivie pour le cas d'une force isolée, on trouve que ces courbes sont des paraboles du quatrième degré qui ont un contact du second ordre avec les droites AB, CD aux extrémités de ces droites. D'après cela, le polygone d'intégration de l'arc AD n'est autre que AFCHD ; les côtés AF et FC sont sur la droite AB, les côtés CH, HD sur la droite CD (545, cas particulier ; on considère la droite AB et la droite CD prolongée comme des arcs paraboliques du quatrième degré). On obtient alors l'arc AD par points et tangentes ; on en déduit l'autre courbe limite ou on la construit directement par le même procédé.

On peut démontrer sans calcul que l'arc AD a au point A un contact du second ordre avec la droite AB ; en effet, on obtient un point infiniment voisin du point A en chargeant une longueur infiniment petite de la poutre à partir du point A ; cela revient à introduire une force isolée infiniment petite et infiniment voisine du point A. Or si cette force était finie, on obtiendrait déjà un effort tranchant du second

ordre (586) ; donc si la force est infiniment petite du premier ordre, l'effort tranchant est du troisième ordre et au point A il y a contact du second ordre. Au point B, il y a aussi contact du second ordre ; en utilisant la propriété de la droite CD, on démontre qu'il y a aussi contact du second ordre en D ; la même propriété existe à l'autre extrémité de la droite CD.

§ 3. Poutre encastrée à une extrémité, appuyée à l'autre.

588. Solution par l'épure des y. — Reprenons la figure 223 ; soit AB la poutre que nous supposerons encastrée en B, appuyée en A. Intégrons quatre fois les charges, il s'agit encore de trouver les lignes de repère. Soient : ACD, la ligne des M; EF, la corde des η; KSL, les tangentes extrêmes à la ligne des y. Supposons le problème résolu ; soient : AB", la ligne des M'; EG'F' et KMN'L' les polygones des η' et des y'. La ligne des M' doit passer par le point A, parce qu'en A, il y a simple appui et que M est nul. Nous avons choisi ce point A sur l'axe $M'' = 0$; donc le côté des η' qui y correspond, est horizontal ; donc les côtés N"L et MN" des y' ont même direction. Supposons l'encastrement horizontal et l'appui au niveau de l'encastrement; au point K, les tangentes des lignes des y et des y' coïncident: car on a, au point B :

$$\eta = \eta'' - \eta' = 0, \quad \text{d'où} \quad \eta'' = \eta'.$$

Au point A, on a :

$$y = y'' - y' = 0, \quad \text{d'où} \quad y'' = y' ;$$

donc les polygones des y et des y' doivent se joindre au point L.

Il résulte de là que le polygone des y' a un côté connu KM dirigé suivant la tangente KS à la ligne des y; on obtient les deux autres côtés en joignant ML. On obtient les η' et les M' en prenant les dérivées.

Nous ferons remarquer comme au n° 557 que si nous avions pris pour bases d'intégration $l : 2$ et $l : 3$, l'une des intégrales secondes de AB" serait B"ee'A, donc on aurait :

$$Kb'' = B''B.$$

On obtiendrait ainsi le point B'' sans prendre les dérivées.

Il est intéressant de chercher quelle eût été la solution du problème, si nous n'avions pas pris le point A sur l'axe $M'' = 0$. Nous rencontrerons ce cas en cherchant l'état de sollicitation de la même poutre supposée appuyée en B, encastrée en A. Soit KM'NL le polygone des y'; le côté NL est connu, il est dirigé suivant la tangente à la ligne des y; le côté KM' passe par le point K; mais KM'N ne forme plus une ligne droite. Si nous avions choisi les bases d'intégration particulières dont il vient d'être question, nous aurions :

$$b'K = BD.$$

Cette relation donnerait le point b'; en joignant $b'N$, on obtiendrait le côté M'N; le problème est résolu. On peut conclure de là que si la ligne des M' pivotait autour du point D, le côté intégral M'N pivoterait aussi autour du point b'; mais cette propriété doit subsister quand on change les échelles; donc quelles que soient les bases d'intégration, on obtiendra le point b', en menant une droite quelconque par le point D, en construisant son intégrale seconde à partir du point B, en prolongeant jusqu'en b' le côté intermédiaire du polygone d'intégration.

Cette manière de trouver Kb', connaissant BD, peut s'envisager à un point de vue plus général; il s'agit d'exprimer sur le polygone des y' que l'une des ordonnées extrêmes des M' est connue; or on a (69) :

$$\Delta^2 y' = M' \frac{l}{2} \frac{l}{3}.$$

On voit aisément que $\Delta^2 y' = Kb'$; donc on peut trouver Kb' par une fausse position consistant à mener par le point connu des M', une ligne des M' quelconque que l'on intègre ensuite deux fois.

Les méthodes que nous venons d'exposer s'appliquent aussi au cas où l'encastrement et l'appui ne se trouvent pas au même niveau ; on connaît alors les valeurs de y aux extrémités de la poutre déformée et la dérivée η au point d'encastrement ; ces éléments permettent de déterminer les extré-

mités et l'un des côtés extrêmes du polygone des y' ; on achève la solution comme précédemment.

589. Solution par l'épure des η. — Nous venons de voir comment on détermine les extrémités de la ligne des y' ; prenons la dérivée de la corde de cette ligne ; nous obtiendrons le point moyen H des η'. Connaissant l'inclinaison $\eta = \eta'' - \eta'$ de la fibre encastrée, on peut déterminer l'extrémité E de la ligne des η ; on a sur la figure $\eta = \eta'' - \eta' = 0$.

Du triangle EG'F' on connaît alors le sommet E, le centre de gravité H, et la direction du côté G'F' ; on mène la médiane EH que l'on prolonge jusqu'à la verticale qui passe aux trois quarts de AB ; par l'extrémité R on mène le côté G'F' qui est horizontal ; le polygone des η' est déterminé ; en prenant la dérivée, on obtient la ligne des M'.

590. Solution par l'épure des M. — Joignons EH et prenons la dérivée, nous démontrerons comme au numéro 579 que cette dérivée est le moment principal ; on porte cette dérivée en Pe, on joint AP, on obtient la ligne des M'. On déduit de là une propriété curieuse dont nous trouverons plus tard une généralisation dans l'étude des poutres à plusieurs travées. Supposons que sur l'appui A nous introduisions un moment d'encastrement variable ; la ligne des M ne change pas, mais nous allons démontrer que la ligne des M' pivote autour de son point principal P. En effet, la corde KL, le point H, le point E ne changent pas ; donc on trouve toujours la même médiane EH, la même dérivée Pe. L'effet du moment d'encastrement est donc de faire pivoter la ligne des M' autour du point P ; si ce moment d'encastrement avait une certaine valeur AA', on retrouverait la ligne B'A' qui correspond au cas de deux encastrements sur une même horizontale.

591. Solutions diverses. — Nous supposerons que l'encastrement et l'appui soient situés sur une même horizontale. Si nous prenons la tangente KS aux lignes des y et des y' comme ligne de repère, les ordonnées de ces deux lignes représentent les moments des aires couvertes respec-

tivement par les M et les M' ; or au point L, $y = y'$; donc l'aire ACDB et le triangle AB''B doivent avoir même moment autour du point A ; ces aires sont donc inversement proportionnelles aux bras de levier. Soient h la hauteur moyenne de la ligne ACD, UW la verticale du centre de gravité de l'aire ACDB ; on doit avoir :

$$\frac{h.l}{\frac{BB''}{2}l} = \frac{\overline{Ae}}{\overline{AW}}.$$

D'où

$$BB'' = h\frac{\overline{Ae'}}{\overline{AW}}.$$

On obtient BB'' par une quatrième proportionnelle.

La formule du numéro 580, qui donne le moment principal Pe, est encore applicable. On en déduit :

$$K' = \overline{Pe} : \frac{2}{3}l.$$

On peut transformer la valeur de Pe par une intégration, par partie ; on trouve :

$$K'\frac{3l^3}{4} = \int_0^l Mx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^l K\,(l^2 - x^2)\,dx.$$

592. Exemples. — Utilisons les figures qui se rapportent à une poutre encastrée à ses deux extrémités ; les lignes des K, des M, des η, des y peuvent être conservées ; les lignes de repère changent ; nous représenterons les nouvelles lignes de repère par un trait mixte.

Forces isolées. — On trouve (fig. 224) la ligne des y' en RP'N''M, la ligne des η en LK''H', la ligne des M' en G''E, la ligne des K en C''D''.

Charges uniformément réparties. — Soit BA (fig. 225) la poutre encastrée en B, appuyée en A. On détermine le point I, point moyen des η ; on prend la dérivée de LI, on obtient le point principal S des M' ; on tire la droite ES, c'est la ligne des M'.

Charge variable. — Soit (fig. 226) la poutre AB encastrée en A, libre en B ; on trouve la ligne des y' en SR'P ; on obtient la ligne des M' en prenant les dérivées.

593. Force isolée. — Soient (fig. 231) : ACB la ligne des M, AB' la ligne des M'. Les aires ACB et AB'B ont même moment autour de A ; ces aires sont proportionnelles aux hauteurs CC' et BB' ; donc :

$$BB' \times F'A = CC' \times D'A.$$

On obtient BB' par une quatrième proportionnelle ; on porte FF' = CC', on joint AF, on a BB' = DD'.

Autre construction. — Portons $AH = \frac{1}{2}CC'$; menons CB' parallèlement à BH, nous obtiendrons le point B'.

En effet, le centre de gravité G du triangle ACB se trouve sur l'horizontale dont l'ordonnée est CC' : 3 ; si le point C décrit la droite KL, le point G décrit G'G''.

On a d'ailleurs :

$$\frac{DD'}{MN} = \frac{G'G}{G'G''} = \frac{KC}{KL}.$$

Or DD'' = B'K, MN = AH ; en égalant le premier et le troisième rapport, on a donc :

$$\frac{B'K}{AH} = \frac{KC}{KL} \text{ ou } \frac{B'K}{KC} = \frac{AH}{KL}.$$

Cette proportion exprime que les triangles CB'K et BHA sont semblables ; on doit avoir :

$$\text{angle } KCB' = \text{angle } HBA,$$

donc les droites B'C et BH sont parallèles.

594. Couple isolé. — Soient (fig. 232) : ACDE, la ligne des M ; AF, la ligne des M' qu'il s'agit de trouver. Il s'agit de construire un triangle ABF dont le moment autour du point A soit égal à celui du rectangle BCDE. Appliquons la méthode générale (591) ; portons au point principal H, en HK l'ordonnée moyenne de la ligne ACDE ; joignons AK, on obtient BF en L'L.

Le point S est un point d'inflexion ; quand il s'agit simplement de trouver la position de ce point, on peut donner au moment du couple isolé une grandeur quelconque ; prenons, par exemple, CD = AB, on a alors: HK = BC. C'est de cette manière que nous avons construit (fig. 233, fig. *c*) l'épure des points d'inflexion produits par un couple isolé qui se déplace sur la poutre ; nons avons toutefois considéré un moment isolé représenté par $l : 2$, alors HK = CB : 2.

595. Force unique mobile. — On applique la méthode du n° 586. Soit (fig. 233, fig. *b*) la poutre BA, encastrée en B, appuyée en A. Construisons en ACB l'épure des M renversés, pour le cas d'une poutre sur deux appuis, les diverses positions du point C se trouvent sur une parabole. Pour chaque position de la force mobile, on trouve la ligne de repère par la seconde règle du numéro 593.

Cette règle subit une petite modification. On porte OA = 2BA ; on mène CD parallèlement à OC' ; AD est la ligne de repère cherchée. On redresse alors les M (fig. *a*) ; on porte B'D' = BD, HF = CE, A'FD' est la ligne des M rapportée à la ligne de repère A'B'. Si nous appliquons cette construction à une série de positions de la force mobile, on trouve que le point F décrit une courbe, et que le côté FD' enveloppe une autre courbe ; ces deux courbes sont les limites des M. On démontre comme au n° 586 que le point de contact du côté FD' et de son enveloppe est sur la verticale du point d'inflexion produit par un couple isolé qui agirait dans la même section que la force ; l'épure des inflexions (fig. *c*) donnent tous les points de contact.

Occupons-nous des efforts tranchants. On peut les obtenir en prenant les dérivées de la ligne des M pour les différentes positions de la force. On trouve pour une de ces positions la ligne NHFK (fig. *d*) ; les points F et H décrivent deux courbes qui donnent les limites supérieures et inférieures des efforts tranchants.

Ces courbes s'obtiennent beaucoup plus facilement par une construction directe. On trouve les extrémités des deux courbes en plaçant la force P aux extrémités de la poutre ;

on a AC = P, BD = P. Nous allons démontrer que ces courbes sont des paraboles du troisième degré, qu'elles ont un élément horizontal dans la section encastrée, un point d'inflexion sur l'appui. On pourra alors tracer immédiatement les polygones d'intégration BEC, DGA de ces courbes et en obtenir autant de points et de tangentes que l'on veut.

Cherchons l'équation de la courbe AD. Soit KFHN la ligne des K pour une position de la force; prenons NM pour ligne de repère provisoire et utilisons la valeur de K' qui se trouve à la fin du numéro 591. Soit x = MH; on a : K'' = P de 0 à x; K'' = 0 de x à l; donc la valeur de K' qui est évidemment l'ordonnée du point H, devient :

$$K' \frac{3l^2}{2} = \int_0^x P(l^2 - x^2)\,dx = P\left(lx - \frac{x^3}{3}\right).$$

En supprimant le terme en x^3, on obtient une ligne qui a en A un contact du second ordre avec la courbe AD; on trouve la droite :

$$K' \frac{3l^2}{2} = Plx.$$

Donc au point A, il y a inflexion. On démontre facilement que pour $x = l$, on a $dK' = 0$. Cela démontre les propositions dont nous avons fait usage.

596. Train mobile. — Dans le cas de forces isolées, on peut appliquer le principe de l'indépendance des effets des forces comme au n° 587; dans tous les cas, on peut déplacer la poutre sous les forces.

Considérons (fig. 234) le cas d'une charge mobile uniforme; construisons (fig. *c*) l'épure des points d'inflexion produits par une force isolée. Soit ACB la ligne des M pour une position de la force isolée; portons AH = CC' : 2; menons CB' parallèlement à BH et joignons AB'; le point S est le point d'inflexion. Nous ferons mouvoir et varier la force de manière que le point C décrive une horizontale; alors BH est une direction fixe; la construction revient donc à déplacer la droite CB' sans changer sa direction et à joindre BC et AB';

le lieu du point S est une hyperbole. On reconnaît facilement que quand la force agit au point A, le point d'inflexion vient en S' sur l'une des verticales principales ; entre cette verticale et l'extrémité A, on obtient les limites supérieures des M en chargeant toute la poutre, la limite inférieure est 0 ; on trouve la courbe *da* et la droite *d'a* (fig. *a*). Pour réaliser les limites des M en un autre point *s*, on cherche sur l'épure des inflexions la position C' d'une force isolée qui produirait un point d'inflexion en *s*; on obtient la limite supérieure des M en chargeant BC', la limite inférieure en chargeant C'A. Les points limites *m* et *p* décrivent les courbes limites *bd* et *gd'* : la première est l'enveloppe d'arcs paraboliques, la seconde enveloppe des droites. Elles satisfont à la propriété suivante : la somme algébrique des ordonnées de ces courbes est égale à l'ordonnée de la parabole *gda* que l'on obtient en chargeant toute la poutre; en effet, en chargeant BC' et C'A on obtient respectivement *ms* et *ps* ; donc en superposant les résultats, on arrive au même résultat qu'en chargeant toute la poutre ; donc :

$$-ms + sp = sn.$$

On en déduit aussi :

$$ms = pn.$$

Il suffit alors de déterminer des points de la courbe *ad*, on en déduit la courbe *gd'*, si on a soin de tracer la parabole *gdb*. La relation entre les ordonnées des points *m*,*n*,*p* existe aussi pour une position infiniment voisine ; on en conclut que cette relation existe aussi entre les ordonnées des trois tangentes en *m*, *n* et *p* ; cela permet de tracer la tangente au point *p* connaissant la tangente en *m*. On voit que toute position BC' de la charge mobile donnera un point de chacune des courbes et les tangentes en ces points. Si on suppose que la charge BC' vienne jusqu'au point A, le point S vient en S', on obtient le point *d* ; il doit y avoir contact entre la courbe *ad* et la parabole *gd* ; on en déduit qu'il y a aussi contact entre la courbe *gd'* et l'axe *ab*. Si on suppose que la charge BC' se retire jusqu'au moment où le point C' vienne

en B, on trouve le point a, et la tangente est la tangente à l'enveloppée qui est évidemment la droite M = 0 ; donc la courbe ad touche l'axe ab au point a ; on en déduit, qu'au point g, la courbe gd' touche la parabole gdb.

Les tracés graphiques se font rapidement de la manière suivante ; supposons la poutre complètement chargée ; laissons la ligne de repère ab indéterminée et traçons la parabole adg en intégrant deux fois la charge.

Si la poutre était posée sur deux appuis, la ligne de repère serait la corde ag ; le moment fléchissant au milieu de la poutre aurait une certaine valeur que nous désignerons par μ. Exprimons que le moment du triangle abg est égal à celui de l'aire adg autour du point a ; on trouve :

$$\overline{bg} \times \frac{l}{2} \times \frac{2l}{3} = \frac{2}{3}\mu \times l \times \frac{l}{2},$$

d'où $$\overline{bg} = \mu.$$

On obtiendra donc la ligne de repère ab en portant $\overline{bg} = \overline{fh}$. On peut facilement disposer l'épure de manière que la ligne de repère ab soit horizontale, si on détermine fh par un calcul ou un tracé préalable.

La parabole adg étant tracée, menons la verticale principale dd' ; on connaît alors les extrémités et les tangentes extrêmes des arcs bd et gd'. Pour avoir un point et une tangente intermédiaire, chargeons, par exemple, la poutre sur la moitié de sa longueur. On trouve (fig. b) la ligne des M en b'DF ; elle est formée d'une horizontale b'D et d'une parabole DF que l'on détermine par ses tangentes extrêmes. On obtient facilement le polygone des η et des y ; on en déduit le polygone des y', des η' et la ligne des M'. Il s'agit alors de transporter l'ordonnance $m's'$ et la tangente $q'm'$ de la figure b sur la figure a ; on obtient le point m et la tangente qm. On en déduit le point p et la tangente en ce point à la courbe limite. On obtiendrait de la même manière d'autres points et tangentes.

Occupons-nous des efforts tranchants. On peut les obtenir en prenant les dérivées de la ligne des M pour les différentes

positions de la surcharge ; on démontre comme pour le cas d'une poutre sur deux appuis que les positions les plus défavorables s'obtiennent en faisant avancer la charge sur la poutre sans la fractionner. Pour une certaine position, on obtient la ligne MEA (fig. *d*) ; le sommet E décrit la limite supérieure BC des efforts tranchants. On obtiendrait la limite inférieure en faisant avancer la charge de droite vers gauche. Ces deux courbes limites possèdent la propriété suivante : la somme algébrique des ordonnées limites est l'effort tranchant qui se développe quand la poutre est complètement chargée (même démonstration que pour la ligne des M). Quand la poutre est complètement chargée, on trouve que la ligne des K est une droite DC, intégrale de la charge et divisant la droite AB dans le rapport 5 : 3. On arrive à ce résultat en utilisant la valeur de K' du numéro 591 ; prenons HC pour axe provisoire ; on a $K'' = px$; on en déduit :

$$K' \text{ ou } AC = \frac{3}{8} pl.$$

On a d'ailleurs $BD + AC = pl$,

d'où : $$AD = \frac{5}{8} pl.$$

On en déduit :

$$\frac{BN}{NA} = \frac{BD}{CA} = \frac{5}{3}.$$

La ligne des M conduit au même résultat. Dans le cas d'une poutre sur deux appuis, la ligne des M (fig. *a*) est rapportée à la droite *ag* : la différence des inclinaisons de la tangente *a* et de la droite *ag* donne l'effort tranchant au point *a*. Quand il y a encastrement en *b*, la droite *ag* est remplacée par *ab* ; on reconnaît facilement que la différence d'inclinaison qui représente l'effort tranchant en *a* est diminuée d'un quart de sa valeur. Or pour la poutre sur deux appuis cet effort tranchant est $pl : 2$; donc dans le cas d'un encastrement en *b*, il devient $\frac{3}{8} pl$. Ayant tracé la courbe BC (fig. *d*) et la droite DC, on en déduira l'autre courbe limite DA en utilisant la propriété de la droite DC.

On peut aussi tracer les courbes limites directement ; on démontre par l'analyse que ces courbes sont des paraboles du quatrième degré (même démonstration qu'au numéro 595). La courbe BC a avec la droite BA un contact du second ordre au point B ; car si une charge s'avance infiniment peu sur la poutre à partir du point B, on peut considérer la charge comme une force isolée infiniment petite du premier ordre; or, si cette force isolée était finie, l'effort tranchant sera du second ordre (595) ; donc dans le cas qui nous occupe, il est du troisième ordre. On démontre de la même manière qu'au point A, il y a contact entre la droite BA et la courbe DA; on en déduit qu'il y a contact entre la courbe BC et la droite DC. Le polygone d'intégration de la parabole BC est alors connu ; deux côtés sont dirigés en BF suivant la droite BA ; à l'autre extrémité le côté GC est dirigé suivant la droite DC ; on trace le côté FG. On peut obtenir alors autant de points et de tangentes que l'on veut. On en déduit la courbe DA ; on peut aussi tracer directement le polygone d'intégration de cette courbe.

CHAPITRE IV.

Poutres continues prismatiques.

§ 1. Méthodes générales.

597. Problème à résoudre. — Soient (fig. 235) : am, une poutre continue ; a, b, h, i, m, les points qui, après la pose, se placeront sur des appuis situés à des niveaux connus; ABDEHILM la ligne des charges. Intégrons quatre fois la courbe des charges en introduisant, s'il y a lieu, les forces isolées ; donnons-nous arbitrairement les réactions des appuis, que nous considérerons comme des constantes d'intégration ; nous obtenons :

(fig. 236), la ligne des K en $abdehilm$;
(fig. 237), la ligne des M en $Abdeghklm$;
(fig. 238), la ligne des η en $adgkn$;
(fig. 239), la ligne des y en $abehmn$.

Ces intégrations s'effectuent par les règles connues. Les polygones d'intégrations peuvent être plus ou moins compliqués, cela dépend de l'état de sollicitation ; mais on peut toujours, après l'exécution, supprimer les lignes inutiles; nous verrons qu'il suffit de représenter, comme nous l'avons fait, la ligne des η par un polygone inscrit, la ligne des y par un polygone circonscrit.

Nous avons employé pour trouver chacun de ces deux polygones une méthode particulière que nous allons faire connaître. La figure 235 indique que nous supposons que chaque travée porte une charge uniforme. La ligne des K (fig. 236) est formée de droites. La ligne des M (fig. 237) est formée d'arcs paraboliques déterminés par leurs tangentes extrêmes. Les ordonnées moyennes de ces arcs sont les ordonnées des centres de gravité *c*, *f*, *i*, *m* des triangles A*bd*, *dcg*, *ghk*, *kln* ; ce sont ces ordonnées qu'il faut intégrer pour obtenir le polygone des η, *adgkn* (fig. 238). Pour tracer le polygone circonscrit à la ligne des y, il suffit de chercher les verticales qui passent par les centres de gravité des surfaces des M (111). Considérons, par exemple, la première travée ; par le point *c*, menons la droite *ad'* parallèle à la corde A*d* ; il est facile de reconnaître que le segment parabolique compris entre la corde A*d* et la ligne des M peut être remplacé par le parallélogramme A*ad'd* ; car ces surfaces ont même poids et ces poids agissent tous deux au milieu de la travée ; si on retranche ces surfaces équivalentes du triangle A*dd''*, il reste d'une part la surface des M, d'autre part le trapèze A*ad'd''* ; il résulte de là que les droites qui joignent les points *a* et *d'* aux points principaux de la travée A*d''* se coupent sur la verticale des centres de gravité de ces deux surfaces. C'est en répétant cette construction pour toutes les travées que nous trouverons les verticales des sommets du polygone des y ; on obtient ce polygone par la règle connue (13). Nous remarquerons qne la droite *ad'* est précisément la ligne de repère qu'il faudrait choisir si la travée était encastrée à ses extrémités suivant la même horizontale (580) ; nous l'appellerons la *transformée droite* de la ligne des M ; c'est la

droite qui peut être substituée à la ligne des M sans changer la corde des η et les tangentes extrêmes aux y.

Le problème à résoudre revient à déterminer les lignes de repère pour chaque travée ; elles forment les lignes des K', des M', des η', des y'. La ligne des K' est formée d'horizontales (61) ; celle des M', de lignes droites (63) ; celle des η' d'arcs paraboliques du second degré (65) ; celle des y' d'arcs paraboliques du troisième degré. Ces lignes se déduisent les unes des autres par intégrations et différentiations successives (65) ; elles se déterminent par polygones d'intégration. Soient :

(fig. 236), ABDEHILM, la ligne des K' ;
(fig. 237), ADGKN, la ligne des M' ;
(fig. 238), ABDEGHKLN, la ligne des η' ;
(fig. 239), ABCDEFGHIKLMN, la ligne des y' ;

la ligne des K' et celle des M' se tracent complètement ; la ligne des η' est représentée par un polygone circonscrit ; la ligne des y', par un polygone circonscrit avec côtés auxiliaires.

Nous déterminerons ces lignes de repère en exprimant que les conditions d'équilibre et les conditions imposées aux déformations sont satisfaites. Les conditions d'équilibre nous conduisent à égaler à zero les moments fléchissants aux deux extrémités de la poutre ; les lignes des M et des M' ont donc mêmes extrémités A et N. Les conditions de la déformation nous donnent les ordonnées Aa, Dc, Gf, Ki, Nn de l'épure des y ; ces ordonnées sont évidemment les ordonnées des appuis par rapport à un axe horizontal ; au moyen de ces ordonnées nous déterminerons les points A, D, G, K, N, de la ligne des y' : nous donnerons à ces points le nom de *points invariables de la ligne des y'*.

Avant de montrer comment on trace les lignes de repère qui satisfont à ces conditions, nous allons mettre le problème à résoudre sous une forme simple. Considérons la ligne des y' comme la fibre moyenne déformée d'une poutre fictive ; nous obtiendrons pour cette poutre, les lignes des η, des M,

des K, en différentiant trois fois la ligne des y' ; nous retrouverons évidemment les lignes des η', des M', des K'. Il résulte de là que cette poudre fictive doit être sollicitée aux extrémités par deux moments fléchissants connus représentés par les ordonnées des points A et N de la ligne des M ; les sommets intermédiaires du lieu des M' indiquent en outre que cette poutre est sollicitée par des forces isolées passant par les appuis. Ces forces doivent déformer la poutre de telle manière qu'elle passe par les points invariables ; nous les réaliserons en fixant la poutre sur les points invariables par des appuis convenablement placés ; les réactions de ces appuis seront les forces dont il s'agit ; on a donc ramené la question au problème suivant : *trouver l'état de sollicitation d'une poutre droite non chargée assujettie à passer par les points invariables* A, D, G, K, N (fig. 239) ; *des couples connus agissent aux extrémités.*

Les moments extrêmes sont représentés par les ordonnées des points A et N de l'épure des M. Nous avons pris le point A sur l'axe M = 0 ; l'un de ces moments est nul. Nous aurions pu facilement amener le point N sur ce même axe ; alors la poutre fictive ne serait sollicitée que par les réactions des points fixes.

598. Problèmes et théorèmes préliminaires. — I. *Connaissant* M, η *sur un appui, tracer les éléments* K, M, η, y, *pour la travée adjacente.*

Considérons par exemple le troisième appui à partir de la gauche ; examinons successivement la ligne des M', des η', des y' de la troisième travée. De la ligne des M', nous connaissons le point G ; en intégrant l'ordonnée de ce point, nous obtenons le côté GH de la ligne des η' ; en intégrant ce côté, nous obtenons les deux côtés GH et HI de la ligne des y'. Donc joignons le point I au point invariable K, la ligne des y' est déterminée ; on obtient les lignes des η', des M', des K' par différentiations.

II. *Un couple inconnu agit à l'une des extrémités de la poutre donnée ; on donne l'inclinaison* η_0 *de la fibre déformée à l'autre extrémité ; trouver tous les éléments de la poutre.*

Le couple agit par exemple à l'extrémité droite ; nous connaissons à l'extrémité gauche le moment fléchissant qui est nul et l'inclinaison η_0 ; en appliquant la construction précédente à la première travée, puis à la seconde et ainsi de suite, nous trouverons successivement les lignes des η', des M', des K' pour toute la poutre.

III. *On fait varier η_0 en modifiant le couple extrême ; toutes les ordonnées des* K', *des* M', *des η', des y' sont des fonctions linéaires des ordonnées connues et de η_0.*

Les ordonnées connues sont les ordonnées des points invariables de la ligne des y' ; il faudrait y joindre l'ordonnée du point A de la ligne des M' ; mais ici cette ordonnée est nulle. Exprimons par l'analyse toutes les relations entre les ordonnées des sommets des lignes des M', des η' et des y' ; on ne trouve que des équations de la forme :

$$\eta = \eta' + \mathrm{M}\frac{l}{2},$$

$$y = y' + \eta\frac{l}{3}.$$

Elles sont toutes homogènes et du premier degré par rapport aux ordonnées ; parmi ces ordonnées nous connaissons η_0 et les ordonnées $y_0, y_1, y_2, \ldots$ des points invariables de la ligne des y' ; nous savons que l'on peut en déduire toutes les autres ; si on résout ces équations, on trouve qu'une ordonnée quelconque X a pour valeur une expression de la forme :

$$\mathrm{X} = a\eta_0 + b_0 y_0 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots.$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

IV. *Si η_0 varie, les différentes positions de chacun des côtés des polygones des* M', *des η', des y' constituent un système de droites du premier degré*(190)*; l'axe des η_0 est vertical; l'abscisse du pivot est indépendante des ordonnées connues.*

Soient : x', y' ; x'', y'' ; les coordonnées des extrémités d'un de ces côtés ; son équation est :

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x').$$

Mais y' et y'' sont des fonctions linéaires des ordonnées connues et de η_0; on pourra donc mettre la valeur de y sous la forme :

$$y = x(a\eta_0 + \Sigma b_0 y_0) + c\eta_0 + \Sigma d_0 y_0 .$$

ou bien

$$\eta_0(ax + c) + x\Sigma b_0 y_0 + \Sigma d_0 y_0 - y = 0.$$

C'est l'équation d'un système du premier degré dont l'axe est vertical; les équations du pivot sont :

$$ax + c = 0,$$
$$y = x\Sigma b_0 y_0 + d_0 y_0.$$

La première équation donne l'abscisse du pivot, elle est indépendante des ordonnées connues; la seconde donne l'ordonnée du pivot, c'est une fonction linéaire de ces ordonnées. Il résulte de là que *si l'on modifie de toutes les manières les charges et les niveaux des appuis d'une poutre continue, les pivots se déplacent sur des lignes verticales.*

599. Méthode générale. — La solution que nous cherchons est une des solutions en nombre infini que l'on obtient en faisant varier η_0; c'est celle pour laquelle on trouve un moment extrême égal à zéro. Déterminons d'abord les pivots des différents côtés; il suffit pour cela de tracer les solutions pour deux valeurs de η_0; les deux positions de chacun de ces côtés se coupent au pivot de ce côté. On obtient alors facilement la solution cherchée.

Soient (fig. 237) P, Q, R les pivots des côtés de la ligne des M'; partons de l'extrémité droite, le côté KN passe par deux points connus N et R ; on trouve ensuite les autres côtés successivement en joignant KQ, GP et DA.

Soient de même (fig. 238) P, Q, R, S les pivots du polygone des η'. Le côté LN passe par S, sa direction est celle de l'intégrale de l'ordonnée du point N de la ligne des M' ; on peut donc trouver ce côté ; on obtient tous les autres en utilisant les pivots. En prenant la dérivée de la ligne des η', on retrouve la ligne des M'.

Soient de même (fig. 239) P, Q, R les pivots des côtés auxiliaires du polygone des y' ; les points invariables sont évidemment les pivots des côtés tangents. Le côté LM coupe l'ordonnée du point N au point N' ; on sait (598) que NN' peut s'obtenir *a priori* en intégrant une droite quelconque des M' passant par le point N de l'épure des M'. Il n'est pas même nécessaire de tracer cette droite ; on prend, sur l'épure des η, L''N' comme côté intégral de l'ordonnée du point N des M' ; on trouve L''M'N sur l'épure des y pour intégrale seconde ; en prolongeant L''M', on trouve le point N'. On aurait évité cette petite construction en choisissant le point N de la ligne M sur l'axe M = 0 ; car alors NN' = 0. Connaissant le point N', on obtient le côté LM en joignant N'R ; on trouve successivement tous les autres côtés en utilisant les pivots. En prenant la dérivée seconde de la ligne des y', on retrouve une troisième fois la ligne des M'.

La méthode que nous venons d'exposer est très complète ; elle repose sur des principes très simples ; mais elle conduit à tracer des lignes inutiles puisqu'on trouve la ligne des M' de trois manières ; en décomposant ces tracés surabondants, nous trouverons les trois méthodes pratiques suivantes.

600. Solution par l'épure des y. — Nous supposons que l'on ait tracé la ligne des y et déterminé les points invariables A, D, G, K, N, (fig. 239) de la ligne des y'. Exprimons que l'on connaît les valeurs de M' aux extrémités de la poutre ; en A, on a M' = 0 donc les côtés AB et BC ont même direction ; en N, le moment M' est connu, on détermine le point N' comme nous l'avons dit précédemment ou mieux on modifie la ligne des M pour la dernière travée de manière à avoir M' = 0 à l'extrémité N. Cela étant, on peut déterminer la ligne des y' sans utiliser les autres épures.

Remarquons tout d'abord que les arcs paraboliques du troisième degré qui forment la ligne des y' ont entre eux un contact du second ordre ; car, au point de jonction, les dérivées secondes, qui sont les M', sont les mêmes pour les deux arcs. Appliquons le théorème du numéro 546 ; les côtés auxiliaires adjacents à une tangente commune se coupent

sur la directrice du contact d'ordre deux. Nous appellerons ces directrices les DIRECTRICES DE CONTINUITÉ parce qu'en exprimant le contact d'ordre deux, nous exprimons que les M' varient continûment; elles s'obtiennent bien facilement en renversant les distances du point invariable considéré aux verticales principales voisines; nous les avons représentées par des traits mixtes.

Donnons-nous arbitrairement la valeur de η_0; cela revient à se donner la direction des côtés ABC; nous pouvons alors tracer successivement les côtés du polygone des y' de la manière suivante : on prolonge AC jusqu'en d: on tire CE par le point D; on trace dg par les points d et E; on tire FH par le point G, on trace gk par les points g et H, etc... En prenant η_0 arbitrairement, nous trouverons une solution possible avec un couple extrême; nous obtiendrons la solution véritable au moyen des pivots. On obtiendrait ces pivots en traçant deux solutions complètes; mais on peut déterminer les pivots de proche en proche. Par le point A menons une solution ACd'E'; prenons ensuite comme deuxième solution la droite AP, on reconnaît immédiatement que le triangle Cd'E' se réduit alors à la droite AP; on obtient ainsi le pivot P du côté EF. Par le point P', menons une solution quelconque P'F'gH' et la solution droite PGQ; on obtient le pivot Q du côté HI. On continue de la même manière. Les pivots étant connus, on part du point N' et l'on trace successivement tous les côtés en les faisant passer par les pivots. On obtient ensuite les lignes des η' et des M' en prenant les dérivées de la ligne des y'.

601. Solution par l'épure des η. — Déterminons comme nous l'avons dit précédemment les points invariables A, D, G, K, N de la ligne des y'; menons par la pensée les cordes AD, DG, GK, KN; portons les dérivées de ces cordes, au milieu des travées sur l'épure des η; nous obtiendrons les points moyens $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des arcs des η'; ce sont les centres de gravité des triangles formés par les cordes et les tangentes extrêmes de ces arcs; nous appellerons ces points *les points invariables de l'épure des η'*.

Donnons-nous η_0 ; cela revient à nous donner le côté AB de la ligne des η'. Le triangle ABD est alors déterminé par un côté et son centre de gravité ; on trace la médiane AαC que l'on termine en C aux trois quarts de la travée ; on tire le côté BD par le point C. En prolongeant BD, on obtient le côté DE ; le triangle DEG est encore déterminé par un côté et le centre de gravité ; on l'obtient par la construction précédente. On continue de la même manière.

En prenant η_0 arbitrairement, nous trouverons une solution fausse à moins que l'on introduise un couple extrême ; nous trouverons la solution vraie en déterminant les pivots.

Menons d'abord une solution quelconque A'B'C' ; menons ensuite la solution droite A''αP pour laquelle le triangle se réduit à une droite unique ; on obtient le pivot P du second côté. Par le point P menons une solution quelconque PD'E'F' et la solution droite PβQ ; on obtient le point Q, pivot du côté EG. On obtient de même les pivots R et S. Partons alors de l'extrémité gauche ; le côté LN a une direction connue (intégrale de l'ordonnée N des M') et passe par le point S ; on trace ce côté et on mène tous les autres et utilisant les pivots. On obtient la ligne des M' en prenant la dérivée de la ligne des η'.

602. Solution par l'épure des M'. — Déterminons comme nous l'avons dit précédemment les points invariables α, β, γ, δ de l'épure des η' ; menons par la pensée les cordes $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$; prenons les dérivées de ces cordes et portons-les sur l'épure des M' suivant les directrices de continuité ; nous obtiendrons les points α, β, γ de la figure 237 : ce sont *les points invariables de l'épure des* M'. Considérons les points principaux des lignes des M' pour chaque travée ; pour chaque sommet de la ligne des M', joignons les points principaux voisins ; nous aurons ainsi les cordes CE, FH, IL que nous appellerons *les cordes principales de la ligne des* M' ; nous allons démontrer que *toute corde principale de la ligne des* M' *passe par le point invariable correspondant.*

Démontrons, par exemple, que la corde CE passe par le point α. A cet effet, déterminons, par la remarque du nu-

méro 550, la dérivée de la droite $\alpha\beta$ des η' en la considérant comme une corde de l'angle $\alpha D\beta$; nous trouvons que les dérivées des côtés, αD, $D\beta$ et $\alpha\beta$ de l'épure des η' sont respectivement les ordonnées suivantes de l'épure des M' : l'ordonnée du point C, l'ordonnée du point E, l'ordonnée du point qui divise CE en parties inversement proportionnelles aux longueurs des demi-travées adjacentes; or la directrice de continuité divise précisément CE dans ce rapport inverse; donc la corde CE détermine sur cette directrice l'ordonnée dérivée de la ligne $\alpha\beta$ des η'; donc la corde CE passe par le point invariable α, ce qu'il fallait démontrer.

Montrons d'abord comment on trace une solution qui correspond à un couple extrême inconnu. En faisant varier η_0, le côté AD des M' pivote autour du point A; donc prendre η_0 arbitrairement, c'est tracer arbitrairement le côté AD des M'. En utilisant les points invariables, on peut alors tracer tous les autres côtés; on trace CE par le point α, on tire DG par le point E; on trace FH par le point β et ainsi de suite.

Pour obtenir la solution vraie, déterminons d'abord les pivots des M'. Par le point A, menons la solution quelconque AC'D'E' et la solution droite $A\alpha P$; on obtient le pivot P. Par le point P menons la solution P'F'G'H' et la solution droite $P\beta Q$; on obtient le pivot Q. On trouve de même le pivot R. Partons ensuite du point N, menons NKGDA par les différents pivots, le problème est résolu.

603. Cas général ramené au cas où les appuis sont au même niveau. — Appliquons le second corollaire du théorème de l'indépendance des effets des forces (543); déterminons l'état de sollicitation de la poutre en supposant les charges nulles ; nous obtiendrons ainsi l'influence de la dénivellation des appuis ; il suffira d'ajouter les éléments de cette poutre non chargée à ceux de la poutre chargée posée sur appui de niveau.

Pour obtenir les éléments de la poutre non chargée, on applique la méthode générale ; les intégrales de la charge sont évidemment $K = 0$, $M = 0$, $\eta = 0$, $y = 0$; on cherche les lignes de repère comme il a été dit précédemment. Pour

opérer l'addition des éléments de la poutre chargée et de la poutre non chargée, il suffit d'ajouter séparément les ordonnées des lignes intégrales et les ordonnées des lignes de repère ; or pour la poutre non chargée les intégrales sont nulles ; donc il suffit d'ajouter les M', les η', les y' des deux poutres (1).

On peut aussi déterminer les éléments de la poutre non chargée en prenant pour lignes de repère des axes horizontaux. On porte sur l'épure des y les ordonnées des appuis à partir de l'axe $y = 0$; il s'agit de déterminer les éléments d'une poutre non chargée assujettie à passer par des points connus ; aux extrémités de cette poutre les moments fléchissants sont nuls ; c'est le problème que nous avons résolu en cherchant les lignes de repère du cas général (597).

604. Détermination directe des points invariables des η'. — Dans ce qui va suivre, nous supposerons les appuis de niveau; dans ce cas, les ordonnées aA, cD, fG, tK, nN de la ligne des y sont égales et les cordes invariables AD, DG, GK, KN sont parallèles aux cordes ac, cf, fi, in de la ligne des y; donc les ordonnées des points invariables des η' qui sont les dérivées des cordes des y', sont aussi les dérivées des cordes des y; ce sont les ordonnées moyennes des η. Si les appuis étaient de niveau, les points invariables des η' ne se trouveraient donc plus en α, β, γ, δ (fig. 238), mais coïncideraient avec les points moyens α', β', γ', δ' des arcs des η. (Nous n'avons pas représenté la nouvelle ligne des η'). Nous savons que, dans certains cas, on peut trouver l'ordonnée moyenne des arcs des η sans recourir à l'épure des y.

(1) Cette proposition est un cas particulier d'une autre proposition : le principe de l'indépendance des effets des forces s'applique aux ordonnées des points invariables des trois épures. Nous savons en effet que les éléments de la poutre pour l'ensemble des causes s'obtiennent en additionnant séparément les ordonnées des intégrales et les ordonnées des lignes de repère. Si on ajoute les M', les η', les y', on peut aussi ajouter les ordonnées des points invariables; on le reconnaît facilement.

Supposons, par exemple, que pour chaque tracé, on détermine la transformée droite de la ligne des M, c'est-à-dire les lignes de repère pour le cas où chaque travée aurait ses extrémités encastrées suivant une même ligne horizontale. Substituons ces transformées à la ligne des M et intégrons; nous savons que la corde des η et les tangentes extrêmes aux arcs des y seront conservées : cela résulte de la méthode employée pour déterminer cette transformée droite (577, 578); cela résulte aussi de ce que pour chaque travée les surfaces des M sont remplacées par des surfaces équivalentes et de même moment (580). En intégrant les transformées rectilignes, nous obtenons des arcs des η paraboliques déterminés par leurs tangentes extrêmes; les centres de gravité des triangles formés par les cordes et ces tangentes extrêmes sont précisément les points moyens des η ; ce sont donc les points invariables α', β', γ', δ' qu'il s'agit de trouver.

605. Détermination directe des points invariables des M'.—Déterminons les points principaux des transformées droites, c'est-à-dire les points de ces droites situés sur les verticales principales; pour chaque appui, joignons les points principaux les plus voisins; nous obtenons des cordes C''E''; nous les appellerons *cordes principales des transformées*. Nous allons démontrer que quand les appuis sont de niveau, les cordes principales des transformées droites passent par les points invariables de la ligne des M'.

Proposons-nous, par exemple, de prouver que le point α' de la corde C''E'' est l'un des points invariables. Reprenons l'épure des η ; l'ordonnée du point invariable que nous cherchons est la dérivée de la droite $\alpha'\beta'$. Nous allons raisonner sur cette dérivée comme nous avons raisonné au numéro 602 sur la dérivée de $\alpha\beta$. Appliquons la remarque du numéro 550 ; les médianes $\alpha' d$ et $d\beta'$ ont pour dérivées les ordonnées des points principaux C'', E'' des transformées droites ; on en conclut que la dérivée de la droite $\alpha'\beta'$ est l'ordonnée du point α', qui divise la corde C''E'' dans le rapport inverse des longueurs des demi-travées ; or la directrice de conti-

nuité divise précisément la corde C″E″ dans ce rapport inverse ; donc ce point α' est le point invariable cherché (1).

606. Remarques diverses. — 1° On peut exprimer par l'analyse les trois méthodes graphiques précédentes (600, 601, 602) ; la solution par l'épure des M conduit au théorème des trois moments ; ce théorème peut se mettre sous la forme d'une relation entre deux moments principaux séparés par un sommet. La solution par l'épure des η fournit une relation entre deux inclinaisons et un moment fléchissant. La solution par l'épure des y fournit une relation entre trois inclinaisons.

2° Si les appuis sont de niveau, la relation entre les moments sur deux travées adjacentes peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\mu}{l} = \frac{\mu'}{l'}.$$

μ, μ' sont les moments des surfaces des M vrais, pris pour chaque travée, autour de l'extrémité qui ne touche pas l'autre travée.

On arrive à cette relation en prenant la tangente à ligne des y sur l'appui intermédiaire comme ligne de repère et en exprimant que les trois appuis sont en ligne droite ; on utilise la formule (1) du numéro (576).

---

(1) On peut remarquer que, sur l'épure des M, $\alpha'\alpha$ représente le déplacement du point invariable dû aux différences de niveau des appuis ; ce déplacement est précisément l'ordonnée du point invariable dans le cas d'une poutre non chargée ; on peut le trouver facilement ; on peut donc déduire le point α du point α'. On obtiendrait aussi α directement en substituant aux lignes des M, les lignes de repère des travées encastrées horizontalement sur des appuis placés aux niveaux donnés et en opérant sur ces droites comme sur les précédentes. Il nous paraît préférable d'étudier séparément l'influence des charges et celle du niveau des appuis.

§ 3. Épure des pivots.

607. Épure spéciale des pivots. — Nous avons fait remarquer que les abscisses des pivots ne dépendent que des abscisses des appuis ; on peut donc déterminer ces abscisses par une épure spéciale en prenant arbitrairement les charges ou les points invariables ; ce qu'il y a de plus simple c'est de supposer les charges nulles et les appuis de niveau ; alors la solution vraie est évidemment :

$$M = 0, \quad \eta = 0, \quad y = 0,$$
$$M' = 0, \quad \eta' = 0, \quad y' = 0.$$

Les ordonnées des points invariables sont nulles ; les pivots qui doivent se trouver sur la solution vraie, ont des ordonnées nulles également ; on les détermine de proche en proche en imaginant d'autres solutions qui seraient produites par un couple extrême. Connaissant les abscisses des pivots, les épures des M', des η', des y' pour la poutre chargée deviennent plus simples ; il suffit d'imaginer une seule solution ; on détermine, par exemple, les pivots de proche en proche au moyen des solutions droites ; pour les trois épures, *les polygones des pivots sont circonscrits aux polygones des points invariables ; les polygones des* M', *des* η', *des* y' *sont circonscrits aux polygones des pivots.*

L'avantage qu'il y a à déterminer les abscisses des pivots par une épure spéciale est surtout considérable quand on doit étudier l'effet de diverses combinaisons de charges sur une même poutre ; les abscisses trouvées servent pour toutes les épures.

608. Épure des M. — Soit (fig. 237bis) AN la poutre non chargée posée sur appuis de niveau. Prenons les points invariables sur l'axe AN en A, α, β, γ, N ; la droite AN est la solution vraie de la ligne des M' ; les pivots se trouvent sur cette droite ; on les obtient en imaginant d'autres solutions dues à l'introduction d'un couple extrême en N ; on trouve P, Q, R au moyen des solutions ACDE, PFGH, QIKL.

Menons les verticales des points P, Q, R et rapportons-les dans la figure 237; supposons que dans cette dernière figure les points invariables α, β, γ soient connus; on obtient les pivots P, Q, R (fig. 237) en traçant le polygone des pivots APQR, à partir du point A, de telle manière que les côtés passent par les points invariables α, β, γ et que les sommets soient sur les verticales déterminées par l'épure spéciale des pivots.

Au lieu de partir de la gauche, on pourrait partir de la droite en imaginant un couple indéterminé à l'extrémité gauche de la poutre ; on trouve alors (fig. 237bis) les pivots R′, Q′, P′ pour la poutre non chargée. Remarquons que nous utilisons les mêmes cordes principales CE, FH, IL pour déterminer les pivots P, Q, R et les pivots R′, Q′, P′ ; ces cordes sont arbitraires, elles peuvent se tracer tout d'abord avant de procéder à la détermination des deux séries de pivots. En rapportant les verticales des pivots R′, Q′, P′, sur l'épure 237, on pourrait tracer le nouveau polygone des pivots comme précédemment et tracer la ligne des M′ en partant du point A ; nous n'avons pas tracé cette nouvelle solution. On pourrait même déterminer un côté quelconque de la ligne des M′ de la poutre chargée, au moyen de deux pivots de ce côté ; on détermine ces deux pivots en traçant les fragments des deux polygones des pivots que l'on obtient en marchant des extrémités de la poutre vers la travée considérée ; on trace la solution vraie en marchant de cette travée vers les extrémités.

609. Épure des η. — Soit la poutre non chargée *an* (fig. 238 ^{bis}). Prenons les points invariables en α, β, γ, δ ; la solution vraie est la droite *an*; on trouve les pivots P, Q, R, S au moyen des solutions ABC, PDEF, QGHI, RKLM. On rapporte les verticales des pivots sur la figure 238 ; on obtient sur cette figure, les pivots P, Q, R, S en menant le polygone des pivots APQRS; le premier côté est horizontal et passe par le point α, les autres passent par les autres points invariables β, γ, δ; les sommets se trouvent sur les verticales déterminées par l'épure spéciale des pivots.

Nous avons aussi déterminé sur la figure 238bis les pivots S', R', Q', P' que l'on obtient en se donnant une inclinaison variable à l'extrémité droite et un couple à l'extrémité gauche; en utilisant ces pivots, on obtient une autre solution du problème.

On trouvera (fig. 238ter) une petite modification de l'épure des η', pour la poutre non chargée. Au lieu de mener par les points α, β, γ, δ les médianes des triangles des η', on imagine par ces points des parallèles aux tangentes extrêmes; elles coupent ces tangentes extrêmes sur les verticales principales. Ainsi, par exemple, si on connaît P, on mène PDEβ, βF parallèlement à PE, FQ parallèlement à Eβ; on obtient le pivot Q.

610. Épure des y. — Soit (fig. 239bis) AN la poutre droite non chargée; on obtient AN comme ligne des y; la position vraie de la ligne des y' est évidemment $y' = 0$; les points invariables de la ligne des y' sont les appuis A, D, G, K, N; les pivots des côtés des y' sont tous sur la solution vraie $y' = 0$; il suffira d'imaginer une autre solution de la ligne des y' en introduisant un couple extrême pour obtenir ces pivots. On trouve les pivots P, Q, R au moyen des solutions ACdE, PFgH, QIkL.

Rapportons les verticales des pivots de la figure 239bis à la figure 239. On obtient sur cette figure les pivots P, Q, R en menant le polygone APQR; le premier côté passe par les deux points invariables A et D, les autres par les autres points invariables G et K.

Si on part de l'extrémité droite avec une inclinaison variable η_0, on obtient les pivots R', Q', P' (fig. 239bis). On remarquera que l'on peut tracer tout d'abord les tangentes CE, FH, IL avant de passer à la détermination des deux séries des pivots.

611. Théorème. — *Pour une même travée, le pivot de la ligne des* M' *et le pivot du côté auxiliatre de la ligne des y' se trouvent sur une même verticale.*

En effet, considérons le côté DG de la ligne des M' (fig. 237) et le côté EF du polygone des y' (fig. 239.) Il s'agit de démon-

trer que les deux pivots représentés sur ces figures, par la même lettre P, sont situés sur la même verticale.

Considérons d'abord l'épure des M'; nous savons (115) qu'en prenant des bases convenables, l'une des intégrales secondes de la droite DG et Dee'G. Si on fait varier η_0, l'ordonnée comprise, sur la verticale du pivot P, entre les droites ee' et DG reste constante. Mais cette propriété est indépendante des échelles; elle existe donc dans l'intégrale seconde DEFG de la figure 239; donc c'est sur la même verticale que nous trouverons une ordonnée comprise entre DG et EF qui soit indépendante de η_0; cette ordonnée est évidemment celle qui correspond an pivot du côté EF; cela démontre le théorème.

Ce raisonnement prouve aussi qu'il y a certaines relations entre l'épure des M' et celle des y'. Les figures DEFG des y' et Dee'G des M' peuvent se déduire l'une de l'autre en changeant l'échelle des ordonnées (on prend comme lignes de repère les deux droites DG des deux figures). Donc le point où l'on aurait M' = 0 peut aussi s'obtenir sur l'épure des y'; les droites EF et DG se coupent sur la verticale de ce point. Si cette verticale se trouvait à l'intérieur de la travée, la ligne des y' présenterait sur cette verticale un point d'inflexion.

619. Démonstration géométrique de l'existence des pivots. — Nous allons démontrer géométriquement que les côtés des y', des η', des M' pivotent autour de points fixes lorsque l'on fait varier l'inclinaison η_0 à une extrémité; cette démonstration convient mieux que l'analyse pour mettre en relief certaines propriétés intéressantes.

Reprenons l'épure des y' (fig. 239); les points invariables A, D, G, K, N sont déjà les pivots des tangentes extrêmes des arcs des y'; il s'agit de prouver d'abord que les côtés auxiliaires du polygone des y' et le côté de la ligne des η' pivotent aussi autour de points fixes. Considérons les côtés ACD des y' et prenons AD comme ligne de repère; quand η_0 varie, le polygone ACD vient prendre une position AC'D; on

peut dire que les choses se passent comme si l'on changeait l'échelle des ordonnées de la ligne ACD. Il en est de même de la dérivée, si on prend comme ligne de repère l'horizontale $A''\alpha$ (fig. 238) dérivée de la ligne de repère AD des y'; donc le triangle ABD des η' variera en passant de la position ABD à une autre A'B'D' comme si l'échelle de ses ordonnées variait; mais alors les ordonnées nulles ne changent pas, donc la droite BD pivote autour du point P où elle coupe la ligne $A''\alpha$. Mais le côté BD se prolonge jusqu'au point E ; quand ce côté pivote, ses ordonnées varient dans un rapport constant; il en est de même de l'intégrale ACDEF (fig. 239); donc le côté EF pivote aussi autour du point P où il coupe la ligne de repère AD.

Continuons de la même manière. Menons sur l'épure des y' la droite PG que nous prenons comme ligne de repère pour la ligne PFGHI. Les ordonnées de la ligne PFG varient dans un rapport constant; donc sur l'épure des η le côté EG pivote autour d'un point de l'horizontale dérivée de la ligne PG des y'. Le côté EG des η se prolonge jusqu'en H; donc les ordonnées de la ligne PFGHT varient dans le même rapport; donc le côté HI pivote autour du point Q où il coupe la ligne de repère PG. Du pivot Q, on passe au pivot R de la même manière.

Nous avons démontré que les côtés des η' pivotent, il est facile de prouver que les côtés des M' pivotent aussi. En effet, prenons sur l'épure des η', la droite QR comme ligne de repère pour la ligne QHR ; les ordonnées de cette ligne QHR varient dans le même rapport; il en est de même des dérivées; donc le côté GH des M' pivote autour d'un point de l'horizontale dérivée de la droite QR des η'.

613. Relations entre les ordonnées des pivots — *Les pivots des* M' *ont pour ordonnées les dérivées des côtés du polygone des pivots des* η'; *les pivots des* η' *ont pour ordonnées les dérivées des côtés du polygone des pivots des* y'.

En effet, nous avons prouvé, par exemple, que le pivot P des η' se trouve sur l'horizontale dérivée du côté AP des y'; que le pivot Q des M' se trouve sur l'horizontale dérivée du côté QR du polygone des pivots des η'.

612. Relations entre les abscisses des pivots. — I. *Un côté des* M′ *est divisé par son pivot dans un certain rapport; la distance des pivots correspondants des* η' *est divisée par la verticale centrale dans un rapport inverse du précédent.*

En effet, la corde qui joint les deux pivots des η' a pour dérivée l'ordonnée du pivot des M′; mais cette dérivée est aussi l'ordonnée du point qui divise le côté des M′ dans le rapport inverse des projections des côtés des η' sous-tendus par la corde qui joint les pivots de ces côtés; cela démontre la proposition.

II. *Un côté des* η' *est divisé par son pivot dans un certain rapport; la distance des pivots des deux côtés correspondants des* y' *est divisée par la verticale du point d'intersection de ces côtés, dans un rapport inverse du précédent.*

Cette proposition se démontre comme la précédente; elle peut s'interpréter de deux manières; on peut prendre comme côté des η' la distance entre un sommet du polygone des η' et le point de contact voisin, ou la distance entre deux sommets. Dans le premier cas, le sommet des y' qu'il faut considérer est sur une verticale principale; dans le second cas, le sommet des y' est le point d'intersection de deux côtés auxiliaires voisins, il est situé sur la directrice de continuité.

III. *Applications.* — Ces relations permettent de trouver les abscisses des pivots par une nouvelle méthode. Prenons (fig. 243bis) le cas d'une poutre à quatre travées; les deux premières sont AB, BC; les deux autres sont symétriques des précédentes par rapport au point C. Supposons le problème résolu et portons les projections des pivots des M′ en P, Q. Traçons deux autres horizontales A′H et A″C″; portons sur la première les milieux D, E, H des travées et les P′, Q′ des pivots des η'; portons sur la seconde les projections des directrices de continuité F et C″ et des pivots des y', P″ et Q″. Les rapports inverses dont il vient d'être question donnent lieu chacun à un système de trois sécantes qui se coupent en un même point. Mais il est facile de démontrer que le pivot P′ des η' tombe aux deux tiers de la première travée;

on reconnaît alors que l'on peut trouver successivement P', P et P'', Q', Q et Q'', etc.

Cette épure prouve aussi que les abscisses des pivots sont indépendantes des charges et des niveaux d'appuis (1).

§ 3. Charge permanente uniforme.

615. Travées égales. — Soit *Abcd* (fig. 240) la moitié d'une poutre à cinq travées ; l'autre moitié est symétrique de la première, il est inutile de la représenter. Traçons, par la pensée, sur les travées *Ab*, *bc*, *cd* les paraboles des moments fléchissants dans l'hypothèse d'une poutre discontinue formée de travées indépendantes simplement appuyées à leurs extrémités ; il s'agit de trouver la ligne de repère ABCD qu'il faut prendre quand la poutre est continue et posée sur appuis de niveau. Remplaçons les paraboles par leurs transformées droites ; toutes ces transformées s'alignent sur une même droite EF dont l'ordonnée AE est égale aux deux tiers de la hauteur verticale des paraboles ; cette ordonnée s'obtient graphiquement en intégrant deux fois la charge ou par calcul ; on a :

$$AE = \frac{2}{3}\frac{pl^2}{8}.$$

Dans cette formule, p est la charge par unité de longueur, l est la longueur des travées. Les cordes principales des transformées se trouvent aussi sur la droite EF, les directrices de continuité sont les verticales des appuis, on obtient donc en α et β les points invariables des M'. Traçons les

(1) Nous avons admis que les pivots des M' et des y' étaient situés sur une même verticale. On peut se passer de cette proposition en appliquant la proposition II en prenant comme côté des η' les côtés compris entre les sommets et les points de contact. On peut alors démontrer directement que les pivots des M' et des y' sont situés sur une même verticale.

verticales des pivots au moyen de l'épure spéciale des pivots; menons ensuite le polygone des pivots APQ par les points α et β. Le côté CD des M' doit être horizontal par raison de symétrie, il passe par le point Q ; donc on peut le tracer : on en déduit CB et BA. Le problème est résolu.

Il est cependant préférable d'avoir une ligne de repère horizontale ; pour l'obtenir il suffit de remarquer que les moments vrais sur les appuis sont donnés par la figure 240 ; ce sont : zéro, Bb, Cc. Portons-les (fig. 242) à partir d'une horizontale Ad ; on obtient les points A, B, C de la ligne des M vrais. Nous aurions pu obtenir directement ces points A, B, C en construisant l'épure de la figure 240 en changeant le sens des ordonnées ; il se fait qu'alors les moments vrais sont portés dans le sens qui leur convient quand on reprend le sens habituel des ordonnées.

Disons quelques mots du tracé des paraboles de la figure 242. Remarquons qu'en prenant AB, BC, CD comme lignes de repère, chacune de ces paraboles représentent la ligne des M pour une poutre sur deux appuis de même portée et chargée de la même manière ; il suffit donc de construire l'une de ces courbes. Ainsi, par exemple, construisons la demi-parabole CH ; on prend, à cet effet, $HD = pl^2 : 8$: on prend H comme origine, HK comme axe des x, on multiplie les ordonnées de CH par ses abscisses (70) ; on obtient la parabole. (On pourrait aussi l'obtenir en intégrant une droite.) Les ordonnées de l'arc CH par rapport à CD doivent être alors portées à partir des cordes AB et BC, prises comme lignes de repère ; les points à égale distance des milieux des travées ont même ordonnée. On peut aussi construire le patron d'une parabole indéfinie intégrale seconde de la charge et faire mouvoir cette parabole parallèlement à elle-même jusqu'à ce qu'elle passe par les deux points qui déterminent chacune des paraboles à tracer.

616. Solution par l'épure des η. — La solution que nous venons d'exposer est la plus simple ; nous donnons les suivantes à titre de curiosité. Reprenons la figure 240 et remplaçons encore les paraboles par leurs transformées

droites, pour trouver la ligne des η. Ces transformées s'alignent sur la droite EF ; prenons cette droite EF comme ligne de repère provisoire pour la ligne des M ; l'intégrale des transformées sera $\eta = 0$. Nous représentons cette intégrale en $A'\alpha\beta\gamma$ (fig. 241) ; les points moyens des η sont évidemment les points α, β, γ ; ce sont les points invariables des η'. Le premier côté AB de la ligne des η' a une direction connue ; c'est l'intégrale du moment fléchissant M' à l'extrémité gauche de la poutre. Prenons la demi-travée comme base d'intégration : la direction du côté AB est précisément celle de la droite βd de la figure 240. Traçons les verticales des pivots des η' au moyen d'une épure spéciale des pivots ; menons par le point α une solution droite αP parallèle à la direction connue de AB ; nous pouvons alors achever le tracé du polygone des pivots $\alpha PQ\gamma$ en le faisant passer par les points invariables. On peut s'arrêter à la travée centrale ; nous savons, en effet, que dans cette travée centrale la ligne des M' est horizontale, donc la ligne des η' est une simple droite suivant laquelle s'alignent les deux côtés ordinaires du polygone d'intégration ; cette droite passe par le point Q et le point γ ; on peut la tracer ; on obtient ensuite les côtes DB et BA ; la ligne des η' est connue. On obtiendrait la ligne des M' en prenant la dérivée de la ligne des η' ; mais on trouve immédiatement que les M' sur les appuis sont Aa, Cc, Ee.

617. Solution pour l'épure des y. — La solution par l'épure des y va nous conduire précisément à la figure 242 que l'on obtient aussi par l'épure des M renversée. Nous venons de trouver qu'en remplaçant les paraboles des M par leurs transformées droites et en prenant pour ligne de repère provisoire la droite suivant laquelle ces transformées s'alignent, on obtient pour ligne des η, $\eta = 0$; dans les mêmes hypothèses on trouvera pour ligne des y, $y = 0$. Soit (fig. 242) EF cette ligne des y ; il s'agit de trouver la ligne des y EHKLMND. Nous prenons comme bases d'intégration $\frac{1}{2}\,l$

et $\frac{1}{3}l$; nous savons qu'alors l'épure des y' donne immédiatement les M' (115, 577). Les points invariables des y' sont les points E, α, β; au point E nous connaissons la valeur de M'; cette valeur est représentée par l'ordonnée EAd la figure 240; dans la figure 242, elle est représentée par l'ordonnée AE, le point A est le pivot du côté HK prolongé; on obtient ce point A en portant :

$$AE = \frac{pl^2}{8}.$$

Menons les verticales des pivots; on obtient le polygone des pivots en APQ. Le côté ND est horizontal par raison de symétrie; on le mène par le pivot Q. On obtient alors la ligne des y' en DNMDKME en utilisant les pivots et les points invariables. Les moments M' sur les appuis sont représentés par AE, Bα, Cβ; on reconnaît sans peine qu'ils sont portés en sens contraire à partir de la droite EF; les ordonnées des points A, B, C, représentent donc en réalité les — M'. Pour obtenir les M vrais, il faut prendre M'' — M'; or M'' est constant et est représenté par AE; donc prenons pour axe la droite Ad, les ordonnées des points A, B, C représenteront : M'' + (— M'), c'est-à-dire les M vrais sur les appuis. On voit que l'on retrouve d'une autre manière la solution par l'épure des M' renversés.

618. Travées inégales. — Soit (fig. 243) Adg la moitié d'une poutre à quatre travées solidaires; nous supposons que l'autre moitié est symétrique de la première; nous ne l'avons pas représentée. Sur les travées Ad, dg, construisons par la pensée les paraboles des M pour le cas de travées non solidaires simplement appuyées à leurs extrémités; il s'agit alors de trouver la ligne des M', ADG. Remplaçons les paraboles par leurs transformées droites; la corde principale BC détermine le point invariable α sur la directrice de continuité; le point invariable β s'obtient immédiatement, parce que les travées adjacentes sont égales. Menons les verticales des pivots au moyen d'une épure spéciale des pivots; on peut

alors tracer le polygone des pivots APQ par les points A, α, β. Les deux côtés des M' pour les deux travées centrales doivent être symétriques ; prenons le point symétrique Q' du pivot Q ; le côté DG doit passer par le point Q' parce que son symétrique passe par le point Q ; le côté DG passe donc par les points P et Q' ; on le trace et on trouve ensuite le côté AD. Le problème est résolu.

Il est utile d'obtenir une épure où la ligne de repère soit horizontale ; on y arrive en redressant la ligne de repère ADG de la figure 243. On y arrive aussi en construisant la figure 243 en changeant le sens des ordonnées ; les ordonnées Dd, Gg représentent les moments vrais changés de signe ; par le renversement, on obtiendra les moments vrais avec leurs signes.

Pour obtenir les transformées droites EF et Hβ, il n'est pas nécessaire de tracer les paraboles des M ; on trace par rapport aux axes yox, la parabole

$$M = \frac{px^2}{2} ;$$

on porte les demi-travées en om et on ; on trouve en mM et nN les ordonnées dont il faut prendre les deux tiers pour avoir celles des transformées droites.

Variante I. — Ce qu'il faut déterminer, ce sont les points principaux de la transformée droite ; connaissant ces points on peut mener les cordes principales et on trouve les points invariables. On peut obtenir ces points principaux en appliquant le théorème suivant : *les points principaux de la transformée droite d'un arc parabolique se trouvent sur les cordes qui joignent les extrémités de cet arc au point situé sur la verticale centrale.*

Démontrons, par exemple, que le point C (fig. 243) se trouve sur la corde dM' qui joint le point d au sommet M' de la parabole des M ; en effet, on a :

$$\frac{Cc}{M'm'} = \frac{dc}{dm'} = \frac{2}{3}.$$

Variante II — Il n'est pas indispensable de déterminer les

points invariables. Déterminons les points principaux B et C des transformées droites; BC est la corde principale; on peut la choisir aussi comme corde principale d'une ligne des M'; nous obtenons la solution ABD'C; cette solution détermine le point P tout aussi bien que la solution droite Aα; on est ainsi débarrassé de la peine de tracer la directrice de continuité sur laquelle se trouve le point α.

§ 3. Charge mobile qui se fractionne par travées.

619. Charge uniforme sur une seule travée. — Soit (fig. 246) CE la travée chargée; CDE la parabole des moments fléchissants pour la travée isolée reposant simplement sur deux appuis; nous prendrons cette ligne comme ligne des M. Pour les travées qui précèdent et qui suivent nous prendrons M = 0; ces travées ne sont pas dessinées, mais il est aise de se les représenter. Il s'agit de trouver la ligne des M'. Partons de l'extrémité gauche, tous les points invariables qui précèdent la travée CE sont évidemment sur l'axe XC; donc cette droite est une solution de la ligne des M', possible par l'introduction d'un couple extrême (1). Continuons cette solution dans la travée CE. Menons par la pensée la corde principale XU des transformées droites pour la travée CE et et celle qui precède; nous reconnaissons que XCU est précisément la solution cherchée (618, variante II); or CU est précisément la droite CD qui joint le point C au sommet D de la parabole; donc cette droite CD prolongée est la solution cherchée de la ligne des M'. Traçons la verticale du pivot de ce côté des M', on obtient ce pivot P sur la droite CD; ce point P est déjà un point de la solution vraie de la ligne des M'.

Mais on peut faire le même raisonnement en partant de l'extremité droite de la poutre; ED est une solution; menons

(1) On reconnaît directement que c'est la solution qui correspond à $\eta_0 = 0$; en effet, les déformations des travées non chargées sont alors nulles et toutes les conditions de la déformation sont évidemment satisfaites.

la verticale du pivot de ce côté des M′ pour le cas où l'on part de l'extrémité droite avec une inclinaison variable; on trouve ce pivot en un certain point Q; c'est un second point de la ligne des M′; on obtient cette ligne cherchée en joignant PQ; on trouve la droite AB. Nous pouvons résumer les opérations précédentes dans l'énoncé suivant : *les pivots de la ligne des* M′ *pour la travée chargée se trouvent sur les cordes de la parabole des* M, *qui ont pour projection les demi-travées.* Lorsqu'on a tracé la ligne AB en joignant les deux pivots, la construction s'achève facilement. Du point A, on marche vers la gauche en menant le polygone des M′ par les pivots qui se trouvent sur l'axe M′ = 0. Du point B on marche vers la droite en menant le polygone des M′ par les pivots de seconde espèce qui se trouvent aussi sur la solution M′ = 0.

On obtient ainsi des lignes de repères brisées; on peut facilement redresser cette ligne de repère. Cette opération est inutile quand on trace le triangle CDE en changeant le sens des ordonnées; on reconnaît alors que les moments vrais sur les appuis sont placés dans leur sens véritable. Cet artifice est employé dans la figure 244. Cette figure se rapporte à une poutre à cinq travées; chacune des travées est chargée successivement; les lignes 1, 2, 3, 4, 5 sont respectivement les lignes des M pour une charge uniforme sur la 1re, la 2e, la 3e, la 4e et la 5e travée; les pivots analogues aux points P et Q de la figure 246 sont rendus apparents par les petites circonférences qui les entourent.

690. Charge mobile qui se fractionne par travées. — Nous assimilons le poids roulant à une charge uniforme; nous supposons que cette charge se fractionne par travées: on peut donc charger une ou plusieurs travées séparées, s'il y a lieu, par des travées vides; le nombre de combinaisons de travées chargées que l'on peut rencontrer est considérable, si les appuis sont nombreux. Pour toutes ces combinaisons, le moment fléchissant prend certaines valeurs comprises entre deux limites que l'on peut représenter par deux courbes: la courbe supérieure donne les plus grands moments négatifs; la courbe inférieure donne les plus grands moments positifs. Ce sont ces courbes limites qu'il faut déterminer.

Pour y arriver, chargeons successivement chaque travée et appliquons la règle précédente. Soit (fig. 244) une poutre à cinq travées égales ; il suffit de représenter la moitié de la poutre, l'autre moitié est symétrique. En chargeant la première travée, on trouve la ligne 1 ; en chargeant la dernière travée, on trouve la ligne 5 ; ces deux lignes sont symétriques. Ayant tracé la ligne 1, si on la prolongeait au-delà de l'axe de symétrie, on obtiendrait la ligne 5 en prenant la symétrie de la ligne 1 ; mais on peut supposer que la seconde moitié de l'épure soit rabattue sur la première par une rotation autour de l'axe de symétrie ; les pivots de gauche deviennent alors les pivots de droite ; la figure indique comment on trace le rabattement du prolongement de la ligne 1 ; c'est ce rabattement qui est la ligne 5. Les lignes 2 et 4 s'obtiennent de la même manière ; la ligne 3 est unique.

Appliquons le principe de l'indépendance des effets des forces ; en chaque point de la poutre ajoutons les moments négatifs d'une part, les moments positifs d'autre part ; nous obtiendrons évidemment les limites supérieures et inférieures (1). Il suffit d'ajouter les ordonnées aux appuis et aux points où il y a des changements de signe dans les lieux partiels ; on obtient des points qui doivent être réunis soit par des droites, soit par des arcs paraboliques ; comme ces derniers appartiennent tous à des paraboles identiques, on peut les tracer au moyen d'un patron auquel on communique un mouvement de translation, ou bien encore en traçant une parabole unique et en rapportant les ordonnées sur les différents arcs à tracer (615).

Dans une travée intermédiaire, il y a en général cinq régions séparées par les quatre points où il y a des changements de signe dans les lieux partiels ; les régions qui ont le plus d'étendue sont la région centrale et les deux extrêmes ; la région centrale est séparée des extrêmes par de petites

(1) Cette méthode est due à M. Maurice Lévy. Elle est exposée dans la plupart des traités.

régions intermédiaires. Si on faisait abstraction de ces petites régions, on reconnaît facilement que les combinaisons de charges les plus dangereuses ne seraient qu'au nombre de deux : 1° charger les travées de rang pair ; 2° charger les travées de rang impair. Dans les petites régions, on choisit encore ces deux combinaisons, mais on ajoute ou on retranche la charge sur la travée dont on s'occupe.

621. Théorème. — *La somme algébrique des ordonnées limites est égale au moment fléchissant que l'on obtient en chargeant toute la poutre.*

En effet, on obtient les deux limites en ajoutant d'une part toutes les ordonnées positives, d'autre part toutes les ordonnées négatives ; donc en ajoutant algébriquement ces deux limites, on obtient la somme algébrique de toutes les ordonnées : c'est le moment fléchissant pour toutes les charges réunies.

Corollaire. — Si, par une rotation autour de l'axe de repère AN, on applique les moments positifs sur les moments négatifs, les deux courbes limites se coupent en certains points B, F, G, L; en ces points la somme algébrique des ordonnées est nulle; donc ces points donnent les points d'inflexion de la poutre complètement chargée.

Nous avons supposé que les figures 242 et 244 se rapportent à la même poutre; les verticales qui relient ces deux épures mettent cette propriété en évidence.

622. Poids mort et poids roulant. — On considère séparément l'effet du poids mort (fig. 242) et l'effet du poids roulant (fig. 244); on pourrait ajouter les ordonnées de la première épure à celles des deux courbes limites de la seconde; mais, en général, il suffit d'avoir les plus grands moments en valeur absolue, abstraction faite de leurs signes. Pour les obtenir, on replie, sur la figure 244, les moments positifs sur les moments négatifs par une rotation autour de AN ; on obtient la ligne des plus grands moments dus à la charge mobile ; cette ligne n'est pas représentée mais il est aisé de se la figurer (la ligne ABCDEGHKLR est celle qui disparaît). Si alors au-dessous de l'axe AR on porte les ordonnées de la

figure 242, abstraction faite de leurs signes, on obtient une nouvelle ligne que l'on prend comme ligne de repère. Entre la ligne des plus grands moments dus à la charge mobile et cette ligne de repère sont comprises les plus grands moments absolus. On remarquera qu'il est impossible d'assigner aux moments fléchissants des limites plus restreintes que celles fournies par ce procédé ; car en vertu du corollaire du numéro précédent les moments que l'on ajoute sont tous du même signe; leur somme est donc une limite accessible.

623. Autre procédé. — Supposons que l'on charge d'abord toute la poutre de la charge permanente p et de la charge mobile q ; on obtiendra une épure du genre de la figure 242, mais les ordonnées seront augmentées dans le rapport $p + q : p$. Il s'agit alors de déterminer les charges qu'il faut enlever pour obtenir en chaque point le moment fléchissant le plus dangereux ; l'épure 244 représente donc alors les moments à soustraire. On obtiendra évidemment la plus grande différence en valeur absolue en soustrayant du moment d'un certain signe, la limite de signe contraire ; car cette soustraction reviendra à une addition. On reconnaît alors que ce sont précisément les ordonnées de la ligne ABCDEFGHKLR qu'il faut ajouter aux valeurs absolues des moments dus à la charge $p + q$. On portera donc sous l'axe AN (fig. 244) les ordonnées qui représentent ces moments; on prendra la courbe que l'on obtient ainsi comme ligne de repère; les ordonnées comprises entre cette ligne de repère et la courbe ABCDEFGHKLR représentent les plus grands moments cherchés (1).

Autre démonstration. — On peut vérifier que le second procédé conduit au même résultat que le premier. Appliquons d'abord le premier procédé ; la ligne des plus grands moments que l'on obtient représentent évidemment, en pre-

(1) Le procédé du numéro 622 est exposé dans la plupart des traités ; celui du numéro 623 nous paraît plus simple, car dans la ligne ABCDEFGKLR, il n'y a que de petits arcs de courbe à tracer.

nant ABCDEFGKL comme ligne de repère les moments dus à la charge uniforme q répartie sur toute la poutre ; car les ordonnées comprises entre les deux courbes représentent la somme algébrique des moments partiels. Donc on voit que les plus grands moments dus à la charge q comprennent : 1° les ordonnées de la ligne ABCDEFGKL ; 2° les moments dus à une charge q sur toute la poutre. Il résulte que les plus grands moments absolus comprennent les ordonnées de la ligne ABCDEFGKL et les moments dus à une charge $p + q$ sur toute la poutre. On retrouve ainsi le second procédé.

624. Efforts tranchants. — Pour une charge déterminée, on obtient la ligne des K en prenant la dérivée de la ligne des M ; aux côtés rectilignes des M correspondent des horizontales ; aux paraboles des M correspondent des lignes droites d'inclinaison connue, il suffit de prendre la dérivée de la corde de la parabole, on obtient le point moyen de la droite des K.

Dans le cas d'un poids roulant avec ou sans poids mort, on obtient les deux limites des efforts tranchants en additionnant en chaque point, d'une part les ordonnées négatives, d'autre part les ordonnées positives ; l'épure, que nous n'avons pas représentée, est beaucoup plus facile que celle des M.

§ 5. Charge mobile qui se fractionne indéfiniment.

625. Principe général. — Supposons une charge qdl sur un élément de la poutre ; construisons la ligne des M pour cette charge élémentaire. Si sur chaque élément de la poutre dl nous imaginons une charge élémentaire qdl, nous obtiendrons une infinité de lignes des M. En chaque point ajoutons séparément les ordonnées positives et les ordonnées négatives ; nous obtiendrons les deux limites du moment fléchissant.

Cette méthode n'est pas pratique ; il est indispensable de grouper les charges qui donnent des moments de même signe dans les différentes régions de la poutre ; c'est pour opérer ce groupement, que nous allons d'abord étudier l'effet d'une

force isolée et discuter les variations de signes qui se produisent dans les moments fléchissants, quand cette force isolée se déplace.

626. Force isolée. — Soit AC (fig. 245) une travée d'une poutre continue ; une force isolée agit sur cette travée. Soit ABC la ligne des M pour le cas où la travée serait isolée et simplement appuyée à ses extrémités ; nous obtiendrons la transformée droite par le procédé que nous avons indiqué au numéro 584 : on mène par le point B des parallèles aux diagonales du rectangle AYXC, on obtient la transformée droite en DE. En raisonnant comme nous l'avons fait au numéro 619, nous démontrerons que les pivots de la ligne des M' sont situés sur les droites AF et CG qui joignent les points A et C aux points principaux de la transformée droite. Si on a eu soin de tracer les verticales des pivots des deux espèces, au moyen d'une épure spéciale, on trouvera ces pivots en P et Q ; la ligne des M' est la droite MN que l'on obtient en joignant ces deux points. Pour les autres travées, la ligne des M est M = 0 ; les pivots des M' sont sur cette ligne ; on obtient les lignes des M' en partant des points M et N et en se dirigeant vers les extrémités de la poutre (1).

627. Théorème. — *Si une force isolée se déplace sur une travée, les moments fléchissants ne changent de signe ni dans les sections situées à l'extérieur de la travée chargée, ni dans les sections situées dans la région centrale comprise entre les deux pivots de la travée chargée. Dans les autres régions de la travée chargée, le signe du moment fléchissant dépend de la position de la force ; on l'obtient par l'épure des points d'inflexion.*

Il résulte de la figure 245 que les moments fléchissants aux extrémités de la travée chargée sont toujours positifs. Si de ces extrémités, on se dirige vers les extrémités de la poutre, on trouve que les moments fléchissants changent de signe en certains points ; ces points sont précisément les

(1) En partant de cette construction et en imitant ce qui a été dit aux nos 584, 585, 587, on déterminerait l'effet d'une force isolée mobile ou d'un système de forces isolées mobiles.

pivots des M'. Supposons que la force se déplace sur la travée qu'elle sollicite; ces points restent immobiles; donc si on se place dans une section fixe située à l'extérieur de la travée chargée, on verra le moment fléchissant prendre des valeurs qui dépendent de la position de la force, mais toutes ces valeurs seront de même signe.

Il nous reste à nous occuper des signes du moment fléchissant aux différents points de la travée chargée, ces signes dépendent de la position des points d'inflexion S et T; voyons comment ces points se déplacent quand la force se meut sur la travée.

Il est d'abord évident que les abscisses de ces points sont indépendantes de la grandeur de la force; car en changeant l'échelle des moments, une même épure peut servir pour toutes les forces appliquées au même point. Cette proposition est d'ailleurs une conséquence du principe de l'indépendance des effets des forces; en effet, divisons la force P en parties égales infiniment petites dP; pour chacune des forces élémentaires, on a $M = 0$ au point d'inflexion; donc en ce même point, on a $M = 0$ pour une force quelconque intégrale des forces dP.

Dès lors, nous étudierons le mouvement des points d'inflexion S et T en supposant que le point B se déplace sur l'horizontale YX. Construisons pour chaque position de la force une ligne des M analogue à ABC, et déterminons la ligne des M' correspondante; nous obtiendrons autant de positions que nous voudrons des points S et T; nous pourrons tracer les courbes décrites par ces points.

On peut simplifier considérablement la construction de ces courbes en utilisant les propriétés qui suivent. Prenons comme variable la longueur a = YB; cette longueur varie de o à l, (l, étant la longueur de la travée). On reconnaît successivement que les ordonnées des points D et E sont des fonctions linéaires de a, que l'ordonnée de tout point de la droite DE et par conséquent les ordonnées des points F et G sont aussi des fonctions linéaires de a, qu'il en est de même des ordonnées des points P et Q et que, par conséquent,

l'ordonnée d'un point quelconque de la droite MN est une fonction linéaire de a. Toutes les positions de la droite MN constituent donc un système du premier degré en a et l'axe des a est vertical. Déterminons par la construction générale les positions Uo et Ul de la droite MN pour $a = o$ et $a = l$; le point d'intersection U de ces deux positions particulières est le pivot de la droite MN ; si on construit en ol une échelle des valeurs de a, en représentant l par ol, on obtiendra une position quelconque de cette droite MN en joignant le point U au point de l'échelle ol qui correspond à la valeur donnée de a. On voit donc que le point S est l'intersection de deux droites UM et AB qui pivotent respectivement autour de U et autour de A ; en divisant ol et Yx dans un même nombre de parties égales et en joignant respectivement les points de division aux points U et A, on obtient des groupes de positions correspondantes des droites mobiles ; à chacun de ces groupes correspond une position du point S. Menons OL parallèlement à XY ; la droite mobile AB détermine aussi sur OL une échelle des valeurs de a ; donc les droites AB et UM se déplacent de telle façon que la droite MR reste parallèle à elle-même ; la direction de cette droite mobile MR est donnée par l'une de ses positions lL ; on obtient donc aussi la courbe des points d'inflexion en déplaçant une droite MR parallèle à lL, en menant les rayons AR et UM ; le point d'intersection de ces deux rayons décrit la courbe cherchée. Les droites UM et AR font partie de deux systèmes homographiques ; le lieu des points d'intersection est une courbe de second degré ; on reconnaît facilement que la courbe a des branches infinies ; donc c'est une hyperbole. On en détermine facilement les tangentes et les asymptotes.

Tout ce que nous avons dit du point S s'applique évidemment au point T ; on mène O'L' parallèlement à XY, on déplace la droite R'N en conservant sa direction, on mène par C et U les rayons UN et CR' ; ces rayons se coupent au point T ; le lieu de ce point est la courbe des points d'inflexion.

L'épure que nous venons de tracer prouve que les points

d'inflexion n'atteignent jamais la région centrale comprise entre les pivots P et Q; dans cette région les moments fléchissants sont donc toujours négatifs quelle que soit la position de la force sur la travée. C'est dans les régions comprises entre ces pivots et les extrémités de la travée, que se se déplacent les points d'inflexion; les signes des moments dans cette région dépendent donc de la position de la force. Proposons-nous de chercher le signe du moment fléchissant dans une certaine section située dans ces régions; menons une verticale par cette section, cette verticale coupera la courbe des points d'inflexion en un certain point; soit S ce point. Menons la droite ASB; si la force tombe à droite du point B, le point d'inflexion tombe à droite de S, en S le moment fléchissant est positif; si, au contraire, la force tombe à gauche du point B, le point d'inflexion tombe à gauche du point S; en S le moment est négatif; si la force tombe en B, le moment fléchissant est nul au point S. Nous avons ainsi démontré toutes les propositions contenues dans l'énoncé.

628. Effet des charges extérieures. — *Les combinaisons des charges extérieures à une travée, qui réalisent sur cette travée les moments fléchissants limites, s'obtiennent en fractionnant les charges extérieures par travées.*

En d'autres termes, il est inutile de considérer des combinaisons où l'on chargerait des fractions de travées à l'extérieur de la travée dont on étudie les moments fléchissants limites; ces combinaisons sont moins dangereuses que celles que l'on rencontre en fractionnant par travées. En effet, proposons-nous d'étudier les moments fléchissants d'une travée l; chargeons une travée l'; la charge élémentaire qdl' peut être assimilée à une force isolée; les moments fléchissants que cette force produit sur la travée l ne changent pas de signe quand cette force se déplace sur la travée l'; donc si nous traçons les lignes des M pour les charges qdl' qui recouvrent la travée l', en chaque point de la travée l nous n'aurons que des ordonnées de même signe; en les additionnant nous aurons l'une des limites, l'autre est zéro; cela

les ordonnées de ces courbes limites dans les régions où elles se trouvent.

On obtient les plus grands moments fléchissants en valeur absolue, en ajoutant les effets du poids mort et du poids roulant en suivant l'une ou l'autre des méthodes des numéros 622 et 623. Nous avons représenté sur la figure 244, les courbes de correction par des lignes pointillées ; on voit que dans la courbe des moments à ajouter à ceux produits par la charge $p + q$, les angles rentrants sont remplacés par une courbe continue. Dans une travée, il n'y a plus que trois régions.

631. Efforts tranchants. — Les signes des efforts tranchants sont donnés par les inclinaisons des lignes des M ; dans le cas d'une force isolée, il y a changement de signe de l'effort tranchant quand on passe au-delà d'un appui ou au-delà de la force; si on reste dans une section fixe, le signe de l'effort tranchant ne varie que si la force se déplace et passe dans cette section ; on en déduira par des raisonnements semblables à ceux qui précèdent que l'hypothèse du fractionnement des charges par travées ne donne lieu à une erreur que dans l'effet des charges intérieures. Soit CE (fig. 246) la travée que l'on étudie ; en chargeant cette travée, on trouve une ligne des K, $\alpha\beta$; l'hypothèse du fractionnement par travées revient à supposer que sous l'effet des charges intérieures, l'effort tranchant varie entre deux limites représentées par la ligne $C\gamma\beta$ et $\alpha\gamma E$; en réalité, on obtiendra les véritables limites en un point δ, en chargeant $C\delta$ ou δE ; cela fournit deux courbes $\alpha\delta' E$ et $C\delta''\beta$. Si on a soin de remplacer la droite $\alpha\beta$ par ces deux courbes, on peut appliquer la méthode du numéro 620.

Il s'agit de montrer comment on peut construire ces deux courbes ; on pourrait pour diverses positions de la charge, tracer la ligne des M et en déduire la ligne des K ; mais on arrive plus vite au but de la manière suivante. L'analyse prouve que ces courbes inconnues sont des paraboles du quatrième degré ; calculons l'ordonnée du point de la courbe $C\delta''\beta$ voisin du point C ; si dans la figure 245 on suppose que

la force isolée soit infiniment près du point Y, on trouve que l'effort tranchant en ce point a une limite finie ; on l'obtient facilement par la différence d'inclinaison des droites CY et OU limites des droites BC et UM ; désignons-le par K_0. Supposons que la charge recouvre une longueur infiniment petite a, comptée à partir du point C ; la force isolée se réduit à pa et agit à une distance $\frac{a}{2}$; le moment fléchissant représenté par l'ordonnée constante de la ligne XY de la figure 245, que nous désignerons par M, se réduit à

$$pa\frac{a}{2}\left(l-\frac{a}{2}\right)=\frac{pa^2}{2};$$

donc l'effort tranchant K est donné par la proportion :

$$K:\frac{pa^2}{2}=K_0:M,$$

$$K=\frac{K_0 pa^2}{2M}.$$

Posons $\frac{K_0}{M}=\frac{1}{\lambda}$, on a $K=\frac{pa^2}{2\lambda}$;

c'est l'effort tranchant sur une poutre sur deux appuis de longueur λ, ayant son origine en C.

Il résulte de là qu'au point C la courbe $C\partial''\beta$ touche l'axe CE, et qu'en ce point on peut trouver la dérivée seconde :

$$\frac{d^2K}{da^2}=\frac{p}{\lambda}.$$

Si on représente la courbe $C\partial''\beta$ par un polygone d'intégration de quatre côtés, on aura (69) :

$$\Delta^2K=\frac{l}{4}\cdot\frac{l}{3}\frac{p}{\lambda}=\frac{pl}{2}\times\frac{l}{6\lambda}.$$

On obtient $\frac{1}{2}pl$ facilement ; par une quatrième proportionnelle on trouve Δ^2K ; c'est précisément la valeur de l'ordonnée, au point C, du deuxième côté du polygone d'intégration.

Au point E, il y a pour la même raison contact entre la courbe $\alpha\partial'E$ et l'axe CE; donc il y a aussi contact au point β entre la courbe $C\partial''\beta$ et la droite $\alpha\beta$. Soit $C\varepsilon\varphi\eta\beta$ le polygone d'intégration de la courbe $C\partial''\beta$; on connaît $C\varepsilon$, on trace $\varepsilon\varphi$ au moyen de la valeur de Δ^2K; on connaît $\eta\beta$; donc ce polygone d'intégration est déterminé; on peut alors trouver autant de points et de tangentes que l'on veut. Connaissant la limite supérieure, on trouve la limite inférieure en remarquant que la somme algébrique des deux limites doit être égale à l'ordonnée de la droite $\alpha\beta$.

CHAPITRE V.

Poutres droites à sections variables.

§ 1. Généralités.

632. Courbe des ε. — Si on excepte les poutrelles laminées, on peut dire qu'en général les poutres sont calculées de telle sorte qu'en chaque point le moment résistant soit égal au plus grand moment fléchissant qui peut se produire en ce point. Soit δ_1, la plus grande dilatation que l'on peut tolérer à l'unité de distance de la fibre moyenne de la poutre; soit M, le plus grand moment fléchissant en valeur absolue; on doit avoir au point considéré :

$$\delta_1 = \frac{M}{\varepsilon} \quad \text{d'où} \quad \varepsilon = \frac{M}{\delta_1}.$$

Soit V la distance d'une fibre extrême à l'axe de la poutre; soit R la plus grande force élastique que peut suporter cette fibre; on a (1) :

$$\delta_1 = \frac{R}{E} : V.$$

(1) Nous admettons que la matière résiste aussi bien à l'extension qu'à la compression; s'il s'agissait d'une poutre d'égale résistance en fonte, on devrait égaler δ_1 à la plus petite des deux valeurs que l'on trouve en

On voit que δ est constant dans une poutre de hauteur constante et que par conséquent la courbe des ε est à une certaine échelle la courbe des plus grands moments fléchissants en valeur absolue.

Si la poutre a une hauteur variable h, on trouve en posant $\delta = \frac{R}{E}$, la valeur $\varepsilon = \frac{Mh}{2\delta}$. Dans ce cas, la courbe des ε se construit par points, les ordonnées s'obtiennent par une multiplication graphique.

633. Cas où la statique suffit. — Quand la statique suffit pour déterminer l'état de sollicitation, on ne doit utiliser la courbe des ε que dans l'étude des déformations. On intègre alors la ligne des M par éléments très petits avec une base variable proportionnelle à ε (551); on obtient la ligne des η; on trouve ensuite la ligne des y en intégrant celles des η avec une base constante. Les lignes de repère sont des droites que l'on détermine facilement; pour une poutre sur deux appuis, on exprime que y est nul aux deux appuis, pour une poutre encastrée à une seule extrémité, on exprime que y et η sont nuls dans la section d'encastrement. Nous n'avons donc qu'à nous occuper des problèmes où l'état de sollicitation dépend des deformations.

634. Cas général. — Pour chaque travée, la ligne des M' est une droite; si cette droite était connue, on obtiendrait le polygone des η' et le polygone des y' par la méthode du numéro 553; il est donc nécessaire d'intégrer trois fois $1 : \varepsilon$ (60). La première intégrale donne la base d'intégration;

---

considérant chacune des fibres extrêmes ; on trouve que I doit avoir la plus grande des trois valeurs :

$$\frac{Mh}{2(R+R')}, \quad \frac{M'h}{2(R+R')}, \quad \frac{MM'h}{2(M+M')R'},$$

M, M' étant respectivement les plus grands moments fléchissants positifs et négatifs ; R la force élastique limite à l'extension, R' la force élastique limite à la compression.

la seconde donne la verticale centrale et la verticale anti-centrale, directrice des η_1; la troisième donne l'une des verticales principales et on déduit l'autre par une construction simple. La ligne des η' et des y' se représentent par des polygones analogues à ceux que nous avons trouvés pour les poutres prismatiques; il suffit d'observer que les directrices sont déplacées.

On peut trouver les lignes des η_1 et des y en intégrant par éléments très petits, mais il est préférable de déterminer les directrices d'intégration pour chaque travée chargée uniformément; il suffit (556) de tracer l'intégrale quatrième de $1 : \eta$. Les traces des lignes des η_1 et des y s'opèrent alors comme si la poutre était prismatique, sauf en ce qui concerne la position des directrices.

Quand on veut étudier complétement la stabilité d'une poutre, on doit fractionner les charges indéfiniment; il est utile (629) de tracer les directrices d'intégrations pour chacune des demi-travées; les quatre intégrales de $1 : \varepsilon$ permettent de trouver ces directrices.

635. Résumé du chapitre. — Sauf en ce qui concerne la position des directrices et la variation des bases d'intégration des η_1, tous les tracés des chapitres précédents sont applicables; nous croyons qu'il serait inutile de reproduire presque textuellement ces chapitres; nous nous bornerons de renvoyer le lecteur aux numéros de ce chapitre, dans les questions où les démonstrations et les tracés ne subissent aucune modification; nous traiterons les autres questions d'une manière détaillée.

§ 2. Poutre encastrée aux deux extrémités.

636. Solution par l'épure des y. — On opère comme au numéro 577. Soient (fig. 247) : ACD, la ligne des M; EF la corde des η_1; KSL les tangentes extrêmes à la courbe des y. Nous supposons que les extrémités de la poutre soient encastrées suivant la même horizontale; la ligne des y' est KMNL,

on obtient les autres lignes en prenant les dérivées; la ligne des η' est EGF, celle des M est A'B'. Si les encastrements faisaient un angle entre eux, on déterminerait les tangentes extrêmes des y', en utilisant les valeurs de y et de η aux deux extrémités de la poutre.

637. Solution par l'épure des η. — Nous allons d'abord démontrer quelques théorèmes.

I. *La dérivée de la corde des y' est l'ordonnée du centre de gravité* H *de trois poids appliqués aux sommets* E, F, G *du polygone des η' et proportionnels aux segments α, β, γ de la travée divisée par les verticales principales.*

Soient η, η', η'' les ordonnées des sommets E, F, G; η_m l'ordonnée moyenne de la ligne des η', ou la dérivée de la corde des y'; α, β, γ les segments Be, *eé*, *é*A; on a évidemment

$$\eta_m(\alpha + \beta + \gamma) = \alpha\eta + \beta\eta' + \gamma\eta''.$$

Cette équation démontre le théorème.

II. *Le centre de gravité* H *est situé sur la verticale anti-centrale.*

En effet, si on compose les poids α et γ appliqués en E et F, on obtient un centre sur la verticale anti-centrale; car la verticale centrale divise la travée dans le rapport des segments α et γ (553, fig. 208, *e*); le troisième poids G est aussi sur la verticale anti-centrale, donc le centre des trois points E, F, G s'y trouve également.

III. *La droite* EH *divise le côté* GF *dans le rapport inverse des poids β et γ.*

En effet, on peut obtenir le centre H en composant d'abord les poids G et F; on trouve un centre R au point qui divise GF dans le rapport $\gamma : \beta$; en composant les poids E et R, on doit retrouver H; donc ER passe par H ou EH passe par R.

Les trois propositions qui précèdent permettent de généraliser la construction du numéro 578. On détermine le point H en prenant la dérivée de la corde des y'; on joint EH que l'on prolonge jusqu'au point R situé sur une verticale facile à tracer; le point R appartient au côté GF; on joint FR,

puis EG ; la ligne des η' étant tracée, on obtient celle des M' en prenant la dérivée.

638. Solution par l'épure des M. — Déterminons le point H comme nous venons de l'indiquer ; nous allons démontrer que : *les dérivées des pseudo-médianes* EH *et* HF *ont pour valeur les* M' *principaux*.

Démontrons, par exemple, que la dérivée de EH est le moment Pe. En effet, appliquons à la corde ER de l'angle EFR la remarque du numéro 550. La corde ER a pour dérivée l'ordonnée du point qui divise B'A' dans le rapport inverse du rapport EH : HR ; or ce rapport inverse est précisément le rapport des poids E et R, c'est donc le rapport $\alpha : \beta + \gamma$; l'ordonnée dérivée est donc bien l'ordonnée Pe ; c'est ce qu'il fallait démontrer.

En prenant les dérivées des deux droites EH et HF, on obtiendra les deux points principaux de la ligne des M' ; cette ligne des M' est ainsi déterminée.

639. Solutions diverses. — La première méthode du numéro 580 se généralise facilement. Nous supposons les encastrements de niveau ; on compose les poids $Mdx : \varepsilon$ en une résultante ; on considère B'A' comme la loi des pressions qui serait produite par cette pression résultante sur une section projetée en AB et dont les dimensions perpendiculaires à AB soient $1 : \varepsilon$; on peut appliquer alors les méthodes du numéro.

Comme au numéro 580, on peut représenter les M' principaux par des aires.

§ 3. Poutre encastrée à une extrémité et appuyée à l'autre.

640. Méthodes diverses. — Les solutions des numéros 588, 589, 590 s'appliquent ici. On trouve (fig. 247) la ligne des y' en KMN'L, la ligne des η' en EG'F', la ligne des M' en AB''. Si sur l'appui A, on introduit un moment d'encastrement arbitraire, la ligne B''A pivote autour du point P. Les solutions diverses du numéro 591 s'appliquent aussi sauf quelques modifications que l'on aperçoit sans difficulté.

§ 4. Poutres continues.

641. Méthode générale. — On trace les lignes des η et des y ; on exprime les conditions de la déformation ; on obtient comme au numéro 597 les points invariables des y' ; le problème revient à trouver l'état de sollicitation d'une poutre non chargée assujettie à passer par les points invariables. Les problèmes et théorèmes du numéro 598 s'appliquent textuellement aux poutres non prismatiques ; il suffit de remplacer $\frac{l}{2}$ et $\frac{l}{3}$ par les segments des travées déterminées par les verticales anti-centrales et principales. La méthode générale du numéro 599 s'applique sans difficulté.

642. Solution par l'épure des y. — Nous allons démontrer le théorème suivant : *si le moment* M' *varie continûment en passant d'une travée à la voisine, les côtés des* y' *adjacents à la tangente commune se coupent sur une verticale fixe appelée directrice de continuité.*

Soit (fig. 248, fig. *e*) ABCDEFG le polygone des y' pour deux travées ; il s'agit de prouver que les côtés BC et EF se coupent sur une verticale dont la position est indépendante des M et des M'. En effet : soient d, d' les projections horizontales des côtés CD' et D'E ; appliquons à la corde CE de l'angle D' la remarque du numéro 550 ; on trouve que le rapport $d : d'$ doit être le rapport inverse des projections verticales des côtés BD et DE de la ligne des η'. Cette proposition peut aussi se démontrer en considérant le polygone des y' comme un polygone funiculaire ; les forces qui passent par les sommets C et D sont des poids représentés par les projections verticales des côtés des η' ; or le point D' se trouve sur la résultante de ces deux poids, donc le rapport $d : d'$ est le rapport inverse de ces poids. Soient respectivement λ, λ', les bases d'intégrations des η pour chacune des travées ; soient a et a' les projections horizontales des côtés BD et DE des η' ; soit M' le moment sur l'appui ; on a :

$$d : d' = \frac{M'a'}{\lambda'} : \frac{M'a}{\lambda}$$

ou bien :

$$d : d' = \frac{a'}{\lambda'} : \frac{a}{\lambda}.$$

Cette proportion démontre le théorème.

L'un des moyens de déterminer la directrice de continuité est de prendre arbitrairement M' et de tracer les deux côtés des η' et les trois côtés des y' qui en dépendent ; les côtés adjacents à la tangente commune se couperont sur la directrice inconnue.

On peut aussi opérer comme il suit ; soient u, u_1, u_2 et u', u'_1, u'_2 les intégrales de $1 : \varepsilon$ pour les deux travées l et l'; on a :

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{u}{l}, \qquad a = l - \frac{u_1}{u},$$

$$\frac{1}{\lambda'} = \frac{u}{l'}, \qquad a' = \frac{u'_1}{u'}.$$

On a donc :

$$d : d' = \frac{u'_1}{l'} : \frac{l - u_1}{l}.$$

Il est facile d'obtenir des droites dont les angles avec l'horizon soient :

$$\text{tang}\,\theta = \frac{l - u_1}{l} \qquad \text{tang}\,\theta' = \frac{u'_1}{l'}.$$

La proportion devient :

$$d\ \text{tang}\,\theta = d'\ \text{tang}\,\theta'.$$

Si par les projections des points C et E sur une horizontale (fig. *c*), on mène les droites qui font les angles θ et θ' avec cette horizontale, ces droites se coupent sur la directrice de continuité.

Si on trace les directrices de continuité pour chaque appui, on obtient la ligne des y' pour la méthode du numéro 600.

644. Solution par l'épure des η. — Déterminons comme nous l'avons fait précédemment les points invariables A, D, G (fig. 248, fig. *c*) de la ligne des y' ; prenons les dérivées des côtés

de ce polygone et portons-les (fig. *b*) sur les verticales anticentrales; nous savons (637) que nous obtenons ainsi les points α et β qui sont respectivement les centres de gravité de poids connus appliqués aux sommets A, B, D et aux sommets D, E, G de la ligne des η'; ces points α, β sont les *points invariables de l'épure des* η'.

Si on se donne η_0 ou le côté AB, on obtient la ligne des η' en appliquant une méthode analogue à celle du numéro 601. Les droites AC, DF jouent le rôle des médianes; on voit (fig. *d*) comment on détermine les directrices des points C et F. Toutefois, nous devons résoudre une petite difficulté qui ne se présente que dans les poutres à sections variables. Les côtés des η' qui se joignent sur un appui n'ont plus même direction; leurs directions s'obtiennent en intégrant un même moment M' avec des bases d'intégration différentes. Ayant, par deux solutions, trouvé le pivot P du côté BD, il s'agit de trouver le pivot P' du côté DE; nous allons démontrer que ces deux pivots sont situés sur une même horizontale et que l'on a :

$$PD' : P'D' = \lambda : \lambda'.$$

En effet, la figure PP'D'D est semblable à la figure *pp'd'd* du diagramme des inclinaisons; on a donc :

$$PD' : P'D = \lambda : \lambda'.$$

Si l'on suppose que le côté BD pivote autour du point P, il faudra nécessairement, à cause de cette proportion, que le point P' du côté DE reste fixe; c'est donc le pivot du côté DE. Connaissant le pivot P, on trouve le pivot P' par une construction facile à imaginer (quatrième proportionnelle) ou en intégrant un moment arbitraire M'. Sauf cette petite construction qui doit être faite pour chaque appui, la méthode du numéro 601 ne subit pas de modification.

644. Solution par l'épure des M. — Nous appellerons comme au numéro 602, *cordes principales des* M' les cordes telles que CE (fig. *a*) qui joignent les points principaux les plus voisins de chacun des sommets de la ligne des M'. Nous allons démontrer que toute corde principale passe par un

point invariable que l'on peut déterminer *a priori* et qui ne dépend que de la ligne des M et du niveau des appuis des deux travées correspondantes.

En effet, reprenons d'abord l'épure des η (fig. *b*); nous savons que les dérivées des droites DH et DF sont précisément les M' principaux les plus voisins de l'appui D. Soient μ, μ' ces moments principaux; λ, λ' les bases d'intégration qui permettent de trouver les η' respectivement pour chaque travée; h, la projection verticale du côté $\alpha\beta$ du polygone invariable des η'; a, a' les projections horizontales des côtés BD et DE; on a :

$$h = \frac{\mu a}{\lambda} + \frac{\mu' a'}{\lambda'}.$$

Passons à l'épure des M' (fig. *a*); μ, μ' sont les ordonnées des points C et E. Soit α le point de CE situé sur la directrice de continuité; nous savons que le rapport des segments Cα et αE est inverse du rapport $\frac{a}{\lambda} : \frac{a'}{\lambda'}$; donc l'ordonnée du point α est :

$$\frac{\mu \frac{a}{\lambda} + \mu' \frac{a'}{\lambda'}}{\frac{a}{\lambda} + \frac{a'}{\lambda'}} = \frac{h}{\frac{a}{\lambda} + \frac{a'}{\lambda'}}.$$

Cette ordonnée ne dépend que de h et des longueurs a, a', λ, λ'; elle est indépendante par conséquent de l'inclinaison η_0 que l'on donne arbitrairement au premier élément de la ligne des η'. Nous appellerons *points invariables des* M' les points analogues au point α. Pour obtenir ce point, il suffit de donner au point D (fig. *b*) une position arbitraire, de prendre les dérivées des côtés αD et Dβ, de tracer la corde principale des M' qui correspond à cette position du point D. Ce qu'il y a de plus simple, c'est de joindre $\alpha\beta$ et de placer le point D sur cette droite; on prend alors les deux dérivées de cette droite avec les bases λ et λ'; on trouve la corde C'E' (fig. *a*): cette corde détermine la position du point α sur la directrice de continuité.

Comparons cette construction à celle qui se rapporte aux poutres prismatiques ; on voit que dans les deux cas on prend la dérivée des côtés du polygone invariable des η' ; mais dans le cas d'une poutre non prismatique, chaque côté donne deux dérivées que l'on porte sur les verticales principales correspondantes; ce sont les cordes qui joignent les extrémités de ces dérivées qui déterminent les points invariables des M'. Lorsque les points invariables des M' sont connus, on opère comme au numéro 602.

645. Simplification de l'épure des η. — Pour obtenir l'épure des η', il faut intégrer la ligne des M' avec des bases spéciales à chaque travée ; mais si nous adoptons pour chacune des travées une échelle d'abscisses convenablement déterminée, nous pourrons faire en sorte que toutes ces bases soient représentées par une même longueur. Cette modification des échelles d'abscisses dans l'épure des η, n'exercera évidemment pas d'influence sur les relations entre les lignes des M, des η et des y ; mais elle aura pour conséquence de supprimer les petites difficultés que nous avons dû résoudre dans les deux numéros précédents. Grâce à cette modification d'échelles, les tracés des numéros 601 et 602 sont applicables presque textuellement.

Il s'agit avant de construire l'épure des η de déterminer les longueurs L, L', L'',... qui, aux échelles spéciales dont il vient d'être question, représenteront les longueurs l, l', l'',... des différentes travées. Nous avons trouvé que la base d'intégration est donnée pour une travée par la formule

$$\frac{l}{\lambda} = \int \frac{dx}{\varepsilon}.$$

On ne changera pas l'échelle des η si l'on fait varier l'échelle des abscisses et la base d'intégration dans le même rapport (50); donc si λ_0 est la base d'intégration unique que l'on veut adopter, on aura :

$$\frac{L}{\lambda_0} = \frac{l}{\lambda} = \int \frac{dx}{\varepsilon}.$$

d'où

$$L = \lambda_0 \int \frac{dx}{\varepsilon}.$$

On construira donc l'épure des η en représentant les travées par des longueurs proportionnelles aux intégrales de $1 : \varepsilon$ pour les diverses travées

646. Méthodes diverses. — Comme au numéro 603, on peut ramener le cas général au cas où les appuis sont au même niveau ; on détermine par une épure spéciale l'effet de la dénivellation des appuis et appliquer le principe de l'indépendance des effets des forces. On peut aussi pour chaque travée déterminer les transformées droites, c'est-à-dire les lignes de repère qu'il faudrait adopter si chacune des travées était encastrée à ses extrémités suivant une même horizontale ; on peut dans l'intégration substituer ces droites aux lignes des M. On obtient comme au numéro 604 les points invariables des η' en intégrant ces transformées droites et en prenant pour chaque travée le centre de gravité de trois poids connus appliqués au sommet du polygone des η que l'on obtient. Si on opère sur l'épure des M', les transformées droites donnent immédiatement les points invariables ; ces points sont situés sur les cordes principales des transformées droites. Cette propriété se démontre comme celle du numéro 644. Il est à remarquer que la corde principale des transformées droites peut servir pour trouver une solution des M' ; pour une certaine valeur de η_0, la solution des M' s'obtient en faisant pivoter les transformées droites des deux travées que nous considérons autour des points principaux les plus voisins de l'appui intermédiaire ; on évite ainsi quelquefois la détermination des points invariables.

Les remarques du numéro 606 s'appliquent ici ; les moments μ et μ' deviennent évidemment les moments des surfaces des M en supposant qu'en chaque point de la poutre le poids spécifique de ces surfaces soit $1 : \varepsilon$.

On peut comme au numéro 608 déterminer les abscisses des pivots par une épure spéciale ; on obtient les pivots pour

la poutre chargée en traçant le polygone des pivots (608, 609, 610). Si on emploie l'artifice du numéro 645, l'épure des η' se construit comme les autres, sinon le polygone des pivots des η' présentent des côtés horizontaux tels que PP'; on détermine ce côté PP' par la proportion :

$$PD' : P'D' = \lambda : \lambda'.$$

Le théorème du numéro 611 est applicable aux poutres quelconques; la démonstration reste la même sauf en ce qui concerne le renvoi au numéro 115; ce sont les propositions des numéros 254 et 553 qu'il faut appliquer.

La démonstration géométrique de l'existence des pivots (612), les relations données aux numéros 613 et 614, les applications des numéros 615 à 630 peuvent être reproduites ici sauf quelques modifications évidentes. Remarquons toutefois que les courbes limites des efforts tranchants ne sont plus des paraboles et que par conséquent les méthodes particulières qui permettent de tracer ces paraboles par leurs polygones d'intégration ne sont plus applicables; il faut déterminer ces courbes limites par points, en prenant la dérivée des lignes des moments fléchissants.

CHAPITRE VI.

Des appuis des poutres droites au point de vue de l'économie.

On sait que le nombre de travées se détermine en cherchant le minimum du prix total de la poutre et de ses supports; nous supposerons ce nombre connu. Nous nous proposons de déterminer la distribution et le niveau des appuis de manière que la poutre soit la plus économique. Appelons M, le plus grand moment fléchissant, en valeur absolue, qui peut se produire en un point; on peut admettre que le prix de l'élément dx de la poutre est proportionnel à $M dx$; c'est donc le minimum de la somme des surfaces des plus grands moments

fléchissants, qu'il faut chercher à réaliser. Nous considérerons d'abord le cas d'une charge permanente; nous étudierons le cas d'un poids roulant dans un paragraphe spécial.

§ 1. Poutre encastrée à ses deux extrémités.

647. Condition du minimum. — Soit (fig. 249) ACB la parabole des moments fléchissants. En encastrant les extrémités de la poutre suivant des inclinaisons indéterminées, on peut modifier les moments d'encastrements et déplacer la ligne de repère DE. Nous obtiendrons la plus grande économie en déterminant cette ligne DE de telle manière que la somme des valeurs absolues des surfaces des M soit la plus petite possible. Par raison de symétrie on peut admettre que DE sera parallèle à AB (1); si nous élevons cette droite dh, la surface des M augmente de $(DF + GE)\ dh$, elle diminue de $FG\ dh$; la condition du minimum est :

$$DF + GE = FG.$$

Ce qui exige :

$$DF = GE = \frac{DE}{4}.$$

De cette égalité et de l'équation de la parabole, on tire :

$$CK = \frac{CL}{4}.$$

Désignons respectivement par S' et S'' les surfaces FCG et 2DFA ; soient : p la charge, l la longueur de la poutre; on a :

$$S' = FG \times \frac{2}{2} CK = \frac{1}{3} \frac{pl^2}{32}.$$

On a aussi

$$S'' + ACB - S' = AB \times LK,$$

(1) Si on n'admet pas la raison de symétrie, on peut démontrer que les points F et G sont à égales distances des extrémités de la poutre en faisant tourner la droite DE autour de son point milieu et en exprimant que l'aire des M ne varie pas, pour un déplacement infiniment petit.

d'où

$$S'' - S' = \frac{1}{3}\frac{pl^2}{32}.$$

Des valeurs de S' et de S'' — S', on tire :

$$S \text{ ou } S' + S'' = \frac{pl^2}{32}.$$

648. Direction des encastrements. — Supposons que la poutre soit d'égale résistance et de hauteur constante ; nous allons démontrer que *l'on réalisera le minimum de la surface des moments fléchissants, si les extrémités de la poutre sont encastrées suivant une même horizontale.*

En d'autres termes, la pose ne doit produire aucune déformation.

En effet, nous avons trouvé (631) que le moment d'inflexibilité d'une poutre d'égale résistance est donné par la formule

$$\varepsilon = \frac{Mh}{2\delta}.$$

La formule des déformations est, en indiquant explicitement le signe du moment fléchissant,

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \pm M.$$

En remplaçant ε par sa valeur on trouve :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{2\delta}{h}.$$

Représentons les valeurs du second membre graphiquement, nous trouvons (fig. 251) la ligne ACDFGHB ; intégrons, en supposant qu'au point A, $\eta = 0$ et $y = 0$; nous trouvons, en prenant pour bases AB : 4, puis AB : 2, que la ligne des η est ADFB. Il est facile de voir que la surface des η est nulle ; donc si on trace la ligne des y, ALNB, le dernier élément B doit se trouver sur le prolongement du premier élément A ; c'est ce qu'il fallait démontrer.

On arrive aussi à cette proposition en remarquant que l'équation de la fibre déformée est celle d'une poutre prisma-

tique dont le moment d'inflexibilité serait l'unité et dont le lieu des moments fléchissants serait ACDEFGHB ; nous prouverons (580) que ce lieu appartient à une poutre encastrée à ses extrémités suivant la même droite, en démontrant que les poids des surfaces positives et négatives des M se font équilibre ; c'est ce qui résulte évidemment de la figure ; les deux rectangles positifs et le rectangle négatif ont évidemment même poids résultant dirigé en sens contraire suivant la verticale du milieu de la poutre.

Si la hauteur h de la poutre était variable, on devrait déterminer la fibre déformée en intégrant deux fois la courbe $\pm 2\delta : h$.

649. Théorie de Bresse. — M. Bresse a déterminé les dispositions des appuis en admettant la formule des déformations des poutres prismatiques: cela est irrationnel, car dès qu'on admet que le prix de la poutre est représenté par l'intégrale des $M dx$, on admet qu'il s'agit d'une poutre d'égale résistance. Quoi qu'il en soit, on peut dans cette hypothèse, trouver très simplement les positions des encastrements en remplaçant (fig. 249) la parabole des M par sa transformée droite D'E'. Intégrons et admettons $\eta = 0$ au milieu de la poutre; nous trouvons (fig. 250) la droite AB comme ligne des η et la parabole EFG comme ligne des y. La substitution de la transformée droite à la parabole n'a pas modifié les tangentes extrêmes de la ligne des y; donc EF et EG sont bien les directions des extrémités de la fibre moyenne de la poutre. La parabole EFG a une signification intéressante; c'est la fibre moyenne déformée par la pose, la charge étant enlevée : cela résulte du théorème de l'indépendance des effets des forces, car si on supprime l'effet de la charge, il reste les moments représentés par D'E'. Quand la charge agit, la fibre moyenne déformée est une parabole du quatrième degré dont le polygone EHKLG s'obtient par les règles connues.

§ 2. Poutre encastrée à une extrémité appuyée à l'autre.

650. Condition du minimum. — Soit ACB (fig. 252) la parabole des moments fléchissants; il s'agit de déterminer la ligne de repère AC de telle sorte que la surface

$$S = AHC + CDB$$

passe par un minimum. Supposons la droite AD horizontale; faisons tourner cette droite AD d'un angle $d\alpha$ autour du point A, la surface S diminue de $\frac{1}{2}\overline{AC}^2\,d\alpha$ et augmente de $\frac{1}{2}\overline{AD}^2\,d\alpha - \frac{1}{2}\overline{AC}^2\,d\alpha$; la condition du maximum est :

$$dS = \left(\frac{1}{2}\overline{AD}^2 - \overline{AC}^2\right)d\alpha = 0.$$

D'où

$$AC = \frac{AD}{\sqrt{2}}.$$

AC est donc le côté du carré construit sur AD comme diagonale. On tire de là la construction suivante : portons sur une horizontale la longueur de la poutre en AD et $AC = AD : \sqrt{2}$; il s'agit de mener une parabole de paramètre connu, qui passe par les points A et C; on l'obtient en intégrant deux fois la charge p et en faisant passer l'intégrale première par le milieu de AC. On pourrait aussi tracer une intégrale seconde quelconque, mais alors la ligne de repère est oblique.

Calculons la surface S; posons :

$$A = AHB = \frac{pl^2}{12},$$
$$S' = AHC,$$
$$S'' = CDB.$$

On a d'abord :

$$S' : A = \overline{AC}^3 : \overline{AD}^3,$$

d'où

$$S' = \frac{A}{2\sqrt{2}}.$$

Nous trouverons une seconde équation en S' et S'', en remarquant que

$$S'' - S' = AHBE - ADE,$$

or, on a :

$$AHBE = 2A,$$

$$ADE = ACF \times \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AC}^2} = 6S',$$

il vient donc :

$$S'' - S' = 2A - 6S'.$$

Calculons S'' et S', on trouve .

$$S \text{ ou } S'' + S' = (2 - \sqrt{2})\frac{pl^2}{12}.$$

651. Position de l'appui. — Supposons que la poutre soit d'égale résistance et de hauteur constante ; nous allons démontrer que l'on *réalisera le minimum de la surface des moments fléchissants en dirigeant l'encastrement suivant une horizontale passant par l'appui.*

En d'autres termes la pose ne doit produire aucune déformation supplémentaire.

Nous trouvons encore (648) que l'équation de la fibre déformée est

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{2\delta}{h}.$$

C'est l'équation de la fibre déformée d'une poutre prismatique qui serait sollicitée par les moments fléchissants représentés par la ligne ACDEF (fig. 253). Intégrons deux fois en prenant au point A, $y = 0$, $\eta = 0$; on obtient KMN ; on démontrerait facilement par la géométrie élémentaire que l'ordonnée du point N est nulle. Mais nous démontrerons cette proposition en considérant la fibre déformée comme

une courbe des moments. Si on prend B comme centre des moments l'ordonnée du point N est :

$$\text{Moment ACD}d - \text{Moment }d\text{EFB}$$

ou

$$\frac{2\delta}{h}\left(\frac{\overline{AB}^2}{2} - \overline{Bd}^2\right).$$

Cette expression est nulle parce que le point d satisfait à la condition

$$Bd = AB\sqrt{2}.$$

Si on adoptait la formule des déformations prismatiques, on trouverait que l'appui doit être placé au-dessous de la poutre encastrée. En effet, soit (fig. 252) AD' la ligne de repère pour le cas où l'appui est au niveau de l'encastrement; prenons la direction de la fibre moyenne encastrée comme ligne de repère des y; la valeur de εy à l'extrémité A est égale au moment de l'aire des moments fléchissants ou au moment du triangle ADD' autour du point A ; on trouverait aussi cette valeur en intégrant deux fois AD'.

§ 3. Poutre continue à plusieurs travées.

652. Encastrements sur les appuis extrêmes. — *La poutre de hauteur constante la plus économique s'obtient en adoptant des travées égales et en plaçant les encastrements et les appuis suivant une même horizontale.*

En effet, soient : L la longueur de la poutre ; $l_1, l_2, \ldots l_n$, les longueurs des différentes travées ; on a :

$$l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n = L. \qquad (1)$$

Si d'abord nous considérons les longueurs des travées comme données, on obtiendra la plus grande économie en encastrant la poutre sur tous les appuis et suivant une même horizontale (648) ; on aura alors pour la surface des M :

$$S = \Sigma \frac{pl_1^3}{32}. \qquad (2)$$

Considérons alors $l_1, l_2, \ldots l_n$ comme des variables et cherchons le maximum de S. Soit α un coefficient indéterminé; cherchons le minimum de :

$$u = \Sigma \frac{p l_1^3}{32} - \alpha (\Sigma l_1 - \mathrm{L}).$$

On trouve :

$$\frac{du}{dl_1} = \Sigma \frac{3 p l_1^2}{32} - \alpha = 0,$$

et des équations semblables pour l_2, l_3, etc. ; on en tire :

$$l_1 = l_2 \ldots\ldots = l_n = \sqrt{\frac{32\alpha}{3p}}.$$

On trouve alors :

$$d^2 u = \frac{6 p l_1}{32} \Sigma (dl_1)^2.$$

Cette quantité est toujours positive ; donc u et S passent par un minimum lorsque les travées sont égales. Si pour chaque travée nous traçons la parabole des moments fléchissants comme nous l'avons fait figure 249, nous trouverons évidemment que de chaque côté des appuis intermédiaires, les moments fléchissants sont égaux ; donc les moments d'encastrement n'existent que sur les appuis extrêmes ; il suffit donc d'encastrer les extrémités de la poutre ; cela démontre le théorème.

653. Appuis simples aux extrémités. — *Lorsque les extrémités d'une poutre de hauteur constante sont simplement appuyées, la solution la plus économique s'obtient en plaçant les appuis au même niveau et en prenant :*

$$l_2 = l_3 = \ldots l_{n-1},$$

$$l_1 = l_n = l_2 \sqrt{\frac{3}{16 - 8\sqrt{2}}}.$$

En effet, supposons d'abord les longueurs des travées fixées ; nous obtiendrons la solution la plus économique en plaçant tous les appuis au même niveau et en encastrant

horizontalement la poutre sur les appuis intermédiaires. Nous savons qu'alors la surface des M a pour valeur :

$$S = (2 - \sqrt{2}) \frac{p(l_1^3 + l_n^3)}{12} + \sum_2^{n-1} \frac{pl^3}{12}.$$

Cherchons le minimum de :

$$u = S - \alpha (\Sigma l_1 - L).$$

On trouve deux espèces d'équations :

$$\frac{du}{dl_1} = (2 - \sqrt{2}) \frac{pl_1^2}{4} - \alpha = 0,$$

$$\frac{du}{dl_2} = \frac{3pl_2^2}{32} - \alpha = 0.$$

D'où

$$l_2 = l_3 \ldots = l_{n-1} = \sqrt{\frac{32\alpha}{3p}}.$$

$$l_1 = l_n = \sqrt{\frac{4\alpha}{p(2 - \sqrt{2})}} = l_2 \sqrt{\frac{3}{16 - 8\sqrt{2}}}.$$

On reconnaît que d^2u est toujours positif; donc c'est le minimum de u et de S que nous avons trouvé. Pour achever la démonstration du théorème qui nous occupe, il faut encore prouver que sur les appuis intermédiaires les moments d'encastrement sont les mêmes. Soient (fig. 254) AE, EL, LR... les travées déterminées par les indications qui précèdent; portons AC = AE $\sqrt{2}$, EH = HL = LM = PR ... = $l_2 : 4$; menons par les points A et C, F et H, M et P, etc..., les paraboles intégrales secondes de la charge p ; l'ensemble de ces paraboles est le lieu des M. Il est d'abord évident que sur les appuis K et Q qui séparent deux travées égales, les moments d'encastrement n'existent pas. Calculons les deux moments fléchissants au point E. L'équation de la parabole ABD peut être mise sous la forme :

$$M = \frac{p}{2} (x - x')(x - x'').$$

x' et x'' sont les abscisses des points d'inflexion ; donc au point E, on a :

$$M = \frac{p}{2} AE \times CE.$$

On trouve de même par la parabole HFD, que l'ordonnée au point E est :

$$M = \frac{p}{2} EF \times EH.$$

Les deux moments fléchissants seront égaux si

$$AE \times CE \times EF = FH;$$

de cette relation, on tire :

$$l_1 = l_2 \sqrt{\frac{3}{16 - 8\sqrt{2}}};$$

cette relation est précisément celle que nous avons admise précédemment. Donc la poutre peut être simplement appuyée sur ses supports.

M. Bresse a traité la même question en admettant les formules de la déformation des poutres prismatiques; dans ce cas, remplaçons les paraboles par leurs transformées droites; pour l'ensemble des travées intermédiaires, on doit intégrer une constante; on trouve que les appuis intermédiaires doivent se trouver sur une parabole.

654. Cas où les longueurs des travées sont données. — *Une poutre de hauteur constante repose sans encastrement sur des appuis de position connue mais situés à des niveaux indéterminés; la solution la plus économique s'obtient en plaçant les appuis sur une même horizontale.*

Soit (fig. 254) ABDGKN le lieu des moments fléchissants pour la poutre cherchée; en modifiant le niveau des appuis, on introduira de nouvelles réactions; la ligne de repère devient AE'L'B'... Nous exprimerons que la surface des M passe par un minimum en égalant à zéro la différentielle de cette surface.

Soient ; l, l' les longueurs de deux travées EL et LR; x, z,

les distances EF et FL ; $x'z'$, les distances EH et HL ; $x''z''$, les distances LM et MR ; x''', z''', les distances LP et PR. Exprimons que le moment fléchissant est continu au point L ; nous aurons comme au numéro précédent.

$$FL \times HL = LM \times MP,$$

ou

$$zz' = x''x'''. \qquad (1)$$

Déplaçons seulement le point L de LL' ; supposons $EE' = RR' = \text{etc.}, = 0$; exprimons que pour ce déplacement LL', la différentielle partielle de la surface S est nulle. Soient $d\alpha$, $d\alpha'$ les angles dont on fait tourner les côtés EL et LR pour les amener en EL' et L'R ; on a :

$$dS = -\frac{l^2}{2}d\alpha - \frac{l'^2}{2}d\alpha' + (x'^2 - x^2)\,d\alpha + (z''^2 - z'''^2)\,d\alpha'.$$

Egalons cette différentielle à zéro en remarquant que $ld\alpha = l'd\alpha'$, on trouve :

$$\frac{x'^2 - x^2}{l} + \frac{z''^2 - z'''^2}{l'} = \frac{l + l'}{2}. \qquad (2)$$

On a aussi :

$$x + z = x' + z' = l,$$

$$x'' + z'' = x''' + z''' = l'.$$

Les équations (1) et (2) expriment les relations qui doivent exister entre 4 points d'inflexion consécutifs ; connaissant les points d'inflexion de la travée LR, on peut calculer ceux de la travée voisine EL.

On connaît le premier point d'inflexion de la première travée ; c'est l'appui A ; prenons arbitrairement le second point d'inflexion C, nous pouvons obtenir ceux de la seconde travée, puis ceux de la troisième travée et de proche en proche trouver tous les points d'inflexion. Or le dernier point d'inflexion doit coïncider avec le dernier appui ; cette condition ne sera pas satisfaite. Portons l'erreur en ordonnée au point C ; construisons la courbe d'erreur ST en faisant quelques essais ; nous déterminerons la position du point C pour laquelle l'erreur est nulle ; c'est la véritable position du point d'inflexion.

Il nous reste à démontrer que l'on réalisera ces points d'inflexion en plaçant les appuis de niveau. Nous savons que l'équation de la fibre moyenne est :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{2\delta}{h}.$$

On est ramené au cas d'une poutre prismatique sollicitée par un moment constant qui change de signe aux points d'inflexion. Prouvons, par exemple, que les trois appuis ELR sont en ligne droite. Prenons la tangente au point L de la fibre déformée pour ligne de repère des y ; on trouve que les points E, L, R sont en ligne droite si :

$$\frac{\mu}{l} = \frac{\mu'}{l'}. \qquad (3)$$

μ est le moment de la surface des M de la travée EL autour du centre E ; μ' est le moment de la surface des M de la travée LR autour du point R. Les surfaces des M sont des rectangles de hauteur constante faciles à imaginer ; on trouve :

$$\mu = \frac{2\delta}{h}\left[\frac{l^2}{2} - (x'^2 - x^2)\right],$$

$$\mu' = \frac{2\delta}{h}\left[\frac{l'^2}{2} - (x''^2 - x'^2)\right].$$

Si dans l'équation (3) on remplace μ et μ' par leurs valeurs, on retrouve l'équation (2) ; donc les équations qui expriment que S passe par un minimum sont précisément celles qui expriment que les appuis sont sur une ligne droite (1) ; cela démontre le théorème.

---

(1) On peut démontrer cette proposition sans calcul ; on peut représenter $\frac{\mu}{l}$ et $\frac{\mu'}{l'}$ par des aires ; si on représente le moment constant par LL, sauf à tenir compte du signe mentalement et si on adopte l et l' comme bases de multiplications (108), on trouve que les aires qui représentent les moments $\frac{\mu}{l}$ et $\frac{\mu'}{l}$ sont précisément les aires dont la somme algébrique est la différentielle partielle de S.

§ 4. Poids mort et poids roulant.

655. Poutre à une travée. — Nous prendrons le cas d'une poutre encastrée à ses deux extrémités ; mais le même raisonnement s'applique au cas d'une poutre encastrée à une extrémité appuyée à l'autre. Par un premier calcul approximatif, nous avons déterminé les dimensions de la poutre ; nous supposons donc connu ε et nous construisons l'épure des moments fléchissants limites en supposant les encastrements établis suivant une même horizontale.

Soient (fig. 255) : AB la ligne de repère, ECHDF la courbe des plus grands moments fléchissants ; les points C et D sont les points de passage, c'est-à-dire les points où les plus grands moments en valeur absolue changent de signe. Si nous modifions les inclinaisons des encastrements, la ligne de repère vient de AB en A'B', et en retournant les moments positifs pour les porter du côté des moments négatifs, on trouve une autre courbe E'C'HD'F pour la courbe des plus grands moments. Il s'agit de choisir A'B' de telle manière que la surface des M passe par un minimum. Or, déplacer A'B', c'est introduire des moments fléchissants représentés par les ordonnées d'une droite ; nous avons indiqué (fig. 256) les surfaces des M que l'on introduit et celles que l'on retranche par des hachures différentes ; la condition du minimum est que la somme algébrique de ces surfaces soit égale à zéro. En exprimant cette condition, nous trouvons deux équations qui déterminent la position des points de passage ; mais ces calculs sont inutiles, car il est évident que dS ne dépend que des abscisses des points de passage et non de la forme des courbes ; il est donc le même que dans le cas d'une poutre chargée uniformément ; donc (647) les points de passage doivent tomber chacun au milieu de chaque demi-travée.

Pour déterminer la ligne de repère A'B' (fig. 255), menons les verticales C'C'' et D'D'' des points de passage. Menons la droite A'B' par les milieux des segments C'C'' et D'D'' compris entre la courbe limite supérieure et la courbe limite infé-

rieure ; on reconnaît facilement qu'alors C' et D' deviennent les points de passage et que la condition du minimum est réalisée.

Pour réaliser la ligne de repère A'B', il faut que les inclinaisons données par la pose aux encastrements produisent les moments fléchissants représentés par la droite AB, la ligne de repère étant A'B' ; nous obtiendrons ces inclinaisons en intégrant deux fois la ligne AB. Par raison de symétrie, les lignes AB et A'B' sont horizontales ; on appliquera donc la méthode du numéro 552 ; la verticale centrale tombe au milieu de la poutre.

656. Poutre à plusieurs travées. — Quand les longueurs des travées sont données, on peut constituer la poutre au moyen de travées encastrées à leurs extrémités dans les conditions que nous venons de faire connaître. On détermine les lignes d'encastrement en intégrant deux fois la suite des lignes horizontales qui déterminent les moments fléchissants dus à la pose. On prouve sans grande difficulté que les bases d'intégration sont proportionnelles aux moments qu'il faut intégrer pour obtenir le polygone des η ; donc ce dernier est une droite ; il en résulte que les lignes d'encastrement sont tangentes à une même parabole.

Si les longueurs des travées ne sont pas données, on peut les déterminer de manière à obtenir la solution la plus économique. Soit s la surface des plus grands moments fléchissants pour une poutre encastrée de longueur égale à l'unité ; soit s' la surface analogue pour le cas où l'une des extrémités est simplement appuyée. Si les extrémités de la poutre peuvent être encastrées, l'expression qu'il faut faire passer par un minimum est $\Sigma s l^3$; on trouve que les travées doivent être égales et qu'il est inutile d'encastrer les poutres sur les appuis intermédiaires (652).

Si on ne peut pas encastrer les extrémités, l'expression qu'il faut faire passer par un minimum est :

$$s' (l_1^3 + l_n^3) + \sum_1^n s l^3.$$

On trouve

$$l_n = l_1 = \sqrt[3]{\frac{s}{s'}}\, l_2,$$

$$l_2 = l^3 = \ldots = l_{n-1}.$$

On peut supprimer les encastrements sur les appuis intermédiaires, sauf sur le second et l'avant-dernier appui.

Supposons que les travées soient connues et que la poutre repose simplement sur ses supports; on demande à quel niveau il faut placer les appuis pour obtenir la solution la plus économique. En exprimant la condition du minimum de la surface des M, on trouve que les points de passage doivent satisfaire aux mêmes relations que les points d'inflexion d'une poutre qui ne supporte qu'une charge permanente. Ces relations sont les équations semblables à l'équation (2) du numéro 654. Mais l'équation de continuité diffère ; la condition qui la remplace est que les moments dus à la pose soient continus. Connaissant les abscisses de deux points de passage, on peut trouver les abscisses de deux suivants en réalisant par tâtonnement la condition du minimum et la condition de continuité ; on peut alors trouver la vraie position des points de passage au moyen d'une courbe d'erreur.

Avant de commencer tous ces laborieux calculs, il faut faire une hypothèse sur la courbe des ε; ce qu'il y a de mieux à faire, c'est d'adopter d'abord la poutre qui résisterait à la charge permanente seule ; on trouve alors que l'on satisfait à la condition du minimum en mettant les encastrements ou les appuis suivant une même horizontale. Si on étudie l'effet du poids roulant, on trouve une nouvelle courbe des ε, au moyen de laquelle on procède à un calcul que l'on pourra considérer comme suffisamment exact.

§ 5. Poutres brisées.

657. Charge permanente. — Reprenons la poutre encastrée à ses deux extrémités (fig. 249) ; la poutre ayant une forme d'égale résistance, son moment d'inertie est nul aux points d'inflexion ; nous pouvons donc briser la poutre

en ces points et réunir les tronçons par articulation ou bien faire reposer le tronçon central sur les deux autres comme nous l'avons indiqué en A'C'D'B'. L'état de sollicitation et les déformations ne sont pas changés par l'introduction de l'articulation ; la déformation se produit donc de telle façon qu'en C' et D' les éléments voisins restent parallèles comme s'ils étaient reliés invariablement l'un à l'autre ; en d'autres termes l'articulation ne fonctionne pas comme telle.

Mais supposons que les encastrements ou les culées cèdent un peu aux efforts qui les sollicitent ; la poutre continue d'égale résistance se brisera nécessairement, car la ligne de repère et les points d'inflexion se déplacent et la section dont le moment d'inertie est nul (ou pratiquement très petit) ne pourra résister au moment fléchissant qui la sollicite. Il n'en est pas de même de la poutre brisée. En effet, on peut dans ce cas déterminer par la statique l'état de sollicitation. Le tronçon C'D' constitue une poutre sur deux appuis ; le lieu des M est toujours la parabole FCG. Au-delà des points F et G la parabole continue, car aucune force extérieure nouvelle n'intervient. *Les déformations des encastrements, les tassements des supports n'ont donc aucune influence sur l'état de sollicitation.* Ces mouvements ont seulement pour effet de faire fonctionner les articulations ; les éléments articulés font des angles très petits.

Ce que nous venons de dire s'applique aussi à la poutre encastrée à une extrémité (fig. 252) ; on peut la constituer comme il est indiqué en A'C'D'.

Cela s'applique enfin à la poutre à plusieurs travées (fig. 254) ; on peut la constituer de tronçons CF, HM, etc., posés sur les appuis comme des fléaux de balance et portant des petites poutres AC, FH, etc... Ce système serait en équilibre, subirait les mêmes efforts et les mêmes déformations que la poutre continue ; mais le moindre poids étranger suffirait pour faire basculer les fléaux ; aussi est-il indispensable d'encastrer la poutre sur ses appuis.

658. Poids mort et poids roulant. — Nous allons démontrer que *la poutre brisée au milieu des demi-travées est*

toujours plus économique que la poutre continue de même longueur.

En effet, soit ACDB (fig. 257) une poutre brisée; les points C et D sont au milieu des demi-travées. Un poids quelconque appliqué sur la poutre centrale CD produit un lieu des moments fléchissants tel que FEG; un poids appliqué sur un tronçon extrême produit le lieu HK; on déduit de là que les moments fléchissants qui se produisent en un même point sont tous de même signe; donc on obtiendra les plus grands moments fléchissants en tous les points en chargeant toute la poutre de la charge permanente p et de la charge roulante q; la courbe limite est une parabole, intégrale seconde de $p + q$, passant par les points C et D. Or, si la poutre était continue, il faudrait considérer non-seulement cette parabole ou une autre solution moins économique, mais d'autres dispositions de la surcharge qui produiront une nouvelle surface des M; la poutre brisée est donc celle qui donne la plus grande économie.

659. Charge variée. — Dans les grands ponts, le poids de la poutre constitue une partie considérable de la charge; cette charge n'est donc plus uniforme. On peut dire approximativement que la charge se compose d'une partie constante et d'une partie proportionnelle au moment fléchissant; la partie constante comprend le poids du tablier, la surcharge; la partie variable est le poids de la poutre; nous admettrons la formule :

$$p = q \pm \frac{M}{a^2}.$$

$\pm$ M désigne la valeur absolue du moment fléchissant M; a une certaine longueur; or on a :

$$p = \frac{d^2M}{dx^2};$$

on a donc l'équation différentielle :

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q \pm \frac{M}{a^2}.$$

Soit AB (fig. 258) la poutre considérée ; prenons le milieu O comme origine ; l'axe oy est un axe de symétrie ; il suffit de déterminer la moitié HDF de la courbe des M.

Pour la région oD, M est négatif; on doit donc adopter l'équation :

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q - \frac{M}{a^2}.$$

On en tire, en posant $x_1 = o$D,

$$-M = qa^2\left(1 - \frac{\cos\frac{x}{a}}{\cos\frac{x_1}{a}}\right). \qquad (1)$$

Pour la région BD, M est positif; on doit donc adopter l'équation

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q + \frac{M}{a^2}.$$

L'intégrale générale est

$$M = qa^2\left(B\cos\text{hyp}\frac{x-\beta}{a} - 1\right).$$

Nous déterminerons les constantes B et β en exprimant qu'au point D, les deux courbes se raccordent ; on trouve les deux équations :

$$B = \frac{1}{\cos\text{hyp}\dfrac{x_1-\beta}{a}},$$

$$\text{tang hyp}\frac{x_1-\beta}{a} = \text{tang}\frac{x_1}{a}. \qquad (2)$$

La première équation donne B, la seconde β ; la valeur de M devient :

$$M = qa^2\left(\frac{\cos\text{hyp}\dfrac{x-\beta}{a}}{\cos\text{hyp}\dfrac{x_1-\beta}{a}} - 1\right). \qquad (3)$$

Nous avons supposé x_1 connu ; il s'agit de déterminer x_1 de manière que la surface des M soit la plus petite possible. Cette surface des M est en appelant l la demi-travée OB,

$$S = \int_0^{x_1} -M dx + \int_{x_1}^{l} M dx.$$

On trouve en tenant compte de l'équation (2)

$$S = -qa^2 l + qa^2 \frac{\sin \text{hyp} \frac{l-\beta}{a}}{\cos \text{hyp} \frac{x_1 - \beta}{a}}.$$

Il s'agit de rendre minimum l'expression :

$$T = \frac{S + qa^2 l}{qa^2} = \frac{\sin \text{hyp} \frac{l-\beta}{a}}{\cos \text{hyp} \frac{x_1 - \beta}{a}}.$$

Éliminons β de la valeur de T au moyen de l'équation (2), on trouve :

$$T = \sin \text{hyp} \frac{l - x_1}{a} + \cos \text{hyp} \frac{l - x_1}{a} \tang \frac{x_1}{a}.$$

En égalant la dérivée de T à zéro, on trouve :

$$\tang \frac{x_1}{a} = \tang \text{hyp} \frac{l - x_1}{a}. \qquad (5)$$

Cette équation détermine la position de l'articulation ; on peut la résoudre par tâtonnements, mais on peut aussi construire deux échelles juxtaposées des valeurs de $\frac{l}{a}$ et de $\frac{x_1}{a}$ qui satisfont à l'équation. On reconnaît facilement que

$$x_1 < \frac{l}{2}.$$

Le point D étant connu, on trace facilement les courbes représentées par l'équation (1) et l'équation (3) ; la première est une sinussoïde ; la seconde est une chaînette dont le sommet a pour abscisse β et des équations (2) et (5) on tire :

$$l - x_1 = x_1 - \beta,$$

équation qui donne

$$\beta = 2x_1 - l.$$

CHAPITRE VII.

Compléments de la théorie des poutres droites.

Nous plaçons dans ce chapitre des théorèmes qui généralisent les propriétés des pivots utilisées dans les tracés graphiques. Nous indiquons, en outre, d'autres méthodes moins simples que les précédentes, mais qu'il peut être utile d'examiner.

§ 1. Théorème de l'ordonnée variable.

660. Théorème. — Si on écrit toutes les équations qui permettent de déterminer analytiquement les ordonnées K, M, η, y, en un point d'une poutre continue, on remarque immédiatement que ces équations contiennent trois espèces de quantités : 1° des *ordonnées connues* telles que les ordonnées des appuis, les forces sollicitantes, les charges ; 2° les *ordonnées inconnues* K, M, η, y ; 3° *des coefficients* qui sont des fonctions des abscisses et du moment d'inflexibilité, de la forme

$$x,\quad x^2,\quad l,\quad \int\frac{dx}{\varepsilon},\quad \int\frac{x\,dx}{\varepsilon},\quad \int\frac{x^2dx}{\varepsilon},\quad \iint\frac{dx}{\varepsilon},\ \text{etc...}$$

Toutes les équations sont linéaires par rapport aux ordonnées connues et inconnues ; en les résolvant, on trouvera pour toute ordonnée inconnue Y une valeur de la forme ;

$$Y = \Sigma\,\alpha_i\,y_i + \Sigma\,\beta\,p + \Sigma\,\gamma\,P, \qquad (1)$$

dans laquelle α_i, β, γ sont des coefficients ; y_i, l'ordonnée d'un appui ; p, la charge sur une certaine étendue ; P, une force isolée. Si la charge p était variable et si on avait, par exemple, $p = ax^2 + bx + c$, le terme $\Sigma\,\beta\,p$ serait remplacé par :

$$\Sigma\beta''a + \Sigma\beta'b + \Sigma\beta c.$$

S'il y avait un moment d'encastrement N, il faudrait ajouter le terme δN.

Nous allons démontrer le théorème suivant : *Si l'une des ordonnées connues* ($y_0, y_1, y_2 \ldots y_n$, p, P, a, b, c, N) *varie, toutes les cordes, toutes les tangentes, tous les côtés et cordes des polygones d'intégration des lignes des* K, *des* M, *des* η, *des* y *pivotent autour de points fixes et déterminent sur des axes verticaux l'échelle des valeurs de l'ordonnée variable.*

En effet, en s'appuyant sur la remarque précédente, on démontre aisément que l'équation d'une des droites visées dans l'énoncé est de la forme :

$$y = xY + Y'. \qquad (2)$$

Y et Y' étant des expressions de la forme (1). Soit u, l'ordonnée variable, on a :

$$Y = mu + Z,$$
$$Y' = m'u + Z'.$$

Z, Z' sont des fonctions linéaires des ordonnées connues sauf u. L'équation (2) devient :

$$y = xZ + Z' + u(mx + m') \qquad (3)$$

C'est l'équation d'un système de droites du premier degré à axe vertical ; le pivot se trouve à l'intersection de deux droites :

$$y = xZ + Z', \qquad (3)$$
$$mx + m' = 0. \qquad (4)$$

L'équation (4) prouve que l'abscisse du pivot ne dépend que des coefficients et nullement des ordonnées connues ; l'équation (3) prouve que l'ordonnée du pivot est une fonction linéaire des autres ordonnées connues.

661. Corollaires. — 1° Nous avons démontré que si on imagine un moment d'encastrement à l'extrémité de la poutre, les côtés des lignes de repère pivotent autour de points fixes ; cette propriété est un cas particulier du théorème précédent, car les lignes de repère appartiennent à une poutre fictive ; le moment d'encastrement constitue l'ordonnée variable.

2° La droite qui joint les pivots de deux côtés consécutifs

d'un polygone d'intégration a pour dérivée l'ordonnée du pivot du côté correspondant de la dérivée.

En effet, il y a une solution pour laquelle les deux côtés dont il s'agit ont même direction, alors le côté correspondant de la dérivée est horizontal et détermine l'ordonnée de son pivot.

3° Deux côtés quelconques pivotent autour de deux points R et S ; si ces deux côtés se rencontrent sur une même verticale, toute corde qui s'appuie sur ces deux côtés pivotent autour d'un point de la droite RS.

Ce théorème est sous une forme un peu différente, le théorème de Desargue ; nous en avons transporté la démonstration dans le livre II de ce mémoire (58, fig. 26).

4° Pour une même travée la ligne des K se transporte parallèlement à elle-même ; les pivots sont donc transportés à l'infini. Il n'en est plus de même si l'on considère une corde qui s'appuie sur deux points appartenant à deux travées différentes ; cette corde a alors un pivot.

5° Pour une même travée les pivots des côtés de la ligne des M sont sur une même verticale (128, 2°).

6° Nous savons comment on détermine les pivots pour le cas d'une poutre non chargée sollicitée par un moment extrême ; il suffit pour cela de mener une solution quelconque, car les ordonnées de tous les pivots sont nulles. On peut considérer le cas d'une charge nulle comme le cas particulier d'une charge uniforme ; le polygone des η, qui était formé de deux côtés, est remplacé par un polygone de trois côtés inscrit dans le précédent (549) ; on trace facilement les côtés de ce polygone ; on obtient immédiatement leurs pivots dont les ordonnées sont égales à zéro. Le même raisonnement s'applique au polygone des y. On obtient ainsi une épure donnant les abscisses des pivots des côtés du polygone d'intégration pour le cas d'une charge uniforme quelconque. On passerait de la même manière au cas d'une charge $p = ax + b$ et à d'autres cas plus compliqués.

§ 2. Introduction de couples isolés.

662. Principes. — Soit (fig. 259) une partie de poutre à plusieurs travées ; intégrons deux fois les charges et soit *abcde* la ligne des M''. Nous voyons que sur l'appui nous avons introduit non seulement une réaction, mais un couple isolé représenté par *cd*. Soit ABCDE la ligne inconnue des M' ; sur l'appui la valeur de M' subira un accroissement brusque égal au couple isolé, car la valeur de M est continue, donc en passant de gauche à droite de l'appui on doit avoir $\Delta (M'' - M') = 0$ ou $\Delta M'' = \Delta M'$. On doit donc avoir $CD = cd$. Il résulte de là que les lignes des M', des η', des y' appartiennent à une poutre non chargée mais sollicitée sur les appuis par des couples connus. Si nous reprenons tout ce que nous avons dit dans le cas d'une ligne des M' continue, nous reconnaissons que toutes les propositions sont encore applicables, sauf les modifications suivantes qui sont la conséquence de la présence du couple isolé.

Soient : α (fig. 259), le point invariable des M' ; P, le pivot du côté AC. Le côté CE pivote autour du point Q situé sur le prolongement de Pα. Menons la verticale QR ; on peut trouver QR *a priori* ; on a évidemment QR = Q'R'. Donc les côtés PQ du polygone des pivots passent encore par les points invariables ; mais ils sont séparés par des côtés verticaux QR dont on peut déterminer les longueurs.

Soit ABDE (fig. 260) la ligne des η'. Si le couple isolé n'existait pas, le côté BD se prolongerait en DF. Intégrons la droite M = *cd*, nous trouvons la ligne D'E' ; on doit avoir FE = βE'. Soit Q le pivot du côté BD ; portons QR = Q'R' ; le point R est évidemment le pivot du côté DE. On voit donc que le polygone des pivots PQBβ passe encore par les points invariables α, β, mais il présente des côtés verticaux analogues à QR. Ces côtés se déterminent en intégrant M = *cd*.

Soit ABCGH (fig. 261) la ligne des y'. S'il n'y avait pas de couple isolé, les côtés adjacents à la tangente CG devraient se couper en un point E de la directrice de continuité. Soit

E'G'H' la ligne des y que l'on obtient en intégrant deux fois la droite $M = cd$; on doit avoir $KH = K'H'$ et $FE = F'E'$.

Soit P le pivot du côté BC ; le pivot du côté GK est le point Q situé sur la droite PD. Or $QR = Q'R'$; donc le point R est le pivot du côté GH. Le polygone des pivots PQR présente encore des côtés verticaux analogues à QR et qu'on détermine *a priori* en Q'R'.

Supposons (comme dans la figure 259) que les lignes des M soient tracées comme si chaque travée était encastrée à ses deux extrémités ; remplaçons ces lignes par leurs transformées droites avant d'effectuer les deux intégrations ; toutes les transformées se réduisent à $M = 0$, donc la ligne des η est $\eta = 0$ et la ligne des y est $y = 0$. Si les appuis sont de niveau, les ordonnées des points invariables des y', des η', des M sont nulles ; on supprime ainsi toute intégration, avantage qui compense les complications introduites pas les couples isolés.

663. Méthodes diverses. — La méthode générale qui consiste à utiliser les trois épures pour tracer une solution est applicable sans modification. Les trois solutions pratiques peuvent se résumer en une règle unique : on trace l'épure des pivots comme s'il n'y avait pas de couple isolé ; on détermine les côtés verticaux du polygone des pivots ; on mène le polygone des pivots par les points invariables en partant d'une des extrémités de la poutre ; on trace la ligne de repère définitive en partant de l'autre extrémité.

§ 3. Lignes de repère horizontales.

664. Principes. — Abandonnons l'idée des lignes de repère polygonales et curvilignes et proposons-nous de déterminer directement les lignes des M, des η et des y en prenant des lignes de repère horizontales. Donnons-nous η_0 à l'une des extrémités, en admettant un moment d'encastrement convenable à l'autre extrémité ; supposons η_0 variable. Nous pouvons de proche en proche déterminer les pivots des différents côtés en partant de l'une des extrémités et tracer

ensuite la solution définitive en partant de l'autre extrémité. Mais pour que cette méthode devienne pratique, il faut simplifier autant que possible le polygone d'intégration des lignes des M, des η et des y. Nous examinerons successivement deux procédés différents.

Considérons les $M dx : \varepsilon$ comme des charges ; la ligne des y est alors une ligne des résultantes auxiliaires de ces charges. Soit ABC (fig. 263) la ligne des M pour une travée ; nous pouvons considérer ces charges comme résultant de la composition des charges représentées par la corde AC et des charges négatives qu'il y a lieu de considérer dans une poutre sur deux appuis. Nous pouvons remplacer ces derniers par leurs résultantes ; les tangentes extrêmes à la ligne des y ne seront pas altérées.

Le second procédé consiste à remplacer la courbe ABC par sa transformée droite.

665. Concentration en une résultante. — Traçons (fig. 262) la ligne des M pour une poutre sur deux appuis et les deux intégrales HK et ACE ; la résultante des $M dx : \varepsilon$ est égale à $\alpha\beta$; elle passe par le point C. Supposons le problème résolu ; soit ABC (fig 263), la ligne des M pour la poutre continue. Intégrons la corde AC, nous trouvons AB'C (fig. 264) et AB'D'E' (fig. 265). Introduisons la résultante dont il vient d'être question ; la ligne ABC (fig. 264) se relève d'une quantité égale à cette résultante et la ligne CD'E' (fig. 265) doit être remplacée par CDE. Le polygone d'intégration des y est ABCDE (fig. 265), le polygone des η est ABC et HDE (fig. 264).

Solution par l'épure des y. — Soit P (fig. 265) le pivot du côté BD' ; on peut déterminer *a priori* l'ordonnée PQ qui est égale à l'ordonnée PQ de la figure 262 ; on en conclut que Q est le pivot du côté CD. Le polygone des pivots APQER présente donc des côtés verticaux de longueurs connues ; les autres côtés passent par les points invariables A et E. Les abscisses des pivots sont les mêmes que si la poutre n'était pas chargée (660) et sont données par l'épure spéciale des pivots déjà employée dans les autres méthodes. On peut alors

tracer facilement le polygone des pivots et en déduire la solution définitive.

Solution par les η. — En prenant la dérivée de la corde AE des y, nous obtenons l'ordonnée moyenne des η; nous avons supposé les appuis de niveau, cette ordonnée est nulle, le point moyen des η est le point i. Si la ligne des η était la parabole ABC, le point moyen serait α, centre de gravité du triangle ABC. Or on obtiendrait la véritable ligne des η en portant au-dessus de la parabole ABC, les ordonnées de l'intégrale HK (fig. 262); donc la droite αi de la figure 264 a même longueur que l'ordonnée moyenne αi de l'intégrale HK (fig. 262). Il en résulte que l'on peut trouver *a priori* les points α et β de la figure 264 en prenant les ordonnées αi et $i\beta$ sur la figure 262. Ces points α, β (fig. 264) sont les points invariables de l'épure des η; le polygone invariable présente donc des côtés verticaux analogues à $\alpha\beta$ et des côtés obliques tels que $\beta\gamma$. Soit P le pivot du côté BC; l'ordonnée PQ est constante; donc le point Q est le pivot du côté DE; le polygone des pivots présente des côtés verticaux PQ de grandeur connue; les autres côtés tels que QR passent chacun par un point invariable. On peut donc déterminer successivement le polygone invariable, le polygone des pivots et la solution définitive.

Solution par les M. — Prenons les dérivées des côtés obliques $\beta\gamma$ du polygone invariable des η et portons ces dérivées sur les directrices de continuité; nous obtenons des points tels que α (fig. 263); ce sont les points invariables des M. On démontre comme dans les méthodes précédentes que la corde principale DE pivote autour de ce point α.

Les abscisses des pivots des cordes AC sont données par l'épure spéciale des pivots d'une poutre non chargée; on mène le polygone des pivots par les points invariables et on trace ensuite la position définitive des cordes. En résumé, quand les points invariables sont déterminés, on trace la suite des cordes analogues à AC comme s'il s'agissait d'une poutre non chargée.

666. Emploi des transformées droites. — Soit (fig. 266) *abcd* la ligne des M qu'il s'agit de trouver. Remplaçons pour chaque travée ces lignes par leurs transformées droites, nous obtenons la ligne ACDF; nous savons que par cette substitution les y et les η sur les appuis ne sont pas changés; c'est cette ligne ACDF que nous proposons de trouver. Cette ligne appartient à une poutre non chargée, posée sur les mêmes appuis que la poutre donnée et sollicitée sur ces appuis par des couples isolés dont les moments sont représentés par Aa, CD, etc. Or ces moments peuvent se déterminer *a priori* en traçant pour chaque travée l'épure des M pour le cas où cette travée serait encastrée à ses deux extrémités. En effet, Aa est le moment d'encastrement, CD est la différence des moments d'encastrement Dc et Cc. Nous sommes donc ramené à un problème que nous avons déjà résolu précédemment (662, 663). La méthode générale et les trois méthodes particulières sont applicables; nous n'avons indiqué (fig. 266) que la solution par l'épure des M. Les points invariables α, β sont sur l'axe $M = 0$, si les appuis sont de niveau; on trace le polygone des pivots APQβ en remarquant que les côtés verticaux tels que PQ peuvent se trouver *a priori* ($PQ = P'Q'$) et que les côtés obliques passent par les points invariables. On trace la solution définitive en partant de l'autre extrémité. Les solutions par les η et les y s'obtiennent de la même manière.

CHAPITRE VIII.

Poutres en arc.

§ 1. Généralités.

667. Poussée. — Soit l'arc AB (fig. 268); la fibre moyenne est supposée plane; les forces sont dirigées d'une manière quelconque dans ce plan. Nous supposerons l'arc encastré à ces deux extrémités, mais nous examinerons

plus tard l'influence de une, deux ou trois rotules placées en des points quelconques ; nous rencontrerons donc tous les cas possibles.

Si nous enlevons l'appui A, nous devons introduire une force EF résultante des actions moléculaires qui se développent dans la section A ; en composant cette réaction avec les différentes forces sollicitantes, nous obtiendrons une ligne de résultantes (129) ; le diagramme des résultantes est P123456 (fig. 267).

Nous ne connaissons pas la réaction EF ; si nous donnons à cette réaction inconnue une direction et une grandeur arbitraires, nous obtenons le diagramme des résultantes en P'12...6 (fig. 267) et la ligne de pression KLM (fig. 268). Si l'on étudiait les déformations que l'arc éprouve sous l'influence de cette ligne KLM, on trouverait en général que ces déformations sont incompatibles avec les conditions des appuis ; le problème à résoudre est de déterminer quelle est la ligne de pression qui est compatible avec ces conditions.

Supposons que l'on remplace les appuis existants en A et B par des plans indéfiniment polis perpendiculaires à la résultante de toutes les forces sollicitantes. On obtient les pressions sur ces appuis fictifs en décomposant la résultante des forces en deux composantes parallèles passant par les points A et B. Menons les directions AK, BM de ces composantes ; après la concentration en deux résultantes, la ligne des résultantes devient KM, les pressions sur les appuis s'obtiennent sur le diagramme (fig. 267) en menant P'Q parallèlement à KM ; 1Q et Q2 sont ces pressions. Pour passer de ce cas exceptionnel à la ligne de pression KLM, il faut introduire outre les réactions Q1 et 2Q, deux forces égales et contraires représentées par P'Q et dirigées suivant la droite KM ; cette force P'Q est la poussée de l'arc. La poussée est ce qui caractérise une ligne de pression ; pour la ligne EFB, la poussée est PQ et est dirigée suivant ED. Dans le cas exceptionnel des plans d'appui indéfiniment polis, la poussée est nulle ; c'est l'état de sollicitation d'une poutre droite.

668. Théorie analytique. — Un élément ds de l'arc subit trois déformations élémentaires. Soient : M le moment fléchissant ; N l'effort longitudinal de compression ; K l'effort tranchant. Il se produit une flexion angulaire $d\psi$, une dilatation δds, un glissement γds ; on a :

$$d\psi = \frac{M}{EI}\, ds, \tag{1}$$

$$-\delta ds = \frac{N}{E\omega}\, ds, \tag{2}$$

$$\gamma ds = \frac{K}{G\omega}\, ds. \tag{3}$$

Supposons l'élément B immobile, nous obtiendrons l'arc déformé en produisant successivement les déformations de tous les éléments. Prenons deux axes rectangulaires yox ; supposons ces axes invariablement liés à la section A et exprimons que ces axes ne subissent ni rotation, ni translation ; nous trouvons les trois équations :

$$\int d\psi = 0, \tag{4}$$

$$\int (\delta dx + \gamma dy + y d\psi) = 0, \tag{5}$$

$$\int (-\delta dy + \gamma dx + x d\psi) = 0. \tag{6}$$

La première est l'équation angulaire ; elle exprime que les axes ne tournent pas. La seconde est l'équation linéaire des déformations horizontales ; elle exprime que la projection horizontale du déplacement de l'origine est nulle. La troisième est l'équation linéaire des déformations verticales ; elle exprime que la projection verticale du déplacement de l'origine est égale à zéro.

Si la poussée était nulle, les éléments M, N, K prendraient des valeurs connues M', N', K' ; à ces valeurs, il faut ajouter l'influence de la poussée. Déterminons la poussée par ses composantes q, q' suivant les axes et son moment

qe autour de l'origine. Le sens des moments positifs est de y vers x ; on trouve :

$$M = M' + qe - qy + q'x, \tag{7}$$

$$N = N' + q\frac{dx}{ds} + q'\frac{dy}{ds}, \tag{8}$$

$$K = K' - q\frac{dy}{ds} + q'\frac{dx}{ds}. \tag{9}$$

Si on remplace dans les équations (4), (5), (6) les quantités $d\psi$, δ et γ par leurs valeurs tirées des équations (1), (2), (3) et (7), (8), (9), on obtient trois équations à trois inconnues q, q', qe. Au lieu de résoudre ces équations, nous pourrions les transformer comme nous l'avons fait dans la théorie des voûtes. Si l'arc est symétrique, tous les tracés graphiques exposés dans la théorie des voûtes sont applicables ici ; il suffit de faire $n = 1$, $1 + m = \frac{5}{2}$. Si l'arc n'est pas symétrique, il y a une inconnue nouvelle q' et une équation nouvelle ; mais on conçoit que l'on pourrait soumettre cette équation aux mêmes transformations de calcul que les deux autres. Cependant ce n'est pas cette voie que nous allons suivre ; dans les arcs homogènes, les coefficients n et m sont connus ; rien ne nous oblige à séparer les termes qui contiennent ces coefficients ; aussi nous allons suivre une méthode plus synthétique qui nous conduira rapidement à des relations d'une grande élégance.

669. Théorie cinématique. — Si par les extrémités d'un élément ds, nous menons deux sections, l'une d'elles subit par rapport à sa voisine les trois déplacements élémentaires $d\psi$, δds, γds. Si partant de l'élément B qui est immobile, nous réalisons les déformations de toutes les tranches infiniment petites, nous voyons que l'on obtiendra le déplacement de la section A en composant par les règles de la cinématique toutes les rotations $d\psi$ et toutes les translations δds et γds. Pour que l'élément A soit immobile, il faut que ces translations et rotations élémentaires se composent en une rotation unique égale à zéro,

670. Indépendance des effets des forces. — Supposons qu'un arc soit sollicité d'une manière quelconque ; un groupe de forces nouvelles intervient; quelle est la ligne des pressions nouvelles qu'il faut composer avec les pressions existantes pour obtenir les pressions totales? Les formules (1), (2), (3) sont linéaires par rapport à M, N, K; donc les déformations élémentaires nouvelles sont indépendantes des autres déformations.

En effet, on a par exemple $\Delta(d\psi) = \Delta M, ds$: EI relation indépendante de $d\psi$ et de M. La rotation unique de l'élément extrême, que devons égaler à zéro, est donc aussi indépendante des pressions existantes; de là résulte ce théorème: *la ligne des pressions nouvelles due à un groupe de forces nouvelles est indépendante des forces existantes.*

Supposons que toutes les forces qui sollicitent l'arc, y compris son propre poids, viennent à disparaître. Il se peut qu'il existe encore une poussée ; cette poussée a pu être engendrée par la pose, elle a pu se modifier par les variations de température ; la ligne de pression de l'arc non chargé se réduit à une ligne droite qui est la ligne d'action de la poussée due à la pose et aux variations de température. Si différents groupes de forces interviennent, on étudie séparément l'effet de chacun d'eux ; la poussée totale s'obtient en composant les poussées partielles y compris la poussée de l'arc non chargé. La pression totale s'obtiendra de même en composant les pressions partielles. On peut aussi l'obtenir en traçant la ligne de pression définitive.

§ 2. Arc encastré à une extrémité.

671. Masse fictive de l'arc. — Nous attribuerons à la tranche ds de l'arc une masse élémentaire $dm = ds$: EI ; soient x, y les coordonnées de cet élément : les coordonnées x_1, y_1 du centre de gravité de l'arc sont données par les formules :

$$\left.\begin{aligned} y_1 \int dm &= \int y\, dm, \\ x_1 \int dm &= \int x\, dm. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Soit AA' (fig. 272) l'élément ds; prenons provisoirement pour axes coordonnés la tangente AX et la normale AY à la fibre moyenne ; posons :

$$r = \sqrt{\frac{I}{\omega}} \qquad r' = r\sqrt{\frac{E}{G}}. \tag{11}$$

Nous donnerons à la tranche une densité fictive telle que son ellipse principale d'inertie, située dans le plan de l'arc, ait pour équation :

$$\frac{X^2}{r'^2} + \frac{Y^2}{r^2} = 1. \tag{12}$$

Nous obtiendrons notamment cette ellipse en décomposant la masse dm en quatre parties égales condensées aux quatre points m, m', m'', m''' dont les coordonnées sont $x = \pm r'$, $y = \pm r$.

Le centre de gravité de l'arc n'est pas modifié par la division de la masse dm en ses points fictifs ; mais il n'en est pas de même des moments d'inertie et des centres de percussion. Quand nous parlerons du centre de percussion de l'élément ds, il sera sous-entendu que cet élément est remplacé par ses quatre points fictifs ; ce centre de percussion est le pôle de l'axe de rotation dans une ellipse imaginaire dont l'équation s'obtient en changeant 1 en — 1 dans l'équation (12). Quand nous parlerons du centre de percussion de l'arc tout entier, il sera sous-entendu que chaque élément est remplacé par ses points fictifs ; l'ellipse centrale d'inertie de l'arc sera aussi déterminée dans cette hypothèse.

Reprenons un système d'axes rectangulaires quelconque xoy ; soient (α, β), (α', β'), (α'', β''), (α''', β''') les coordonnées des quatre points fictifs de la masse dm ; les coordonnées x_1, y_1 du centre de percussion de l'arc total, conjugué à l'axe ox ont pour valeur :

$$y_1 \int \Sigma \frac{dm}{4} \beta = \int \Sigma \frac{dm}{4} \beta^2,$$

$$x_1 \int \Sigma \frac{dm}{4} \beta = \int \Sigma \frac{dm}{4} \alpha\beta.$$

Soient α_1, β_1 les coordonnées du centre de percussion de l'élément, conjugué à l'axe en ox; on a :

$$\beta_1 \Sigma \frac{dm}{4} \beta = \Sigma \frac{dm}{4} \beta^2,$$

$$\alpha_1 \Sigma \frac{dm}{4} \beta = \Sigma \frac{dm}{4} \alpha\beta.$$

D'autre part, on a évidemment :

$$y\, dm = \Sigma \frac{dm}{4} \beta,$$

$$x\, dm = \Sigma \frac{dm}{4} \alpha.$$

Les valeurs de x_1 et de y_1 sont donc données par les formules :

$$\left.\begin{aligned} y_1 \int y\, dm &= \int \beta_1 y\, dm, \\ x_1 \int y\, dm &= \int \alpha_1 y\, dm. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

On trouve de même que les coordonnées x_1, y_1 du centre de percussion de l'arc, conjugué à l'axe oy sont données par les formules :

$$\left.\begin{aligned} y_1 \int x\, dm &= \int \beta_1 x\, dm, \\ x_1 \int x\, dm &= \int \alpha_1 x\, dm. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

α_1, β_1 sont les coordonnées du centre de percussion de l'élément par rapport à l'axe oy.

672. Centre instantané de la rotation élémentaire d'une section. — *Les trois déplacements élémentaires d'une section se compose en une rotation unique* $d\psi$ *autour d'un point. Ce centre de rotation est, par rapport à l'élément* ds, *le centre de percussion conjugué à la ligne d'action de la pression.*

En effet, si l'on compose par les règles de la cinématique, la rotation $d\psi$ et les translations δds et γds, on sait que l'on obtient une rotation unique $d\psi$ autour d'un centre instantané qu'il s'agit de déterminer. Soient X', Y' les coordonnées de

ce centre par rapport aux axes AX et AY (fig. 272) ; exprimons que la rotation unique $d\psi$ communique au point A le même déplacement que les trois mouvements composants ; on trouve :

$$X'd\psi = \gamma ds,$$
$$Y'd\psi = \delta ds.$$

Remplaçons $d\psi$, γds et δds par leurs valeurs tirées des équations (1), (2) et (3) ; on trouve après quelques calculs :

$$\frac{X'M}{r'^2} = K,$$

$$\frac{Y'M}{r^2} = N.$$

La pression sur la section A est la résultante des forces K, N et du couple M ; le moment de cette pression autour d'un point X, Y a donc pour valeur

$$u = KX + NY + M.$$

L'équation de la ligne d'action de la pression est donc

$$KX + NY + M = 0.$$

Les équations qui donnent X', Y' permettent d'éliminer K et N ; on trouve que cette ligne d'action a pour équation :

$$\frac{XX'}{r'^2} + \frac{YY'}{r^2} + 1 = 0. \qquad (15)$$

C'est l'équation de l'antipolaire du point X'Y' par rapport à l'ellipse centrale d'inertie ; réciproquement le centre de rotation est l'antipôle de la pression ; c'est donc aussi le centre de percussion conjugué à cette pression.

Le centre de rotation se détermine par la construction suivante. Soit FH la pression ; le centre de rotation C est l'intersection des antipolaires des points F et H ; ces antipolaires CE et KC sont déterminées par les équations : $FA \times AE = r^2$, $HA \times AK = r'^2$. De là résulte la construction suivante : on porte $AD = r$, $AB = r'$; on joint FD, on mène DE perpendiculairement a FD ; on joint HB, on mène BK perpendiculairement à BH ; les points E et K déterminent le point C.

La rotation $d\psi$ a pour valeur $d\psi = M ds$: EI ou $d\psi = M dm$. Le moment M s'obtient graphiquement de la manière suivante. Soit Ph la droite qui représente la pression en grandeur et direction; soit Pq une force horizontale, de grandeur constante q, prise pour base dans le calcul des moments; décomposons la force Ph en deux composantes, l'une égale à q, l'autre représentée par qh. Menons par A une parallèle AL à qh; si nous prenons L comme point d'application des deux composantes, le moment de la force dirigée suivant AL est nulle; soit c = AN la projection verticale de AL ; on a : $M = cq$; la valeur de $d\psi$ devient :

$$d\psi = qc dm. \qquad (16)$$

Pour simplifier le langage, nous désignerons la longueur c sous le nom d'excentricité de la pression.

673. Corollaire. — La rotation élémentaire d'une section est la résultante de quatre rotations autour des quatre points fictifs de la section; chacune de ces composantes est égale à la masse du point fictif ($dm : 4$) multipliée par le moment de la pression autour de ce point.

Soient u, u', u'', u''' les moments de la pression autour des quatre points fictifs m, m', m'', m''' ; il s'agit de démontrer que la rotation de la section est la résultante de quatre rotations $u\,\frac{dm}{4}$, $u'\,\frac{dm}{4}$, $\frac{u''dm}{4}$, $\frac{u'''dm}{4}$. En effet, composons ces rotations comme des forces parallèles; remarquons que le moment u, autour d'un point (X, Y) est donné par la formule $u = KX + NY + M$; les moments u, u', u'', u''' peuvent donc être considérés comme les ordonnées d'un plan; donc les quatre forces à composer suivent une loi plane (258) et par conséquent leur résultante est appliquée au centre de percussion conjugué à l'axe neutre. Cet axe neutre est la droite $u = 0$, c'est la ligne d'action de la pression. On sait que la grandeur de cette résultante est la force que l'on obtiendrait en mettant les quatre masses au centre de gravité; or alors $u = M$; donc la résultante est Mdm. Nous retrouvons donc en composant les quatre rotations, la rotation unique de la section; c'est ce qu'il fallait démontrer.

674. Rotation finie due à un système de forces. — Soit AB (fig. 268) un arc sollicité par la ligne de pression KLM ; l'élément B est fixe, on demande la rotation de l'élément A. Nous avons déjà dit qu'il faut composer toutes les rotations $d\psi$ que l'on obtient en décomposant l'arc en tranches infiniment petites. Soient donc x', y' les coordonnées du centre des rotations $d\psi$; la rotation résultante de l'élément A s'effectue autour d'un centre (x'', y'') donné par le formules :

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \int d\psi, \\ \psi y'' &= \int y' d\psi, \\ \psi x'' &= \int x'' d\psi. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Si on remplace $d\psi$ par sa valeur $qcdm$, on trouve :

$$\left.\begin{aligned} \psi &= q \int cdm, \\ y'' \int cdm &= \int y' cdm, \\ x'' \int cdm &= \int x' cdm. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Commençons par porter les dm en abscisses sur l'axe AD' (fig. 273). Si l'arc est prismatique, les dm sont proportionnels à ds ; sinon il faut déterminer les dm par une intégration analogue à celle qui nous a donné les ds' au numéro 443. Le polygone AD est l'intégrale des cdm ; les côtés de ce polygone sont parallèles aux droites 11, 22, 33,... de la figure 269. Pour obtenir ce dernier diagramme, on projette les points de division A, 2, 3, 4, 5, B de l'arc AB (fig. 268) sur l'axe oy' de la figure 269. On détermine ensuite la valeur de l'excentricité c en ces points par la construction indiquée précédemment (672). Soit P'q (fig. 267) la force q prise pour base dans l'évaluation des moments ; menons, parallèlement aux droites $q1$, $q2$... de la figure 267, les droites A1, 22. . de la figure 268. Les projections verticales de ces dernières droites sont les valeurs de l'excentricité c. Projetons les

extrémités de ces droites sur l'axe $O'd$; les droites qui joignent les points correspondants de la ligne des pôles Oy', et de l'axe $O'd$ sont les directions des tangentes à l'intégrale des cdm

Sur l'axe D'D (fig. 273), projetons les cdm ; si nous considérons cet axe comme axe d'abscisses, nous pourrons tracer en EF et GL les intégrales des $x'cdm$ et des $y'cdm$. La figure 271 est le diagramme des inclinaisons de l'intégrale EF des $x'cdm$. La figure 270, tournée de 90° serait le diagramme des inclinaisons de l'intégrale GL ; les côtés du polygone GL sont donc perpendiculaires aux rayons de la figure 270. Avant d'obtenir les figures 270 et 271, on doit, au préalable, déterminer les x' et les y', c'est-à-dire les centres de percussion conjugués aux pressions pour les points A, 2, 3, 4, 5, B ; il suffit alors de projeter ces points sur les axes des figures 270 et 271. Nous n'avons indiqué que la construction du centre qui correspond au point A.

D'après les formules (18), x'' et y'' sont précisément les inclinaisons des cordes EF et GL (fig. 273) ; en menant les rayons ef et gh qui correspondent à ces cordes dans les diagrammes 271 et 270, on trouve les projections f et h du centre C (fig. 268) de la rotation résultante.

675. Rotation finie due à une poussée unique. — *La section* A, *d'un arc* AB *encastré en* B, *tourne autour du centre de percussion de l'arc, conjugué à la ligne d'action de la force unique qui sollicite la section* A ; *la rotation est égale à la masse fictive de l'arc multipliée par le moment de la force sollicitante autour du centre de gravité de l'arc.*

Cette propriété résulte de ce que les moments d'une poussée unique autour des points du plan peuvent être considérés comme les ordonnées d'un autre plan coupant le plan de l'arc suivant la ligne d'action de la poussée. Pour chacun des éléments infiniment petits de l'arc, remplaçons la rotation élémentaire par les quatre composantes $u\,\frac{dm}{4}$, $u'\,\frac{dm}{4}$, $u''\,\frac{dm}{4}$, $u'''\,\frac{dm}{4}$. Toutes ces rotations se composent comme des forces ;

ces forces peuvent être considérées comme des pressions perpendiculaires au plan de l'arc et obéissant à une loi plane; un point fictif de masse $\frac{dm}{4}$ subit une pression $u\frac{dm}{4}$, u est l'ordonnée d'un plan. Donc (258) la résultante de toutes ces forces passe par le centre de percussion de l'arc conjugué à la ligne d'action de la poussée unique. Cette résultante est égale à la masse totale multipliée par l'ordonnée u au centre de gravité; soit u_1 le moment de la poussée autour du centre de gravité, on a :

$$\psi = u_1 \int dm. \qquad (19)$$

376. Cas particuliers. — 1° Si la section A est sollicitée par un couple, elle tourne autour du centre de gravité de l'arc.

En effet, le couple peut être considéré comme une force à l'infini; l'antipôle de cette force est le centre de gravité de l'arc. Cette propriété se démontre directement avec la plus grande facilité; il en est de même de la suivante.

2° Si la section A est sollicitée par une force qui passe par le centre de gravité de l'arc, elle subit un déplacement de translation perpendiculaire au diamètre conjugué à la force dans l'ellipse centrale d'inertie de l'arc.

En effet, l'antipôle d'une droite qui passe par le centre de gravité est un point à l'infini situé sur le diamètre conjugué à cette droite; une rotation autour de cet antipôle équivaut à une translation perpendiculaire au diamètre: c'est ce qu'il fallait démontrer.

Décomposons la force en deux composantes parallèles appliquées aux extrémités de son diamètre conjugué; chacune de ces composantes produit une rotation; ces deux rotations constituent un couple qui équivaut à une translation. Soit b' le demi-diamètre conjugué à la force; soit i l'angle de la normale à ce diamètre et de la force sollicitante; on trouve que chacune des rotations a pour valeur

$$\frac{F}{2} b' \cos i \int dm.$$

Soit $R = b' \cos i$ le rayon de gyration de l'arc autour de la force, la translation e est donnée par la formule :

$$e \cos i = FR^2 \int dm, \qquad (20)$$

c'est-à-dire que *la projection de la translation sur la force est égale au produit de la force par le moment d'inertie de l'arc autour de la force.*

677. Problèmes. — *Déterminer graphiquement la rotation due à une force unique. Réciproquement déterminer la force capable de produire une rotation.*

Ces deux problèmes seraient faciles à résoudre si on connaissait l'ellipse centrale d'inertie de l'arc ; on opérerait comme au numéro 672. Mais il n'est pas indispensable de déterminer cette ellipse ; il suffit de connaître le centre de gravité de l'arc et les centres de percussion conjugués aux deux axes coordonnés.

Soient (fig. 274) R le centre de gravité, S le centre de percussion conjugué à l'axe ox, T le centre de percussion conjugué à l'axe oy. On donne la ligne d'action DE de la force, on demande de trouver le centre C qui est l'antipôle de DE. Déterminons les antipolaires des points D et E par la méthode du numéro 265 ; ces antipolaires Cb et Cb' déterminent le point C par leur intersection.

Réciproquement, si on donne le point C, on trouvera la droite DE en joignant les antipôles des droites Cb' et Cb parallèle aux axes coordonnés. On voit en $AbaB$ la construction qui permet de déduire le point D, de la ligne Cb ou réciproquement.

Si la force passait par le centre de gravité, on la décomposerait en deux autres ; on pourrait, par exemple, la décomposer en une force dirigée suivant l'axe oy et une autre parallèle à l'axe ox. On trouve un couple de rotations ; si on donnait la translation, on y substituerait un couple de rotations ; on prendrait, par exemple, le point T pour centre de l'une des rotations ; l'autre centre de rotation serait un point à déterminer, de la droite RS.

Il nous reste à dire comment on trouve le centre de gravité R et les centres de percussion S et T. On applique les formules (10), (13) et (14) du numéro 671. On intègre successivement les ydm, les xdm, les $\beta_1 ydm$, les $\alpha_2 ydm$, les $\beta_3 xdm$, les $\alpha_3 xdm$; les inclinaisons des cordes de ces intégrales donnent les valeurs de y_1, x_1, y_2, x_2, y_3, x_3.

Nous n'avons pas indiqué ces constructions sur les figures 268 et 274; nous les indiquerons plus tard dans les figures 276 à 281. Les opérations à faire sont d'ailleurs les mêmes que celles que nous avons employées pour chercher le centre C de la rotation finie (fig. 258); si en effet on suppose une poussée unique dirigée suivant l'axe des x, le centre de la rotation finie devient le centre de percussion conjugué à l'axe ox. Ce dernier s'obtiendra donc comme le centre C; mais l'excentricité c devient tout simplement y et les cdm sont remplacés par les ydm. Quand on cherche le centre de percussion conjugué à l'axe ox, les cdm sont remplacés par les xdm.

§ 3. Arc encastré aux deux extrémités.

678. Méthode du centre de rotation. — Traçons (fig. 268) une ligne de pression KLM en choisissant arbitrairement la poussée; supposons l'arc encastré en B et déterminons la rotation ψ de la section A. Pour passer de la ligne de pression KLM à la ligne de pression qui se produira, il faut introduire une poussée additionnelle. Pour que l'élément A soit immobile, il faut que cette poussée additionnelle produise, autour du même centre, une rotation égale et contraire à la rotation ψ. Cherchons la force unique capable de produire la rotation ψ autour du point C, prenons-la en sens contraire, nous obtiendrons la poussée additionnelle.

Nous savons comment on détermine la ligne d'action RS (fig. 268) de la force capable de produire une rotation de l'élément A autour d'un point donné C; montrons comment on détermine la grandeur de cette force. Supposons le problème résolu ; soit P'P la grandeur et la direction de la force cherchée; le moment de cette force autour du centre de

gravité G s'obtient par la construction connue; on mène GS parallèlement à qP; si h est la projection verticale de la droite GS, le moment dont il s'agit est qh. Exprimons que les rotations produites par la force unique et par la ligne de pression KLM sont égales; nous trouvons (674) :

$$qh \int dm = q \int cdm$$

ou

$$h \int dm = \int cdm.$$

En d'autres termes h est l'excentricité moyenne; c'est la projection verticale d'un rayon ad (fig. 269) parallèle à la corde de l'intégrale AD (fig. 273). Si le point a est choisi au niveau du point G, le point d sera au niveau du point S et cela déterminera ce dernier; connaissant GS, on mène (fig. 267) qP parallèlement à GS, on trouve le point P et la force P'P. La poussée additionnelle étant égale et contraire à P'P, le nouveau pôle est P. La droite RS est l'axe de pivotement des côtés des deux lignes de pression. On obtiendra la nouvelle ligne de pression soit en se servant uniquement de l'axe de pivotement, soit en utilisant un point T de la nouvelle ligne et le nouveau diagramme des résultantes (144).

679. Méthode des trois pivots. — Nous allons reprendre les trois équations de la déformation relatives à une poutre encastrée; en les considérant séparément, nous allons démontrer que chacune d'elles détermine un certain point de la ligne de pression; connaissant les trois points relatifs aux trois équations, nous ramènerons la question au problème que nous allons examiner et qui n'est qu'une modification de celui que nous avons résolu au numéro 144.

Si nous remplaçons les charges par leurs résultantes, la ligne de pression se réduit à deux droites AB et BC (fig. 282).

Soient dans cette hypothèse ABC et A'B'C' deux lignes de pression. Les points B, B' sont situés sur la ligne d'action de la résultante. Si nous décomposons cette résultante en deux composantes parallèles dirigées suivant les droites AA' et CC', nous obtenons deux cordes correspondantes AC et A'C'. On peut dire à ce point de vue qu'à toute corde HK de l'angle ABC correspond une corde H'K' de l'angle A'B'C' et qu'à tout

point D de la première figure correspond un point D' de la seconde. Si nous choisissons provisoirement un axe d'ordonnées parallèle à la résultante BB', on peut considérer ABC et A'B'C' comme deux mêmes intégrales tracées avec des pôles différents (58) ; on passe donc des points de la figure ABC à ceux de la figure A'B'C' par un changement d'échelles des ordonnées. Ainsi les points correspondants (D, D') (B, B') satisfont à la relation :

$$\frac{Bb}{B'b'} = \frac{Dd}{D'd'} = \text{constante (1)}.$$

Supposons que la ligne A'B'C' soit tracée ; on demande de tracer la ligne ABC de telle manière que trois points D', E', F' de la première aient pour correspondants, dans la seconde, les points donnés D, E, F.

Soit P'αβ le diagramme des résultantes auxiliaires ; considérons les droites D'E' et E'F' comme des cordes de la ligne A'B'C' ; elles correspondent à une certaine concentration que l'on obtient en menant P'δ et P'ε parallèlement aux cordes. Les droites DE et EF prolongées doivent correspondre aux mêmes modes de concentration ; donc dans le diagramme des résultantes auxiliaires les côtés P'ε et P'δ tournent autour des points ε et δ quand on passe de la ligne A'B'C' à la ligne ABC. De là résulte la construction suivante : menons P et δP parallèlement aux côtés EF et DE ; on obtient le pôle inconnu P. On trouve facilement un point H correspondant d'un point H' du premier côté de la ligne de pression ; on obtient alors cette ligne par la construction ordinaire.

Il nous reste à dire comment on détermine les trois points D, E, F de la ligne de pression inconnue.

680 Équation angulaire. — *Toutes les courbes de pression qui satisfont à l'équation angulaire se déduise l'une de l'autre par l'introduction d'une poussée additionnelle passant par le centre de gravité de l'arc.*

---

(1) On pourrait dire que les figures ABC, A'B'C' sont projectives ; mais nous avons voulu rendre ce mémoire indépendant de la géométrie supérieure.

En effet, l'équation angulaire est :

$$\int d\psi = 0.$$

Cette équation exprime que la section extrême A de l'arc AB, encastré en B, ne subit pas de rotation ; mais elle subira un déplacement de translation, à moins que les deux autres équations de la déformation ne soient aussi satisfaites. Pour passer d'une ligne de pression qui satisfait à l'équation angulaire à une autre ligne de pression qui y satisfasse également, il faut que la poussée additionnelle produise aussi un déplacement de translation. Donc la poussée additionnelle doit passer par le centre de gravité de l'arc.

Corollaires. — 1° L'axe de pivotement de deux lignes de pression qui satisfont à l'équation angulaire passe par le centre de gravité de l'arc.

En effet, quand on passe d'une ligne de résultantes à une autre les côtés pivotent autour de points situés sur une droite parallèle aux déplacements du pôle ; cette droite que nous appelons ici axe de pivotement est la ligne d'action de la poussée additionnelle (140).

2° Le centre de gravité est le pivot des lignes de pression qui satisfont à l'équation angulaire. Nous entendons par là que toute corde passant par le centre de gravité pivote autour de ce point, quand on passe d'une ligne de pression satisfaisant à l'équation angulaire, à toutes les autres lignes de pression qui satisfont à la même équation. Cette propriété est vraie non seulement pour les cordes de l'angle ABC des pressions extrêmes, mais pour toute autre corde ; il suffit d'admettre un même mode de concentration (142) dans toutes les lignes de pression que l'on considère.

681. Équation linéaire suivant un axe. — *Les lignes de pression qui satisfont à l'équation linéaire suivant un axe de projection se déduisent les unes des autres par l'introduction d'une poussée additionnelle qui passe par le centre de percussion de l'arc, conjugué à l'axe de projection.*

Prenons, par exemple, l'équation (5) ; nous l'avons obtenue en égalant à zéro la projection, sur l'axe *ox*, du déplace-

ment du point O supposé invariablement lié à la section A. Si nous utilisons le centre (x', y') des rotations élémentaires, cette équation se simplifie et devient :

$$\int y' d\psi = 0.$$

Sous cette forme, c'est une équation de moment; en la comparant avec la seconde des équations (17), on voit qu'elle exprime que le moment de la rotation finie est nul autour de l'axe ox.

Nous supposons cette équation satisfaite pour une ligne de pression ; il s'agit de savoir quelle doit être la poussée additionnelle pour que la nouvelle ligne de pression satisfasse à la même équation. Il faut évidemment que le centre de la rotation due à la poussée additionnelle se trouve sur l'axe ox ; car c'est dans ce cas seulement que le moment de la rotation totale autour de l'axe ox continuera à s'annuler. Il faut donc que la poussée additionnelle soit l'antipolaire d'un point de l'axe ox ou ce qui est la même chose que la poussée additionnelle passe par le centre de percussion de l'arc conjugué à l'axe ox.

Corollaires. — 1° L'axe de pivotement de deux lignes de pression qui satisfont à l'équation linéaire de projection sur un axe passe par le centre de percussion de l'arc, conjugué à cet axe.

2° Le centre de percussion conjugué à un axe est le pivot de toutes les lignes de pression qui satisfont à l'équation linéaire de projection sur cet axe.

682. Deux équations. — *L'axe de pivotement de deux lignes de pression qui satisfont à deux équations linéaires est l'antipolaire du point d'intersection des deux axes de projection.*

En effet, la poussée additionnelle doit passer à la fois par les deux antipôles des axes de projection.

Remarque. — Si l'un des axes se transporte à l'infini, on peut reconnaître que l'une des équations linéaires devient précisément l'équation angulaire; l'axe de pivotement devient le diamètre conjugué à l'axe de projection qui subsiste ; c'est ce que l'on démontre directement avec la plus grande facilité.

683. Points qui correspondent aux trois pivots. — *Les droites* DD', EE', FF' (fig. 282) *qui joignent les trois pivots* D, E, F *de la ligne de pression cherchée à leurs correspondants* D', E', F' *de la ligne de pression connue, ont respectivement pour projections verticales les trois excentricités moyennes* h, h', h'' *données par les formules :*

$$\left.\begin{aligned} h \int dm &= \int cdm, \\ h' \int ydm &= \int y'cdm, \\ h'' \int xdm &= \int x'cdm. \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Nous admettons implicitement que la force q prise pour base dans l'évaluation des moments soit horizontale et soit représentée par la droite P'q qui aboutit à la résultante totale $\alpha\beta$ des forces sollicitantes ; si la base était q' on devrait multiplier les excentricités h, h', h'' par le rapport $q : q'$.

Considérons d'abord l'équation angulaire ; déterminons le couple $-qh$ qu'il faut introduire pour que la ligne de pression A'B'C' se transforme en une autre ligne qui satisfasse à l'équation angulaire. La ligne de pression A'B'C' produit des rotations $qcdm$, le couple $-qh$ des rotations $-qhdm$; la somme des rotations doit être nulle, on a donc

$$\int qcdm - \int qhdm = 0$$

ou

$$h \int dm = \int cdm.$$

Mais introduire le couple $-qh$, c'est transporter la pression A'B' parallèlement à elle-même ; cela revient à faire glisser la ligne A'B'C' suivant la résultante BB'. Nous allons démontrer que la projection verticale de ce glissement n'est autre que h.

En effet, le moment de la pression A'B' autour du point A doit diminuer de qh ; or ce moment est qc_0, si c_0 est la projection verticale de AA' ; donc cette projection verticale doit diminuer de h ; c'est ce qu'il fallait démontrer. D'après cela, menons une droite DD' parallèle à BB' et telle que sa projection verticale soit h ; toute corde qui passe par D' passera par D après le glissement. On obtient alors une ligne de pression A''B''C'' que nous n'avons pas représentée. Pour passer

de la ligne A"B"C" à la ligne ABC, il faut encore introduire une poussée passant par le centre de gravité de l'arc ; les cordes passant par D pivotent autour de D ; donc en passant de la ligne A'B'C', à la ligne A"B"C" ou à la ligne ABC, le point D' vient en D ; c'est la première proposition qu'il s'agissait de démontrer.

Ce que nous avons démontré pour le pivot D de l'équation angulaire, nous allons le démontrer de la même manière pour les pivots E et F des deux autres équations. Déterminons, par exemple, le couple $-qh'$ qu'il faut introduire pour que la ligne de pression A'B'C' se transforme en une autre ligne qui satisfasse à l'équation de moment autour de l'axe ox. La ligne de pression A'B'C' produit des rotations élémentaires $qcdm$ autour des points (x', y') ; le moment de l'une de ces rotations est $y'\,qcdm$. Le couple $-qh'$ produit des rotations $-qh'dm$ autour des points (x, y) ; le moment de l'une d'elles est $-qh'dm$.

L'équation de moment est donc :

$$\int y'qcdm - \int yqh'dm = 0,$$

d'où

$$h' \int ydm = \int y'cdm.$$

On démontre comme précédemment qu'en passant de la ligne de pression A'B'C' à la ligne ABC ou toute autre qui satisfait à l'équation de moment autour de l'axe ox, le point E' qui vient en E est tel que la projection verticale de la droite EE' est égale à h'.

On trouve de même qu'en passant de la ligne de pression A'B'C' à la ligne ABC ou toute autre qui satisfait à l'équation de moment autour de l'axe des y, le point F' qui vient au pivot F est déterminé par la condition que la projection verticale de FF' est égale à h''. Pour satisfaire à la fois aux trois équations, il faut donc transformer la ligne de pression A'B'C' de telle manière que les points D', E', F' viennent respectivement en D, E, F.

Les excentricités moyennes h, h', h'' se déterminent par les intégrales que nous avons utilisées dans la méthode du centre de rotation. En menant O'H (fig. 275) parallèlement à la corde

AD (fig. 273), on obtient $h = OH$. L'excentricité h', que l'on peut appeler excentricité moyenne d'oscillation autour de l'axe ox, s'obtient par une division graphique. Soit AK la corde de l'intégrale des $y dm$; on a :

$$h' = \int cy' dm : \int y dm = LL' : D'K = OH'.$$

On mène O'H' perpendiculairement à la droite K'L.

On trouve de même :

$$h'' = \int cx' dm : \int x dm = E'F' : AN = O'H''.$$

D'N est la corde de l'intégrale des $x dm$; OH'' est perpendiculaire à EN.

684. Autre tracé. — Nous pouvons d'abord en décomposant la masse de chaque élément en ses points fictifs et en décomposant les rotations $d\psi$ en leurs composantes autour de ces points fictifs, obtenir les centres de percussion (x_2, y_2), (x_3, y_3), le centre de la rotation finie (x'', y'') ou les excentricités moyennes h, h', h'' sans qu'il soit nécessaire de déterminer les centres de percussion (α_2, β_2), (α_3, β_3), (x', y') pour chaque élément. Ainsi, par exemple, on a (671) :

$$y_2 \int y dm = \int \Sigma \beta^2 \frac{dm}{4}.$$

Le second membre est la moyenne des quatre intégrales :

$$\int \beta^2 dm, \quad \int \beta'^2 dm, \quad \int \beta''^2 dm, \quad \int \beta'''^2 dm.$$

Si nous remplaçons la rotation $d\psi$ par ses composantes, on a :

$$qcy' dm = \Sigma u \beta \frac{dm}{4},$$

$$qcx' dm = \Sigma u \alpha \frac{dm}{4}.$$

Si nous exprimons le moment u par qe, le moment u' par qe', etc., on a :

$$cy' dm = \Sigma e \beta \frac{dm}{4},$$

$$cx' dm = \Sigma e \alpha \frac{dm}{4}.$$

Les valeurs des excentricités moyennes deviennent :

$$h' \int y\,dm = \Sigma \int e\beta \frac{dm}{4},$$

$$h'' \int x\,dm = \Sigma \int e\alpha \frac{dm}{4}.$$

Le second membre de chacune de ces équations est la moyenne de quatre intégrales.

Cette méthode a l'inconvénient d'exiger la construction d'un nombre d'intégrales trop considérables ; mais en utilisant les centres de percussion (α_2, β_2), (α_3, β_3), nous allons voir qu'on peut, sans se servir de (x', y'), réduire chaque groupe de quatre intégrales à une seule. Considérons u, u', u'', u''' comme les ordonnées des quatre points fictifs par rapport à un certain plan ; considérons $\frac{\beta dm}{4}$, $\frac{\beta' dm}{4}$, $\frac{\beta'' dm}{4}$, $\frac{\beta''' dm}{4}$ comme des forces soumises à une loi plane dont ox est l'axe neutre. La résultante de ces quatre forces est $y dm$ et s'applique au point (α_2, β_2). Soit u_2 le moment de la pression autour de ce point, en considérant u_2 comme l'ordonnée du centre de ces quatre forces, on a :

$$\Sigma u \frac{\beta dm}{4} = u_2 y dm.$$

Si nous exprimons le moment u_2 par qc_2, et si nous remplaçons le premier membre par $qcy'dm$, il vient :

$$cy'dm = c_2 y dm.$$

On trouve de même que, si qc_3 est le moment autour du point (α_3, β_3), on a :

$$cx'dm = c_3 x dm.$$

Les formules qui donnent les valeurs de h' et h'' deviennent alors :

$$\left.\begin{aligned} h' \int y\,dm &= \int c_2 y dm, \\ h'' \int x dm &= \int c_3 x dm. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Les formules (18) qui donnent le centre de rotation finie deviennent par la même transformation :

$$\left.\begin{aligned} y'' \int c\,dm &= \int c_2 y\,dm\,, \\ x'' \int c\,dm &= \int c_2 x\,dm. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Nous avons indiqué (fig. 276 à 282) les tracés graphiques qui reposent sur cette transformation. L'arc courbe est représenté en *ab* (fig. 280) ; on trace une ligne de pression ACB en prenant une poussée arbitraire; il s'agit d'en déduire la ligne de pression réelle A'C'B'. L'arc est divisé en parties égales par les points *a* ou 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou *b* ; les centres de percussion conjugués aux axes coordonnés pour chacun de ces points sont marqués par les mêmes chiffres. La figure 277 est le diagramme des inclinaisons des intégrales des y et des c ; les y sont portés sur l'axe oy, les $y + c$ sur l'axe ae; nous avons adopté deux sens d'intégration différents pour les y et les c afin de rendre l'épure plus claire. La figure 278 est le diagramme des inclinaisons des intégrales des β_2 et des c_2 ; la figure 279 est le diagramme des inclinaisons des intégrales des β_2 et des c_2 ; la figure 276 contient les diagrammes des inclinaisons des intégrales des x, des α_2, des α_2.

Toutes les intégrales sont représentées sur la figure 282 ; leurs tangentes sont parallèles ou perpendiculaires aux rayons des diagrammes dont il vient d'être question. Les dm sont portés sur l'axe AF. Les intégrales des $y\,dm$ et des $x\,dm$ sont AB et CD ; les dérivées des cordes de ces intégrales sont les coordonnées du centre de gravité (x_1, y_1).

L'intégrale des $c\,dm$ est EF, la dérivée de la corde est h.

Considérons alors les $y\,dm$ comme les abscisses ; la ligne GH est l'intégrale des $\beta_2 y\,dm$, la corde GH a pour dérivée y_2 ; la ligne KL est la courbe intégrale des $\alpha_2 y\,dm$; sa corde KL a pour dérivée x_2 ; la ligne MN est la courbe intégrale des $c_2 y\,dm$, sa corde KL a pour dérivée h'. Considérons ensuite les $x\,dm$ comme les abscisses ; la ligne PQ'Q est l'intégrale des $\beta_2 x\,dm$, sa corde PQ a pour dérivée y_2 ; la ligne RS est la courbe intégrale des $\alpha_2 x\,dm$, sa corde RS a pour dérivée x_2 ; la ligne TU'U est la courbe intégrale des $c_2 y\,dm$, sa corde

TU a pour dérivée h''. On obtient donc ainsi les projections d, l, s (fig. 276) et b, q, h (fig. 277, 278, 279) des trois pivots; on obtient aussi les projections e, u, n de leurs correspondants; on est ramené au problème du numéro 679.

Si on voulait appliquer la méthode du centre de rotation, on déterminerait le centre (x'', y'') par deux divisions graphiques :

$$x'' = \int c_3 dx m : \int c dm,$$
$$y'' = \int c_3 y dm : \int c dm.$$

Remarques diverses. — 1° Les $x dm$ changent de signe; il en résulte que les courbes intégrales PQ'Q et TU'U présentent des points de rebroussement.

2° Les polygones circonscrits aux intégrales se tracent en admettant que les sommets se trouvent au milieu de l'intervalle compris entre les ordonnées des points de contact voisins; cela est suffisamment exact si les divisions de l'arc sont suffisamment petites. Pour ne pas compliquer la figure, nous avons pris des divisions trop grandes. Considérons, par exemple, l'arc PQ; il est manifeste qu'en plaçant les sommets à égale distance des ordonnées voisines, le polygone circonscrit sera peu exact; on peut même à vue régulariser sa forme en déplaçant les sommets. Ce qu'il convient de faire en pareil cas, c'est de tracer les trois tangentes consécutives de manière qu'elles enveloppent une parabole du troisième degré. Cela revient à admettre que l'arc de la dérivée est une parabole du second degré. Il n'est pas nécessaire pour cela de tracer la dérivée; on peut employer la méthode des fausses positions. Il s'agit de tracer les polygones P*abc* et *cde* Q qui appartiennent à deux arcs d'une même parabole du troisième degré; si on se donne arbitrairement le côté ab, on peut trouver tous les autres en exprimant le contact d'ordre trois (547); mais alors le côté cQ n'a pas la direction qu'il doit avoir. Si on fait varier ab, on démontre aisément que tous les côtés pivotent autour de points fixes; on trouve le pivot du côté eQ en traçant deux solutions fausses et on obtient ensuite la vraie solution.

3° Habituellement on néglige les glissements $\gamma d\mathcal{s}$ dans la théorie des pièces courbes. Cette hypothèse eut simplifié considérablement notre théorie; nous laissons au lecteur le soin d'introduire directement cette hypothèse afin d'arriver à un exposé plus simple des propositions précédentes appliquées à ce cas particulier. Nous arriverons au même résultat en appliquant la théorie générale, mais en donnant à G une valeur infinie. On trouve alors que r' est nul; que les points fictifs se réduisent à deux, que le centre de percussion C (fig. 272) vient se placer en E sur l'axe AY, qu'il en est de même des centres de percussion.

4° Dans la plupart des applications les forces sont verticales; il en résulte certaines simplifications dans la détermination des excentricités c, c_2, c_3.

685. Cas particulier. — Supposons (fig. 284) que le centre de gravité de l'arc se trouve en A sur l'axe oy. Soit B le centre de percussion conjugué à l'axe oz; le centre de percussion conjugué à l'axe oy se transporte à l'infini. Le triangle des trois pivots devient donc la figure ABDC formée de trois lignes dont deux sont parallèles ; il doit en être de même de son correspondant A'B'D'C' dans la ligne de pression connue. Les côtés AB et A'B' se déterminent par la méthode générale ; il s'agit de faire voir comment on trouve les directions AC et A'C'.

Les formules (14) qui donnent (x_3, y_3) deviennent, en remarquant que $\int x d\mathcal{m} = 0$, $x_3 = \infty$, $y_3 = \infty$; mais on déduit :

$$\frac{y_3}{x_3} = \frac{\int \beta_3 y d\mathcal{m}}{\int \alpha_3 x d\mathcal{m}}.$$

Ce rapport est évidemment le coefficient angulaire des droites AC et BD ; il serait d'ailleurs facile de trouver directement ce coefficient en cherchant la direction conjuguée à l'axe oy dans l'ellipse centrale d'inertie de l'arc. On détermine donc aisément les droites AC et BD.

La méthode du centre de rotation finie est alors directement applicable : par ce centre on mène des parallèles aux

axes; l'antipôle de la parallèle à l'axe des x s'obtient par la méthode générale.

La méthode des trois pivots subit une modification. En effet, on reconnaît immédiatement que l'excentricité moyenne h'' est infinie ou indéterminée ; dans le premier cas, il est impossible d'obtenir par glissement une ligne de pression qui satisfasse à l'équation de moment autour de l'axe oy ; dans le second, l'équation de moment est déjà satisfaite et reste satisfaite, quel que soit le glissement. Il est aisé de vérifier directement ces propositions. Transporter la pression extrême parallèlement à elle-même, c'est introduire un couple ; ce couple produit une rotation autour du centre de gravité de l'arc ; le moment de cette rotation est nul; donc l'introduction de ce couple est sans influence sur le moment de la rotation totale.

C'est donc en introduisant une nouvelle poussée, c'est-à-dire en déplaçant le pôle P' du diagramme des résultantes que nous arriverons à trouver une ligne de pression satisfaisant à l'équation de moment autour de l'axe des y. Soit $s = P''P'$ le déplacement du pôle ; nous supposerons cette poussée additionnelle s dirigée suivant l'axe oy. Le moment fléchissant dû à cette poussée est sx, le moment de la rotation élémentaire qu'elle produit est $sxdm \times \alpha_s$; l'équation de moment est donc :

$$q \int cx'dm + s \int \alpha_s dm = 0,$$

d'où

$$\frac{s}{q} = \frac{-\int cx'dm}{\int \alpha x dm} = \frac{-c_3 \int x dm}{\int \alpha_s x dm}. \qquad (24)$$

Le rapport $s : q$ est précisément celui des deux intégrales que l'on divise par $\int x dm$ pour avoir h'' et x_s. Ce rapport détermine la direction $q P''$ et par conséquent le pôle P''.

Menons par P'' une droite P''c coujuguée à l'axe oy ; tous les pôles des lignes de pression qui satisfont à l'équation de moment autour de l'axe des y sont sur cette droite. En effet, les seules poussées additionnelles que l'on peut introduire sont celles qui produisent une rotation autour d'un point de l'axe oy ;

elles agissent toutes suivant les directrices conjuguées à cet axe. Il résulte de là qu'en passant de la ligne connue à la ligne cherchée, les directions P'c se transformeront dans les directions P''c. Donc, si nous menons A'C', B'D' parallèlement à P'c, nous obtiendrons les droites qui correspondent aux droites AC et BD. Il est alors facile d'obtenir un triangle A'B'E' qui soit le correspondant d'un triangle ABE; le problème est ramené à celui du numéro 679. Les deux directions A'B' et AB déterminent le pôle P.

§ 3. Des rotules.

686. Généralités. — Quand on introduit une rotule entre les parties adjacentes d'un arc, on assujettit la pression à passer par le centre de la rotule; c'est une condition statique nouvelle à réaliser. Mais il y a une inconnue nouvelle, c'est l'angle dont tournent les éléments d'arcs séparés par l'articulation. Soient : ψ cet angle ; a, b, les coordonnées de la rotule; si les éléments extrêmes de l'arc sont encastrés et s'il y a plusieurs rotules, on a les équations :

$$\int d\psi + \Sigma \psi = 0,$$
$$\int x' d\psi + \Sigma \psi a = 0,$$
$$\int y' d\psi + \Sigma \psi b = 0.$$

S'il n'y a qu'une rotule, on élimine l'angle ψ, on trouve deux équations qui, jointes à la condition que la ligne de pression passe par la rotule, déterminent le problème.

S'il y a deux rotules, on élimine les deux angles ψ et ψ'; on obtient une équation ; mais comme il y a deux points de passage pour la ligne de pression, le problème est déterminé.

S'il y a trois rotules les équations de la déformation ne peuvent servir qu'à trouver les angles ψ, ψ', ψ'' ; les trois points de passage déterminent la ligne de pression. Ce cas a été examiné au numéro 144; nous n'y reviendrons plus.

687. Une rotule. — Supposons (fig. 282) que nous ayons choisi le centre de la rotule comme origine des axes coordon-

nés; l'angle ψ disparaît des deux équations de moments; on trouve immédiatement sans élimination

$$\int y' d\psi = 0, \qquad \int x' d\psi = 0.$$

Or ces deux équations sont précisément deux équations qui appartiennent à l'arc solidaire ; pour satisfaire à la première, il faut amener le point E' au point E ; pour satisfaire à la seconde, il faut amener F' en F. L'équation angulaire ne doit plus être satisfaite, le point D' ne vient plus en D. Mais nous connaissons le centre O de la rotule ; par ce centre passe un côté de la ligne inconnue. Nous sommes ramenés à un problème analogue à ceux des numéros 141 et 679. La corde E'F' coupe la pression B'C' en N' ; le correspondant N du point N' se trouve sur EF. Si la corde E'F' coupait A'B' dans les limites du dessin on trouverait de même un point de passage du côté A'B' ; on serait ramené au problème des trois points (141).

On peut aussi joindre OM et déterminer une corde correspondante dans la ligne connue en opérant une concentration en deux forces passant par les points O et N. Connaissant deux groupes de cordes correspondantes, on peut déterminer le nouveau pôle ; on trace la ligne de pression en partant du point N.

688. Deux rotules. — Nous éviterons encore une élimination en prenant pour axe des x une droite passant par les centres des deux rotules ; l'équation de moment autour de cet axe est :

$$\int y' d\psi = 0.$$

Or cette équation est encore une de celles que nous avons considérées dans le cas d'un arc solidaire. Soient (fig. 283) ; AB l'axe des x qui joint les centres de deux rotules ; EE' la parallèle à la résultante de toutes les forces, dont la projection verticale est l'excentricité moyenne h'. Le point E' doit venir en E pour que l'équation de moment soit satisfaite. Menons une corde FN par le point E' dans l'angle des pressions extrêmes ; considérons cette corde comme réalisant la concentration des charges en deux forces parallèles à la résul-

tante totale passant par les points F et N; la correspondante de cette corde FN doit passer par le point E. D'autre part, les rotules A et B sont des points de passage de certains côtés MK et KN. Si nous considérons la ligne fermée NFMKN, nous voyons qu'il faut la transformer de telle manière que les côtés FN, MK, KN passent respectivement par les trois points E, A, B; c'est le problème du numéro 141. On obtient une corde A'B' qui correspond à la corde AB en opérant une concentration des forces comprises entre les rotules; les forces concentrées doivent passer par les points A et B. On obtient de même la corde E''B'' qui correspond à la corde EB quand on concentre les forces qui agissent au point N en deux résultantes passant par E et B. Le problème s'achève alors facilement.

On peut aussi chercher les points C et D qui correspondent aux points C', D' dans une concentration oblique, puis les points C'', D'' qui correspondent aux points C et D dans une concentration parallèle; le triangle ECD a pour correspondant le triangle E'C''D''.

689. Problème. — Nous supposons (fig. 282) que nous ayons déterminé les trois pivots D, E, F et leurs correspondants D', E', F' pour le cas d'un arc solidaire. Nous introduisons une ou deux rotules; nous nous proposons de trouver les nouveaux points de la ligne de pression sans recommencer les intégrations. La question à résoudre est la suivante : on prend un nouvel axe des moments (cet axe passe par la rotule ou les deux rotules); quel est le pivot de la nouvelle équation et son correspondant dans la ligne connue. Soient $o'x'$ le nouvel axe des moments (non représenté); M, le centre de percussion conjugué à cet axe; ce point M que l'on trouve au moyen des points D, E, F est le pivot de la nouvelle équation. Tirons la droite FI par le point M; pour l'arc solidaire la droite F'I' est la correspondante de la droite FI; le point M' est le correspondant du point M. Non-seulement le point M' vient en M dans le cas d'un arc solidaire, mais dans tous les cas où l'équation de moment autour de l'axe $o'x'$ doit être satisfaite. S'il fallait mener un nouvel axe des y on trouverait

de même le pivot de l'équation de moment autour de cet axe, et son correspondant dans la ligne connue.

§ 4. Arcs symétriques.

690. Charges symétriques. — Prenons (fig. 285) la ligne de symétrie comme axe des y ; désignons la direction de cette ligne sous le nom de verticale ; l'axe des x est horizontal. Nous pouvons admettre comme évident que la poussée doit être horizontale par raison de symétrie. On reconnaît d'ailleurs que les poussées horizontales sont celles qui satisfont à l'équation du moment autour de l'axe des y.

D'autres simplifications s'aperçoivent immédiatement. Le centre de gravité de l'arc se trouve sur l'axe de symétrie ; si on divise par 2 les membres de la première des équations (10), on obtient une équation de même forme donnant l'ordonnée y_1 ; les intégrales des dm et des ydm doivent être prises seulement pour la moitié de l'arc. Cette simplification s'applique aussi à la recherche du centre de percussion conjugué à l'axe ox, et au calcul des excentricités moyennes h et h'. Il est inutile de calculer les intégrales des xdm, des $x\alpha_x dm$, des $\alpha_x y dm$, des $cx'dm$ ou des $c_x x dm$.

Soient (fig. 285) A le centre de gravité de l'arc, B le centre de percussion conjugué à l'axe ox. Portons $AA' = h$, $BB' = h'$ (la charge totale est verticale par raison de symétrie). Nous supposons la poussée horizontale pour la ligne de pression connue comme pour la ligne de pression cherchée ; les cordes horizontales restent horizontales après la transformation ; donc la figure C'A'B'K' doit se transformer en CBAK. Menons une corde quelconque DE, sa correspondante sera D'E' et l'on trouve la nouvelle poussée au moyen de ces deux cordes. La pression extrême coupe la droite B'K' en un point K' dont on trouve le correspondant en K ; on part de ce dernier point pour tracer la ligne de pression effective.

Si toutes les charges étaient verticales, tous les points des deux lignes de pression situés sur une même verticale se

correspondent l'un à l'autre (134) ; de sorte qu'en traçant la corde D'E' par la fausse position F' du centre de poussée, on trouvera la vraie position F de ce centre. Mais cette construction serait inexacte, si les forces symétriques n'étaient pas parallèles, car alors les centres de poussée ne sont pas des points correspondants.

691. Charges quelconques. — On détermine le centre de gravité et le centre de percussion conjugué à l'axe des x comme au numéro précédent. Les excentricités h et h' s'obtiennent par les formules générales ; mais on peut évidemment réunir les éléments des intégrales qui se rapportent aux points symétriques de l'arc ; on trouve alors en divisant les deux membres par 2 :

$$h \int dm = \int \frac{c + c'}{2} dm,$$

$$h' \int y dm = \int \frac{c_2 + c'_2}{2} dm.$$

Les intégrales sont prises pour l'une des moitiés de l'arc, mais c, c' et c_2, c'_2 sont les excentricités aux deux points symétriques de l'arc.

La poussée n'est plus horizontale ; il faut déterminer le pôle du diagramme des résultantes par la méthode connue (685) ; on peut aussi mettre la formule (24) sous la forme :

$$\frac{s}{q} = - \frac{\frac{1}{2}\int (c_3 + c'_3)\, x dm}{\int x_3 x dm}.$$

Soient (fig. 286) A le centre de gravité de l'arc, B le centre de percussion conjugué à ox ; le triangle des trois pivots devient ABDC. Menons les droites AA', BB' parallèles à la résultante totale et ayant pour projections verticales h et h'. Soit P'P'' le déplacement s du pôle des résultantes, P''a une horizontale, P'a est la direction des côtés A'C' et B'D' qui correspondent aux côtés AC et BD. Le problème s'achève facilement.

§ 5. Arc circulaire prismatique.

699. Ellipse d'inertie d'un arc de cercle homogène. — Soit (fig. 287) C le centre de gravité de l'arc AB; par le point C menons une droite DE perpendiculaire au rayon OA; abaissons du centre O une perpendiculaire OF sur la corde AE; les droites OF et FE sont respectivement les rayons de gyration de l'arc de cercle autour des axes ox et oy.

En effet, les coordonnées du centre de gravité C de l'arc AB = Rφ ont pour valeurs :

$$x_1 = 0, \qquad y_1 = \frac{R \sin \varphi}{\varphi}.$$

On trouve aussi que le rayon de gyration a de l'arc autour de l'axe oy est donné par la formule :

$$a^2 = \frac{R^2}{2}\left(1 - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\varphi}\right).$$

Or, on a :

$$OD = OC \cos \varphi = \frac{R \sin \varphi \cos \varphi}{\varphi},$$

$$\overline{AE}^2 = 2R(R - OD).$$

En remplaçant dans cette dernière équation OD par sa valeur, on trouve :

$$\overline{AE}^2 = 4a^2, \quad \text{d'où} \quad a^2 = FE.$$

La somme des carrés des rayons de gyration de l'arc autour des deux axes ox et oy doit être égale à R^2 ; donc OF est le rayon de gyration de l'arc autour de l'axe ox; donc

$$b = OF.$$

Les longueurs a et b sont respectivement les demi-axes de l'ellipse d'inertie dirigés suivant les droites ox et oy.

698. Ellipse d'inertie de la masse fictive d'un arc prismatique circulaire. — Adoptons les mêmes axes que précédemment : soient : x, y les coordonnées d'un point de

l'arc ; Rφ l'arc qui sépare ce point du milieu. Les coordonnées des points fictifs ont les quatre valeurs contenues dans les formules :

$$\alpha = \mathrm{R}\sin\varphi \pm r\sin\varphi \pm r'\cos\varphi,$$
$$\beta = \mathrm{R}\cos\varphi \pm r\cos\varphi' \pm r'\sin\varphi.$$

On trouve :

$$\Sigma\alpha^2 ds = (\mathrm{R}^2\sin^2\varphi + r^2\sin^2\varphi + r'^2\cos^2\varphi)\,ds,$$
$$\Sigma\beta^2 ds = (\mathrm{R}^2\cos^2\varphi + r^2\cos^2\varphi + r'^2\sin^2\varphi)\,ds.$$

En intégrant et divisant par s, on trouve les carrés des rayons de gyration A et B, autour des axes oy et ox ; on a :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A}^2 &= a^2 + a'^2 + b''^2, \\ \mathrm{B}^2 &= b^2 + b'^2 + a''^2. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Dans ces formules, a, b, sont les demi-axes de l'ellipse d'inertie de l'arc de cercle homogène ; a', b' sont les mêmes demi-axes pour l'arc semblable de rayon r décrit du même centre O ; a'', b'' sont les mêmes demi-axes pour l'arc semblable de rayon r' décrit du centre O. On peut remplacer la seconde des formules (25) par la suivante :

$$\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 = \mathrm{R}^2 + r^2 + r'^2. \qquad (26)$$

694. Ellipse centrale d'inertie. — Si on transporte l'origine des axes coordonnés au centre C, on obtient l'ellipse centrale d'inertie. Le demi-axe A conserve sa valeur ; mais le carré B^2 diminue de OC^2. On trouve donc que les demi-axes A et B de l'ellipse centrale d'inertie sont donnés par les formules :

$$\mathrm{A}^2 = a^2 + a'^2 + b''^2,$$
$$\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 = \mathrm{R}^2 - \mathrm{OC}^2 + r^2 + r'^2 = \mathrm{OK}^2 + r^2 + r'^2.$$

Le point K est sur la circonférence.

§ 6. Poussée due à la pose et à la température.

695. Cas où la poussée initiale est nulle. — Nous avons supposé, dans tous les calculs qui précèdent, qu'après

la pose les deux éléments extrêmes A et B occupaient les mêmes positions relatives que si l'arc n'avait subi aucune déformation élastique. Il faut pour cela: 1° une pose tout-à-fait idéale de l'arc courbe ; 2° encastrer les sections extrêmes sur des appuis rigoureusement invariables ; 3° une température constante.

696. Poussée due aux efforts de calage. — Si les déformations qui se sont produites pendant la pose ont pour effet de produire une rotation relative ψ des éléments extrêmes, il faut ajouter une poussée positive ou négative dirigée suivant l'antipolaire du centre de la rotation ψ; cette poussée est déterminée par son moment autour du centre de gravité de l'arc ; ce moment a pour valeur :

$$\psi \int dm.$$

Si le déplacement relatif des éléments A et B est une translation, la poussée additionnelle qui passe par le centre de gravité est conjuguée à la normale à cette translation ; on la détermine par la formule 20 du numéro 676.

697. Poussée due à la température.—Supposons connue la ligne de pression à une température t_0 ; si la température varie, il faut introduire une nouvelle poussée que l'on détermine de la manière suivante. Si l'arc courbe était libre, il se dilaterait en restant semblable à lui-même ; l'élément A subirait une translation suivant AB par rapport à l'élément B supposé fixe. Donc la poussée additionnelle doit annuler cette translation ; elle est donc dirigée suivant le diamètre de l'ellipse centrale d'inertie qui est conjuguée aux cordes perpendiculaires à AB. On calcule la translation au moyen du coefficient de dilatation de la matière ; on détermine la poussée par la formule du numéro 676 ou par la méthode graphique qui s'y trouve exposée.

698. Poussée initiale. — En résumé, les calculs des paragraphes précédents ont pour but de chercher l'effet des charges sur l'arc courbe. Il faut en outre déterminer la poussée initiale, c'est-à-dire la poussée qui subsisterait, si toutes les charges, y compris le poids de l'arc, venaient à

s'annuler. Cette poussée initiale est la résultante de la poussée due à la pose et de la poussée due à la variation de température. Si à un moment quelconque, il se produisait des tassements dans les culées, il y aurait une nouvelle poussée à considérer ; cette poussée est toujours négative.

§ 7. Formes et dispositions rationnelles.

699. Arc d'égale résistance. — Faisons abstraction du poids roulant; supposons un arc symétrique soumis à des charges verticales données. La forme rationnelle de l'arc est évidemment celle d'une ligne de pression : c'est la forme d'égale résistance. On obtiendra la plus grande économie en disposant les appuis de manière à réaliser la ligne de pression centrale; car alors le moment fléchissant est nul.

Supposons d'abord l'arc encastré sans poussée initiale; soit AB (fig. 288) la moitié de l'arc; la ligne de pression centrale ne produit que des compressions, donc elle satisfait à l'équation angulaire. Mais cette ligne de pression produit un rapprochement des éléments extrêmes de l'arc. Pour faire disparaître cette translation horizontale, il faut introduire une poussée additionnelle négative, horizontale et passant par le centre de gravité de l'arc. Soit CC' l'horizontale du centre de gravité; l'introduction d'une poussée suivant cette droite aura pour effet de faire pivoter les côtés de la ligne de pression autour de points situés sur cette droite. Considérons la ligne AB comme une intégrale rapportée à l'axe CC'; la poussée q joue le rôle de base d'intégration; en introduisant la poussée $-q'$, les ordonnées de la ligne de pression augmentent dans le rapport $q : q - q'$. On trouve ainsi la courbe A'B'.

Supposons que l'on fasse reposer l'arc sur les appuis au moyen de deux rotules placées aux naissances; la ligne de pression doit alors passer par le centre B de cette rotule et satisfaire à l'équation de moment autour de la droite EB qui passe par les centres des deux rotules.

Nous connaissons déjà la ligne de pression A'B' qui satisfait à cette équation de moment ; nous trouverons toutes les autres en introduisant une poussée additionnelle passant par le centre de percussion conjugué à la droite EB. Soit D ce point ; par raison de symétrie la poussée additionnelle est horizontale. Nous prendrons donc DD' comme axe et nous ferons varier les ordonnées dans un rapport constant. Si nous choisissons ce rapport de manière que la ligne de pression passe au point B, le problème est résolu. On trouve la ligne BA".

Enfin si on plaçait trois rotules sur la fibre moyenne de l'arc, la ligne de pression serait assujettie à passer par trois points ; elle coïnciderait avec la fibre moyenne. L'état de sollicitation de l'arc serait alors indépendant de la pose, de la température, des petits mouvements des culées ; de plus, comme les moments fléchissants sont nuls, cette disposition est la plus économique. Pour toutes ces raisons, la disposition des trois rotules est la plus avantageuse.

Certains ingénieurs ont pensé que l'arc encastré est plus économique parce que l'encastrement s'oppose aux déformations. Il n'en est rien. Comparons, par exemple, les moments fléchissants au sommet de l'arc pour le cas de la poutre encastrée et pour celui de la poutre posée sur deux rotules. La ligne A'B' se déduit de la ligne AB par l'introduction d'une poussée négative q' dirigée suivant l'horizontale moyenne CC' ; le moment fléchissant était nul pour la ligne AB, il devient pour la poutre encastrée :

$$\mu = q' \times AC.$$

La courbe A"B se déduit de la courbe A'B' par l'introduction d'une poussée positive q'' ; le moment fléchissant au sommet devient :

$$\mu' = q' \times AC - q'' \times AD.$$

Mais le moment fléchissant au point B, est nul pour la ligne A"B ; on a donc :

$$q' \times CE = q'' \times DE.$$

Des valeurs de μ, μ' et de l'équation précédente, on tire :

$$\mu' = \mu\left(1 - \frac{CE}{DE} \times \frac{AD}{AC}\right).$$

Pour nous faire une idée de ce rapport, supposons que l'on puisse assimiler l'arc à un arc de cercle et que l'on néglige les rayons r et r' ; on trouve :

$$\frac{CE}{AC} = 2.$$

Le carré du rayon de gyration autour de CC' s'exprime approximativement par $\frac{R^2\varphi^4}{45}$; on a donc :

$$DC = \frac{R^2\varphi^4}{45} : CE = \frac{AE}{5}.$$

On en déduit :

$$\mu = 2\mu'.$$

L'encastrement double donc le moment fléchissant au sommet de l'arc (1).

700. Position des trois rotules. — Quand l'arc n'est sollicité que par le poids mort, la position des trois rotules n'exerce pas d'influence sur la ligne de pression. Mais quand on tient compte du poids roulant, on trouve qu'il vaut mieux adopter la disposition de la figure 289, c'est-à-dire placer une rotule C au sommet et deux autres D en des points intermédiaires à déterminer par une étude approfondie de l'ouvrage. Remarquons, en effet, que si on charge la moitié de l'arc qui n'est pas représentée, la ligne de pression sur l'autre moitié se réduit à une droite CD passant par les rotules ; en plaçant cette rotule aux naissances, cette pression produirait des moments fléchissants plus grands que si cette rotule est placée en un point intermédiaire convena-

(1) Ce résultat est conforme à l'expérience. Voyez une note spéciale que nous avons publiée aux *Annales des ingénieurs de Gand* (1882-1883).

blement déterminé. Il semblerait, d'après cela, que la droite CD doit être déterminée par la condition de s'écarter autant au-dessus qu'au-dessous de la courbe. Mais si on remarque que la pose de la partie DE est plus facile que celle de la partie centrale, on est conduit à relever davantage le point D, car les moments fléchissants dans la partie voisine du point E coûtent moins que dans la partie centrale.

LIVRE VI.

APPLICATIONS A L'HYDRAULIQUE.

CHAPITRE I.

Mouvement uniforme des liquides.

§ 1. Tuyaux de conduites.

701. Formule de Darcy. — Soient : R, le rayon du tuyau ; i, la pente de la ligne des charges par unité de longueur mesurée sur l'axe du tuyau, u, la vitesse moyenne dans une section ; α, β deux constantes. La formule de Darcy est la suivante :

$$Ri = \left(\alpha + \frac{\beta}{R}\right) u^2. \qquad (1)$$

Soit q le débit du tuyau ; on a :

$$q = \pi R^2 u \qquad (2)$$

Éliminons u de la formule de Darcy ; il vient :

$$i = q^2 \left(\alpha + \frac{\beta}{R}\right) \frac{1}{\pi^2 R^5}. \qquad (3)$$

Connaissant deux des trois quantités i, q, R, on peut trouver l'autre par la formule (3) ; on détermine alors la vitesse par l'équation (2).

709. Tableau graphique. — Posons :

$$y = q^2,$$

$$\frac{\pi^2}{x} = \left(\alpha + \frac{\beta}{R}\right) \frac{1}{R^5}.$$

L'équation (3) devient :

$$y = ix.$$

Les lignes des R sont verticales (fig. 290) ; les lignes des q sont horizontales ; les lignes des i sont convergentes. On obtient une ligne des i en portant OD = 1, DE = i et en joignant OE. On obtient une ligne des q en portant OG = 1, OF = q et en menant FB perpendiculairement à FG ; on a OB = q^2, la ligne cherchée est BA. On obtient les valeurs de x, pour différentes valeurs de R en remarquant que x est une fonction rationnelle de R et en construisant la courbe dont les coordonnées d'un point seraient x et R. On peut aussi remarquer que $\pi^2 : x$ devient un polynome entier, si on pose R' = 1 : R ; on trouve, en effet,

$$\frac{\pi^2}{x} = \alpha R'^5 + \beta R'^6.$$

Soient (fig. 291) : PO = 1 ; PA = β ; AB = α ; BL = π^2 ; OR = R ; RPCDEFGK un polygone à angles droits ; KLM un angle droit ; on a :

$$OR' = \frac{1}{R}, \quad BK = \alpha R'^5 + \beta R'^6, \quad x = BM.$$

Autres solutions. — 1° Posons $y = i$, $y = q^2$, on trouve $y = x\varphi(R)$;

2° Posons $y = i$, $x = \varphi(R)$, on trouve $y = q^2 x$;

3° Prenons la racine carrée des deux membres de l'équation (3), on a :

$$\sqrt{i} = q. \quad \frac{1}{\pi R^2}\sqrt{\frac{\alpha}{R} + \frac{\beta}{R^2}}.$$

On trouve trois tables analogues aux précédentes ;

4° Prenons les logarithmes des deux membres de l'équation (3), on trouve :

$$\log i = 2 \log q + \log \varphi(R).$$

On trouve trois dispositions en prenant pour coordonnées deux des trois termes de ces équations ; prenons, par exemple,

$$y = 2 \log q,$$
$$x = -\log \varphi(R),$$

on a :

$$\log i = y - x.$$

Les lignes des R sont verticales (fig. 292) ; les lignes des q sont horizontales ; les lignes des i sont obliques ; on les obtient en portant :

$$OC = \log \varphi(R), \quad OR = 2 \log q, \quad OD = \log i.$$

Cette table est plus élégante que les précédentes, mais plus difficile à construire.

703. Détermination de la vitesse. — La vitesse est donnée par l'équation (2) ; il est facile de construire un abaque spécial ou rattaché aux précédents, donnant la vitesse u. Il suffit de poser, par exemple, $y = q$, $x = \pi R^2$, on a $y = ux$.

On peut aussi construire un seul abaque à quatre systèmes de lignes, les lignes des i, u, q, R ; on peut alors résoudre les six problèmes que l'on peut poser sur la détermination des quantités i, u, q, R, connaissant deux d'entre elles. Malheureusement les lignes d'une des quatre variables sont courbes (1). Nous ferons remarquer que le seul problème que

(1) Voyez une table de ce genre dans l'hydraulique de M. Colliguon ; les lignes des q sont courbes mais presque droites.

l'on ne puisse résoudre au moyen de l'abaque des i, q, R est celui où l'on donne i et u; ce problème ne se présente jamais; c'est pour cela qu'il nous a paru plus simple d'éliminer la vitesse. Cette observation s'applique aussi au paragraphe suivant.

§ 2. Mouvement uniforme des eaux courantes.

704. Formule de Bazin. — Soient : i, la pente superficielle; R le rayon moyen, c'est-à-dire la section mouillée ω, divisée par le périmètre mouillé χ; u, la vitesse; on a d'après Bazin :

$$Ri = au^2, \tag{1}$$

$$a = \alpha + \frac{\beta}{R}. \tag{2}$$

Les coefficients α et β dépendent de la nature des parois. Mettons la formule de Bazin sous la forme :

$$i = \left(\frac{\alpha}{R} + \frac{\beta}{R^2}\right) u^2. \tag{3}$$

On peut construire un abaque des valeurs de i, u et R; tous les systèmes employés pour la formule de Darcy s'appliquent à la formule de Bazin (1). Mais ces abaques n'auraient pas grande utilité, car les problèmes de la pratique consistent surtout à trouver la pente, le débit ou la section connaissant deux de ces éléments. Si nous éliminons la vitesse u de l'équation (3) par la formule $u = q : \omega$, on trouve :

$$\omega^2 = \left(\frac{\alpha}{R} + \frac{\beta}{R^2}\right) \frac{q^2}{i}. \tag{4}$$

C'est un tableau des trois variables ω, R et $q^2 : i$ qu'il est utile de construire.

---

(1) En portant log i et log u en coordonnées, on trouve l'abaque de la planche 2 de l'hydraulique de M. Collignon.

705. Tableau graphique. — Posons, par exemple,

$$y = \omega, \tag{5}$$

$$x = \frac{q}{\sqrt{i}}, \tag{6}$$

On trouve :

$$y = x\sqrt{\frac{\alpha}{R} + \frac{\beta}{R^2}}. \tag{7}$$

Les lignes des ω sont des horizontales telles que GF (fig. 293) ; les lignes des $q : \sqrt{i}$ sont des verticales telles que CF ; les lignes des R sont des lignes telles que OF passant par l'origine des coordonnées. Pour construire les lignes des R, on construit le polynome (en 1 : R) (fig. 294).

$$AB = \frac{\alpha}{R} + \frac{\beta}{R^2},$$

on porte AC = 1 ; on décrit une circonférence sur CB comme diamètre ; on a ;

$$AD = \sqrt{\frac{\alpha}{R} + \frac{\beta}{R^2}};$$

c'est le coefficient angulaire de la ligne des R. On peut aussi déterminer le centre du cercle CDB par la formule :

$$AO = \frac{\alpha}{2R} + \frac{\beta}{2R^2} - \frac{1}{2}.$$

On évite la division $q : \sqrt{i}$ en construisant un abaque des valeurs de i, q, et $q : \sqrt{i}$. Soient $y'ox$ (fig. 293) les axes coordonnés ; posons : $x = q : \sqrt{i}$, $y = q$; on a : $y = x\sqrt{i}$; BA est une ligne des q, si GB = q ; OE est une ligne des i, si DE = $\sqrt{i}$; on trouve $q : \sqrt{i} =$ OC.

Il est très utile de trouver ω et χ sans faire la division $\chi = \omega : R$. A cet effet, on construit un troisième tableau $y''o''x''$ en posant : $y = \omega$, $x = \chi$; on a $y = Rx$. Les lignes des R des deux tableaux yox et $y''o''x''$ se coupent sur une

courbe de rebroussement. Cette courbe permet de passer de la ligne OF à la ligne O″M et l'on a :

$$\chi = O''N.$$

Examinons successivement les trois problèmes que l'on peut résoudre par ces tableaux graphiques :

1° On donne q et i, trouver la section. On entre dans le tableau $y'ox$ par les points B et E, on aboutit au point A en suivant la ligne des q et celle des i. On entre ensuite dans le tableau yox en suivant la ligne verticale AF. Tout point F de cette verticale fournit une solution ; si du point F on passe au point M en suivant OKO″, on trouve $\chi = O''N$, $\omega = O''P$.

2° On donne la section, le débit q, trouver i. On détermine ω par une intégration et χ par une rectification. On entre dans le tableau $y''o''x''$ par les points N et P, on aboutit au point M. On passe du point M au point F. En partant des points F et B, on aboutit au point A ; on suit la ligne OA jusqu'au point E ; on lit la pente sur l'échelle DE des $\sqrt{i}$.

3° On donne la section, la pente i, trouver le débit. On opère comme précédemment jusqu'au moment où l'on trouve le point F ; on part alors des points F et E, on aboutit au point A ; on a OB $= q$.

706. Section trapèze. — Lorsque la section a une forme trapèze et que l'inclinaison des talus est constante, on peut éliminer les variables ω et χ en introduisant les deux dimensions de la section trapèze. Soient : λ, la largeur moyenne ; H, la hauteur de la section ; on a :

$$\omega = \lambda H, \quad \chi = \lambda + nH.$$

Le coefficient n dépend de l'inclinaison des talus.

Dans le tableau $y''o''x''$, on a :

$$y = \lambda H, \quad x = \lambda + nH.$$

Ces deux équations ont précisément la forme des équations 2 et 3 du numéro 205. Éliminons successivement λ et H, nous trouvons :

lignes des λ, $\quad \lambda^2 - \lambda x + ny = 0,$ (8)

lignes des H, $\quad nH^2 - Hx + y = 0.$ (9)

Nous savons (205) que ces deux systèmes du second degré enveloppent une même parabole ; on trouve, en effet, pour enveloppe commune :

$$y = \frac{x^2}{4n}.$$

Si des équations (8) et (9), on tire les valeurs de x et y, on trouve pour dénominateur $\lambda - n\mathrm{H}$; donc la solution étrangère est ici :

$$\lambda = n\mathrm{H}. \qquad (10)$$

On reconnaît facilement que si l'équation (10) est satisfaite, la ligne des λ coïncide avec celle des H ; d'après le tableau graphique, ω et χ seraient indéterminés ; mais on sait qu'il faut alors se placer au point de contact de la ligne commune avec son enveloppe ; dans les applications, on trouve presque toujours que λ est plus grand que $n\mathrm{H}$ et on ne rencontre jamais cette difficulté.

Soit à construire la ligne des λ. Le système auxiliaire (205) qui détermine les intersections d'une ligne λ avec une ligne λ_0 a pour équation :

$$x = \lambda + \lambda_0.$$

Construisons deux lignes des λ ; soient, par exemple, $\lambda = 0$, $\lambda = 5$; on détermine les points où ces lignes sont coupées par les autres lignes par les formules :

ligne $\lambda = 0$, $\qquad x = \lambda$,

ligne $\lambda = 5$, $\qquad x = \lambda + 5$.

On peut alors tracer toutes les lignes des λ. On opère de même pour tracer les lignes des H. Nous avons supposé dans la figure, $n = 1$, et nous avons représenté les lignes $\lambda = 5, 10, 15, 20, 25$ et les lignes $\mathrm{H} = 1, 2, 3, 4, 5$.

Les trois problèmes que nous avons résolus au numéro précédent se modifient comme suit :

1° On donne q et t, trouver λ et H. On entre dans le tableau par les points B et E, et on aboutit au point M ; les deux lignes des λ et H qui passent par le point M déterminent

λ et H soit par une lecture, soit graphiquement sur les axes des λ et des H. En réalité, il y a deux solutions pour un même point M, mais en fait, il n'y en a qu'une qui soit pratique. En déplaçant le point F sur la verticale CF, on trouve une infinité de solutions parmi lesquelles on peut choisir la plus convenable.

2° On donne λ, H, q, trouver i. On entre dans la table par les lignes des λ et des H; on aboutit au point M; on passe du point M, au point F et au point A.

3° On donne λ, H, i trouver q. On opère comme au problème précédent.

CHAPITRE II.

Mouvement permanent varié.

§ 1. Déversoirs.

707. Déversoir libre. — Soient : h, la hauteur du niveau d'amont au dessus de la crête du barrage ; l, la largeur ; q, le débit ; on a :

$$q = 0{,}57\, lh\sqrt{2gh}.$$

Portons (fig. 295) la hauteur h en abscisse et le débit par unité de largeur en ordonnée; on trouve la courbe :

$$y = 0{,}57\, x\sqrt{2gx} \quad \text{ou} \quad y^2 = \frac{x^5}{a}.$$

Prenons a comme unité et posons $z = y : x$, on trouve :

$$z^2 = x.$$

La courbe des z est une parabole OG que l'on construit par une méthode connue. On a alors $y = zx$; on obtient donc la courbe des y par une multiplication ; on trouve la courbe OA. La détermination des bases de multiplication n'offre aucune difficulté si on détermine un point K de la courbe par calcul ; en prenant OK'' puis OK' comme bases, on est certain que la courbe passera par le point K. On peut remplacer la courbe OAK par une échelle DH des valeurs de $q : l$ pour une série de valeurs de h.

Connaissant le débit par unité de largeur, on obtient le débit cherché en multipliant par l ; on évite cette multiplication en construisant un nouveau tableau graphique $y'o'x'$. Pour y arriver, posons $x = l$, $y = q$, on a :

$$y = \frac{q}{l} x.$$

Soit O'D = 1 ; les lignes des $q : l$ s'obtiennent en joignant l'origine O' aux divisions de l'échelle DH.

Soient, par exemple, h = OB, l = O'F ; on a :

$$\frac{q}{l} = \text{AB} = \text{CD}, \quad q = \text{EF}.$$

708. Déversoir noyé. — Soient : h' la différence entre le niveau d'amont et le niveau d'aval ; a, la hauteur du niveau d'aval au-dessus de la crête du barrage ; le débit est donné par la formule :

$$q = 0{,}57\, l h' \sqrt{2gh'} + 0{,}62\, la \sqrt{2gh'}.$$

Le premier terme se détermine par le tableau graphique du numéro précédent. On construit facilement un tableau graphique donnant les valeurs du second terme.

709 Autre formule. — Soient : h, la hauteur du niveau d'amont au-dessus de la crête du barrage ; α, le rapport $h - a : h$; q' le débit du barrage non noyé ; q le débit cherché ; on a :

$$q = q' \varphi(\alpha).$$

On peut déterminer la fonction φ au moyen de la formule précédente ; mais il vaut mieux déterminer cette fonction par une courbe en utilisant les expériences de Lesbros. On trouve dans le cours d'hydraulique de Bresse, la formule :

$$q = rlh \sqrt{2g(h - a)},$$

or

$$q' = 0{,}57\, lh \sqrt{2gh}.$$

Donc

$$\varphi = \frac{r}{0{,}57} \sqrt{\alpha}.$$

Le coefficient r est fonction de α, et a été déterminé par

l'expérience ; prenons comme coordonnées $y = r$, $x = \sqrt{\alpha}$, et construisons la courbe $(x\ y)$ par points au moyen du tableau des valeurs de r; on a alors :

$$\varphi = \frac{yx}{0{,}57}.$$

On obtient la courbe des valeurs de φ par une multiplication ; on en déduit l'échelle des valeurs de φ.

Construisons d'abord (fig. 296) un tableau des variables h, a, α; posons $x = a$, $y = h$, on a :

$$\alpha = \frac{y - x}{y} \text{ d'où } y = \frac{x}{1 - \alpha}.$$

Si on prend $y = 1$, on a $x = 1 - \alpha$. Soit donc OF = FC = 1 ; portons CD = α ; la ligne des α est OD.

Construisons ensuite un second tableau $y'ox'$ des variables q, q', α. Posons $x = q'$, $y = q$, on a :

$$y = x\varphi(\alpha).$$

Soit O'N = 1 ; portons NM = $\varphi(\alpha)$; joignons O'M ; O'M est la ligne des α. Les lignes de α des deux abaques se coupent sur une courbe de rebroussement.

Soient, par exemple, a = OA, h = AB, q' = O'L ; suivons la ligne OBGH ; on a q = O'K.

710. Débit moyen. — Montrons par un exemple l'utilité des tableaux graphiques. Nous avons eu à résoudre le problème suivant : déterminer les débits moyens par jour, par mois, par année, d'un barrage à poutrelles et à vannes. Le barrage présentait cinq ouvertures ; les cotes d'amont et d'aval, le nombre de vannes et de poutrelles enlevées étaient indiqués dans un registre ; il eut fallu appliquer environ 6000 fois la formule des déversoirs. L'emploi des tableaux graphiques nous a permis de résoudre ce problème moyennant un travail personnel de quelques heures et l'aide d'un commis-dessinateur.

Nous avons fait confectionner une sorte de profil en long dans lequel on portait les jours en abscisses, et en ordonnées, les cotes d'amont et d'aval, ainsi que les niveaux des cinq barrages.

Le commis, dressé à l'emploi des tableaux graphiques, a construit un second profil en long dont les ordonnées étaient les débits. Une ligne intégrale a donné les qdt ; les inclinaisons des cordes de cette intégrale nous a donné les débits moyens que l'on nous demandait.

§ 2. Canaux découverts.

711. Équation du mouvement permanent.— L'équation du mouvement permanent est :

$$dz = d\frac{u^2}{2g} + \left(\alpha + \frac{\beta}{R}\right)\frac{u^2}{R}\,ds.$$

Dans cette formule, ds est la longueur d'un élément du canal, dz est la pente superficielle ; les autres quantités ont la même signification que dans la formule de Bazin. Pour une longueur finie, on a :

$$\Delta z = \Delta\frac{u^2}{2g} + \int\left(\alpha + \frac{\beta}{R}\right)\frac{u^2}{R}\,ds.$$

712. Tracé de l'axe hydraulique. — Dans les applications habituelles, le premier terme du second membre est négligeable ; décomposons la longueur du canal en tronçons assez petits (1 kilomètre, par exemple) pour pouvoir remplacer les sections variables par une section moyenne ; on aura pour un pareil tronçon :

$$\frac{\Delta z}{\Delta s} = \left(\alpha + \frac{\beta}{R}\right)\frac{u^2}{R}.$$

C'est l'équation du mouvement uniforme. On peut donc tracer l'axe hydraulique en le remplaçant par une série de droites dont la pente se calcule au moyen des tableaux graphiques qui représentent la formule du mouvement uniforme. La détermination de chacune de ces droites exige cependant quelques tâtonnements, parce que la hauteur d'eau dans la section moyenne n'est connue que par approximation. Si la section subissait des variations considérables, il faudrait tenir compte du terme des vitesses, en ajoutant à

la pente donnée par la formule du mouvement uniforme, la valeur du terme :

$$\Delta \frac{u^2}{2g} = \frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_0^2}{2g}.$$

Dans les cours d'eau naturels, la forme du lit est presque toujours irrégulière; on détermine, par les profils en travers, les valeurs de ω et χ pour un niveau d'eau aussi approché que possible de l'axe hydraulique que l'on cherche; on trace l'intégrale des ωds et des χds; on obtient les valeurs moyennes de ω et de χ, par les inclinaisons des cordes de ces intégrales; on substitue aux sections existantes une section trapèze qui réalise ces valeurs moyennes.

Il ne faut pas se faire illusion. L'axe hydraulique que l'on calculera par la méthode précédente ne sera jamais complètement exact. Ce serait aussi une erreur de croire qu'on s'approchera de la vérité en perfectionnant le calcul mathématique de l'axe hydraulique. La principale cause d'erreur est l'incertitude des coefficients α et β. Il ne paraît pas possible de déterminer des coefficients qui puissent s'appliquer à tous les cours d'eau. Est-il possible, en effet, de tenir compte par une formule de la régularité plus ou moins grande d'un cours d'eau, de la ténacité avec laquelle les riverains défendent leurs propriétés en construisant des épis qui constituent quelquefois un obstacle à l'écoulement des eaux, etc.

La véritable solution pratique n'est pas de compliquer les formules, mais d'éliminer les coefficients en utilisant les faits observés sur le cours d'eau que l'on étudie. Dans ce qui suit nous adopterons la formule de Prony $Rt = au^2$; a est un coefficient que nous éliminerons au moyen des observations; nous arriverons ainsi à des résultats plus certains que par l'emploi de formules plus complètes mais dont les coefficients sont entachés d'erreur.

718. Propagation des relèvements et des abaissements. — On produit un abaissement ou un relèvement x_0 en un point d'un cours d'eau; cet abaissement ou ce relève-

ment se propage vers l'amont suivant une loi compliquée; mais dans le cas particulier où x_0 est petit relativement à la profondeur du cours d'eau, nous allons démontrer que cette loi s'exprime approximativement par la formule suivante :

$$x_1 = x_0 e^{-\frac{3z}{H}} \qquad (1)$$

x_1, x_0 sont les abaissements ou relèvements en deux points ; z est la différence de niveau entre ces deux points ; H dépend de la section transversale du cours d'eau : dans les cours d'eau de grande largeur H est la profondeur moyenne, c'est-à-dire la section mouillée divisée par la largeur à la surface de l'eau ; dans les autres cas, on détermine la profondeur moyenne h, on développe le périmètre mouillé sur les talus ou plus exactement sur les tangentes au profil à la surface de l'eau, on détermine les profondeurs h' et h'' que l'on atteint de cette manière et on pose :

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{h} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{h'} + \frac{1}{h''}\right). \qquad (2)$$

Démonstration. — Nous considérons le cas ordinaire où les vitesses du cours d'eau diffèrent assez peu pour que l'on puisse appliquer la formule de Prony ; nous la mettrons sous la forme :

$$i = a \frac{\chi}{\omega^3} q^2. \qquad (3)$$

Supposons que dans une section, les eaux soient relevées d'une quantité x positive ou négative mais assez petite pour que l'on puisse calculer δi comme une différentielle; on trouve :

$$\frac{\delta i}{i} = \frac{\delta \chi}{\chi} - \frac{3\delta\omega}{\omega}. \qquad (4)$$

Considérons une longueur ds du cours d'eau; on a évidemment :

$$\delta i = -\frac{dx}{ds}, \qquad i = \frac{dz}{ds}.$$

Soient : l, la largeur de la section à la surface de l'eau ; α', α'' les angles des talus avec l'horizon ; on a :

$$\delta\chi = \frac{x}{\sin\alpha'} + \frac{x}{\sin\alpha''},$$

$$\chi = \frac{h'}{\sin\alpha'} = \frac{h''}{\sin\alpha''},$$

$$\delta\omega = lx,$$

$$\omega = lh.$$

L'équation (4) devient :

$$-\frac{dx}{dz} = x\left(\frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} - \frac{3}{h}\right).$$

ou

$$\frac{dx}{x} = \frac{3\,dz}{\mathrm{H}}.$$

En intégrant cette équation, et en remplaçant H par une valeur moyenne, on obtient :

$$l\frac{x_0}{x_1} = \frac{3z}{\mathrm{H}}.$$

On tire de là la formule (1).

Extensions. — 1° On peut étendre cette formule au cas où il y a une nappe d'inondation. Soient : q, le débit de la rivière et q', le débit de la nappe d'inondation. On peut appliquer le calcul précédent aux deux parties de la section mouillée ; mais il faut remarquer que les débits varient de δq et de $\delta q'$: on trouvera :

Pour la rivère

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{3x}{\mathrm{H}} + \frac{2\delta q}{q},$$

pour la nappe d'inondation

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{3x}{\mathrm{H}} + \frac{2\delta q'}{q'}.$$

Éliminons δq et $\delta q'$, au moyen de la relation

$$\delta q + \delta q' = 0.$$

On trouve

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{3x}{H''}.$$

En posant

$$\frac{1}{H''} = \frac{\frac{q}{H} + \frac{q'}{H'}}{q + q'}. \qquad (6)$$

On en déduit la formule

$$x_1 = x_0 e^{-\frac{3z}{H''}}.$$

2° On peut calculer par une formule analogue la propagation d'un relèvement ou d'un abaissement au-delà du remons d'un pont. Soient : $z = \alpha \frac{Q^2}{\omega^2}$, la hauteur du remons ; x_0, x_1 les relèvements à l'aval et à l'amont du pont ; on trouve :

$$x_1 = x_0 e^{-\frac{2z}{h}}.$$

3° Dans le mouvement varié la dénivellation entre deux points de l'axe hydraulique comprend deux parties : z', la différence des hauteurs dues aux vitesses extrêmes et z'' la perte de charge. On trouve alors :

$$x_1 = x_0 e^{-\frac{2z'}{h} - \frac{3z''}{H}}.$$

4° Lorsque la hauteur x_0 est trop grande pour pouvoir employer les formules que nous venons de démontrer, on peut diviser cette hauteur en plusieurs parties ; dans chacun des calculs, on obtient un résultat plus exact en remplaçant z, h, H par les moyennes entre les valeurs de ces quantités déterminées avant et après le relèvement.

714. Tableau graphique. — La formule qui précède peut être représentée par un tableau graphique. Soit yox un premier système d'axes ; posons :

$$x = H, \qquad y = z ;$$

on a :

$$y = \frac{x}{3} \times \frac{3\varepsilon}{H}.$$

Pour $x = 3$, on a $y = \frac{3\varepsilon}{H}$.

Soit $OA = H$, $AB = \varepsilon$, $OO' = 3$; on a $O'D = \frac{3\varepsilon}{H}$.

Mettons la formule (1) sous la forme :

$$\log x_0 = \log x_1 + \frac{3\varepsilon}{H}.$$

Soit $y'ox'$ un nouveau système d'axes coordonnés, et posons :

$$x = \log x_1, \qquad y = \log x_0;$$

on a :

$$y = x + \frac{3\varepsilon}{H}.$$

On trouve la ligne des $3\varepsilon : H$ en menant par D une parallèle à la bissectrice de l'angle des axes coordonnés. Soit $O'F = \log x_0$, on aura $O'G = \log x_1$; la graduation permettra de lire immédiatement la valeur de x_1.

715. Influence d'une faible diminution du débit. — Le débit q subit une faible diminution δq, sur une certaine étendue du canal; quel est l'abaissement x réalisé à l'amont.

On trouve alors :

$$\frac{dx}{d\varepsilon} = -\frac{3x}{H} - \frac{2\delta q}{q}.$$

En intégrant cette équation, on trouve :

$$1 + \frac{3x}{2H}\frac{q}{\delta q} = e^{\frac{3\varepsilon}{H}}.$$

Remplaçons l'exponentielle par le rapport $x_0 : x_1$ des deux abaissements dont l'un est arbitraire ; on trouve :

$$x = \frac{2H}{3}\frac{\delta q}{q} \cdot \frac{x_0 - x_1}{x_1}.$$

La même formule s'appliquerait au cas d'une faible augmentation du débit.

716. Autre méthode. — Déterminons le coefficient a de la formule du mouvement uniforme, pour chaque tronçon par l'observation d'une crue ; la formule du mouvement uniforme appliquée à d'autres circonstances sera d'autant plus exacte que les circonstances seront peu différentes.

CHAPITRE III.

Intégration graphique des équations différentielles du premier ordre.

§ 1. Méthode générale.

717. Courbes isoclines. — Soit :

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \qquad (1)$$

une équation différentielle du premier ordre ; considérons x, y comme coordonnées ; nous nous proposons de tracer graphiquement les courbes représentées par cette équation. Pour y arriver, égalons, dans l'équation (1), la dérivée à une constante α ; nous obtiendrons l'équation

$$F(x, y, \alpha) = 0. \qquad (2)$$

La courbe représentée par l'équation (2) est le lieu des points où l'intégrale a la même inclinaison α ; pour cette raison, les courbes (2) seront appellées *courbes isoclines*.

Soient (fig. 298) 1, 2, 3, 4, les courbes isoclines pour les valeurs de α représentées par les rayons 01, 02, 03, 04, du diagramme des inclinaisons.

Soit A un point pris arbitrairement sur la première courbe ; menons les droites A, B, C, D parallèlement aux rayons

01, 02, 03, 04; prenons les sommets du polygone plus ou moins au milieu des intervalles qui séparent les courbes isoclines. Si les courbes isoclines étaient infiniment rapprochées, on obtiendrait comme limite une courbe satisfaisant à l'équation différentielle (1). En prenant des courbes isoclines assez rapprochées, on obtiendra l'intégrale avec une approximation satisfaisante, on obtiendra plus d'approximation en traçant les tangentes de manière qu'elles enveloppent une parabole d'un certain degré, ce que l'on peut faire par quelques tâtonnements, en utilisant les propriétés des polygones d'intégration.

Il arrive souvent qu'au même point A, on peut tirer plusieurs valeurs de la dérivée y'; à chacune d'elles correspond une courbe isocline passant par le point A et une intégrale. Ces intégrales sont liées entre elles comme les racines de l'équation en y; il sera presque toujours difficile ou impossible de les séparer dans l'équation intégrale.

Supposons que le premier point A se déplace sur une verticale; son ordonnée y_0 figurera comme constante arbitraire; l'ordonnée y d'un point de l'intégrale s'exprimera par :

$$y = f(y_0 x).$$

Cette équation est l'intégrale générale de l'équation; en donnant une valeur à y_0, on trouve une solution particulière.

718. Courbe des inflexions. — *Lorsque l'intégrale touche une courbe isocline, le point de contact est un point d'inflexion de l'intégrale.*

---

(1) Nous employons ici et dans ce qui va suivre, le langage des infiniment petits dans ce qu'il a de plus figuré. Il est bien facile de traduire plus rigoureusement les mêmes pensées. Dans le cas qui nous occupe, on dira : soit $y' = \varphi(xy)$ une des valeurs de la dérivée, tirée de l'équation différentielle; on trace un polygone tel que $y' \overset{=}{>} \varphi(xy)$; on en trace un autre tel que $y' \overset{=}{<} (xy)$; on démontre que ces deux polygones ont ont même limite qui satisfait à l'équation $y' = \varphi(xy)$.

En effet, partons de ce point de contact et déplaçons-nous infiniment peu sur l'intégrale; nous ne nous écarterons de la courbe isocline tangente que d'une quantité d'ordre supérieur au premier ; on a donc au point de contact $dy' = 0$ ou $d^2y = 0$. La courbe intégrale a donc avec sa tangente un contact d'ordre supérieur au premier et se trouve toute entière du côté de la convexité de la courbe isocline ; elle rencontrera une courbe isocline voisine, et située du même côté, en deux points où l'intégrale aura même inclinaison; la courbe intégrale présente donc un point d'inflexion.

Menons à chaque courbe isocline α, une tangente d'inclinaison α ; le lieu des points de contact est une courbe CHGP ; c'est le lieu des points d'inflexion de l'intégrale ; nous l'appellerons *courbe des inflexions*. Soit ABCD une intégrale qui coupe la courbe des inflexions au point C; au point C l'intégrale touche la courbe isocline 4 et présente un point d'inflexion ; l'intégrale coupe la courbe isocline 3 en deux points B et D ; les éléments B et D de l'intégrale sont parallèles.

Supposons que l'intégrale touche une courbe isocline au point d'inflexion R de cette courbe. Il est d'abord facile de démontrer que la courbe des inflexions touche cette même courbe isocline au point d'inflexion R. En effet, soient : S', un point infiniment voisin de la courbe des inflexions ; S'S la courbe isocline qui passe par ce point ; R' le point d'inflexion de cette courbe S'S. On pourra toujours trouver un point S tel que les tangentes à la courbe isocline en S et en S' soient parallèles ; les deux points S et S' se trouvent sur la courbe des inflexions ; or ces deux points viennent se confondre en R quand la courbe SS' se rapproche de R ; donc la courbe des inflexions touche la courbe isocline au point R.

Menons l'intégrale qui passe par le point R ; une intégrale GHK voisine de celle que nous cherchons, présente deux points d'inflexion G et H ; au point R, ces deux points viennent se confondre ; donc il n'y a plus d'inflexion en R. Il est facile de démontrer qu'en ce point R, l'intégrale a, avec sa tangente, un contact du troisième ordre. Nous démontre-

rons d'abord comme précédemment que le contact dont il s'agit est au moins du second ordre. Mais alors, si on se déplace infiniment peu sur l'intégrale à partir du point R, on peut affirmer que l'on s'écartera de la courbe isocline d'une quantité d'ordre supérieur au second; donc on a $d^2y' = 0$ ou $d^3y = 0$; c'est ce qui caractérise le contact du troisième ordre de l'intégrale avec sa tangente.

On obtient l'équation de la courbe des inflexions en différentiant l'équation des courbes isoclines et en posant $dy = \alpha dx$; on trouve :

$$\frac{dF}{dx} + \alpha \frac{dF}{dy} = 0. \qquad (3)$$

En éliminant α entre les équations (2) et (3), on obtiendrait la courbe cherchée.

719. Courbe des rebroussements. — *L'enveloppe des courbes isoclines est le lieu géométrique des points de rebroussement de l'intégrale.*

Soit E un point de l'enveloppe des couches isoclines ; si nous partons de ce point pour décrire l'intégrale, nous rencontrons deux sortes de courbes isoclines ; les unes touchent leur enveloppe à droite du point E, les autres à gauche; nous trouvons donc en quittant le point E deux racines de y' et chacune d'elles donnent une courbe intégrale. On trouve ainsi les branches EF et EGH. En E, les deux valeurs de y' sont égales, les deux branches se touchent et constituent un point de rebroussement. Si nous partons du point F, nous trouvons en F deux ou plusieurs valeurs de y' ; nous choisirons l'une d'elles et nous suivrons l'intégrale FE ; en E deux racines de y' sont égales ; au-delà de l'enveloppe ces deux racines disparaissent ; l'analyse donnerait sans aucun doute des racines imaginaires de y'. L'enveloppe constitue donc une barrière que la courbe intégrale FE ne peut franchir. Mais le point qui décrit l'intégrale peut en rebroussant chemin, suivre la courbe EGH qui correspond à la valeur de y' que l'on avait primitivement écartée. Au point E, on passe continûment d'une racine à une autre parce qu'en ce point ces deux racines sont égales.

En général, l'enveloppe est la ligne des intersections successives des courbes isoclines ; cependant, il peut arriver qu'une courbe isocline $y' = \alpha$ enveloppe, dans le sens vulgaire du mot, la portion du plan occupée par les courbes isoclines voisines $y' = \alpha \pm h$. Il est bien évident qu'en partant de la courbe $y' = \alpha$, on trouvera deux racines $y' = \alpha \pm h$; chacune de ces racines donne une branche de l'intégrale ; les deux branches constituent un point de rebroussement situé sur la courbe isocline enveloppe.

790. Surface des inclinaisons. — Représentons y' par une ordonnée perpendiculaire au plan ; l'équation $F(x, y, y') = 0$ représente une surface que nous appellerons *surface des inclinaisons* ; les courbes isoclines sont les projections des courbes de niveau ; l'enveloppe des courbes isoclines est le contour apparent de la surface : nous obtiendrons ce contour apparent en exprimant que le plan tangent est vertical ; nous trouverons :

$$dy' = \infty , \tag{4}$$

Or on a :

$$\frac{dF}{dx}\,dx + \frac{dF}{dy}\,dy + \frac{dF}{dy'}\,dy' = 0.$$

L'équation (3) peut être remplacée par le système :

$$\frac{dF}{dy'} = 0. \tag{5}$$

$$\frac{dF}{dx} = \infty \text{ ou } \frac{dF}{dy} = \infty . \tag{6}$$

Les équations (6) ne donnent aucun résultat si la fonction $F(x, y, y')$ est entière ; le plus souvent on pourra mettre l'équation différentielle sous une forme telle que l'équation (5) soit seule à considérer. Remarquons aussi que l'on peut concevoir une surface telle que les points de contact des plans tangents verticaux ne soient pas contour apparent ; l'équation pourrait dans ce cas définir le lieu des points où la courbure de l'intégrale est infinie sans qu'il y ait rebroussement.

Le contour apparent de la surface des inclinaisons sépare la partie visible de la partie invisible ; les courbes isoclines sont donc divisées en partie visible et invisible, par le point

où elles touchent leur enveloppe. Considérons l'intégrale comme la projection d'une courbe tracée sur la surface des inclinaisons et que nous appellerons intégrale de l'espace. Par tout point de la surface des inclinaisons passe une de ces intégrales ; on peut définir l'intégrale de l'espace en disant que c'est la trajectoire d'un point qui décrit, sur la surface des inclinaisons, des éléments tels que leur plan projetant tourne autour de l'ordonnée y' de façon que l'inclinaison de ce plan sur l'axe des x soit égal à y'. Les points d'inflexion des intégrales correspondent aux éléments horizontaux des intégrales de l'espace, car en ces points d'inflexion, y' passe par un maximum ou un minimum ; on prouve ainsi que les éléments infléchis des intégrales touchent les courbes isoclines, propriété déjà démontrée autrement (718). L'élément de l'intégrale de l'espace qui traverse le contour apparent est vertical ; car cet élément est l'intersection d'un plan projetant vertical avec un plan tangent vertical L'intégrale de l'espace ne présente donc pas de singularité en ce point ; mais en projection, l'élément vertical se transforme en un point de rebroussement séparant la partie visible de la partie invisible de l'intégrale.

721. Point singulier du plan — La courbe des inflexions peut toucher l'enveloppe des courbes isoclines en un point P ; dans l'espace, la courbe des inflexions traverse le contour apparent et passe de la partie visible à la partie invisible de la surface des inclinaisons. Les intégrales présentent dans les environs du point P des singularités particulières.

Si on se place en un point N de la courbe des rebroussements, on trouve un point de rebroussement de l'intégrale ; la branche invisible de l'intégrale subit une inflexion près du point de rebroussement. Si on se place en un point M, on trouve un autre point de rebroussement. Enfin, si on part d'un point Q du plan, on trouve une intégrale visible et une intégrale invisible se coupant au point Q. Si on fait converger les trois points M, N, Q vers le point P, on reconnaît immédiatement que l'on obtiendra deux intégrales tangentes à la

courbe enveloppe au point P ; car les points de rebroussement M et N viennent s'opposer par le sommet et d'autre part les deux branches qui se coupent en Q deviennent tangentes quand le point Q vient en P. Si l'on part du point P vers la droite, on voit que l'on peut tracer deux intégrales, l'une visible, l'autre invisible ; si on part du point P vers la gauche, on peut aussi tracer deux intégrales ; ces quatre parties de courbes constituent en P un point multiple, comme nous l'avions déjà prévu par les considérations précédentes.

Si l'on considère les intégrales de l'espace, on reconnaît que ces courbes tournent leur convexité vers le point P. Il y a 4 séries d'intégrales à considérer ; la première série est située au-dessus du contour apparent, la seconde série est située au-dessous de ce contour ; la troisième et la quatrième séries traversent le contour apparent. Ces quatre séries de courbes occupent par rapport au point P des positions qui rappellent celles qu'occupent les branches des hyperboles semblables et concentriques par rapport à leur centre. De même qu'en se rapprochant de leur centre les quatre branches de ces hyperboles ont pour limite leurs asymptotes, de même les quatre séries d'intégrales de l'espace, en se rapprochant du point P, ont pour limites deux courbes qui se coupent en ce point.

L'analyse permet de déterminer la direction des deux éléments d'intégrales qui partent du point P. Tout élément d'intégrale satisfait aux deux équations :

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dy'}dy' = 0. \qquad (7)$$

$$dy = y'dx.$$

La courbe des éléments horizontaux des intégrales de l'espace a pour équation :

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}y' = 0. \qquad (3)$$

On obtient cette équation en passant $dy' = 0$ dans l'équation (7) ; mais nous l'avions déjà obtenue sous une autre forme et d'une autre manière.

La courbe des éléments verticaux des intégrales de l'espace a pour équation :

$$\frac{dF}{dy'} = 0. \qquad (4$$

Au point P, les équations (3) et (4) sont satisfaites, donc on a :

$$dy' = \frac{0}{0}.$$

Pour faire disparaître cette indétermination, prenons la différentielle de l'équation (7), on obtient la formule symbolique :

$$\left(\frac{d}{dx}dx + \frac{d}{dy}dy + \frac{d}{dz}dz\right)^2 F + \frac{dF}{dy}d^2y = 0. \quad (8)$$

En remplaçant d^2y par dy', dx, on obtient une équation du second degré en dy' ; les deux valeurs de dy' déterminent les deux directions cherchées.

Dans la figure 298, nous avons supposé que la courbe des inflexions s'appuyait sur les courbes isoclines en des points plus éloignés du point P que les points M et N où ces courbes isoclines touchent leur enveloppe ; dans la figure 299, nous avons choisi la disposition contraire. On peut trouver alors, en traçant l'intégrale près du point P, une courbe ABCDEFGHKLM qui s'approche indéfiniment du point P en sautant de droite à gauche et de gauche à droite et en présentant une infinité de rebroussements.

Cette singularité se reconnaît beaucoup mieux en utilisant l'intégrale de l'espace ; soient : A'C', le contour apparent représenté en élévation ; D'B', la courbe des éléments horizontaux, courbe qui a pour projection la courbe des inflexions; on part du point A' par un élément vertical ; en B' l'élément est horizontal ; en C', il redevient vertical et ainsi de suite ; on trouve une sorte de spirale tournant asymptotiquement autour du point P. En projection, les éléments verticaux deviennent des points de rebroussement, les éléments horizontaux deviennent des points d'inflexion, on retrouve la

courbe annoncée. Puisque l'intégrale s'approche indéfiniment du point P′ sans l'atteindre, il faut en conclure que si l'on se place au point P′, il sera impossible de sortir de cette position. L'équation (8) donnera donc deux valeurs imaginaires de dy'.

D'autres dispositions peuvent se présenter près du point P; nous les rencontrerons plus loin.

729. Solution singulière. — On obtient la courbe des inflexions en cherchant les éléments des courbes isoclines qui satisfont à l'équation différentielle, c'est-à-dire en menant aux courbes 1, 2, 3 des tangentes parallèles aux directions 01, 02, 03 du diagramme des inclinaisons. Nous avons supposé jusque maintenant que la courbe des inflexions différaient de l'enveloppe des courbes isoclines ; il nous reste à examiner le cas où ces courbes coïncident. Tous les points de la courbe-enveloppe se trouvent alors dans les conditions du point P dont il a été question au numéro précédent ; la différentielle dy' n'est ni nulle ni infinie, elle est indéterminée ; tout ce que nous avons dit de la courbe des inflexions et de la courbe des rebroussements ne s'applique pas ici ; il faut recommencer l'étude des intégrales dans les environs de la courbe-enveloppe.

Soient : (fig. 300) KAH l'enveloppe des courbes isoclines ; 1, 2, 3 ces courbes isoclines. Si nous partons du point A, nous devons tracer un arc AB de la courbe 2 à la courbe 3 ; cet arc a même courbure totale que l'arc AH. On trouve la solution AB. On pourrait chercher une solution AB′ qui s'appuierait sur la courbe 3 au-delà du point H, mais cette solution serait impossible, car l'intégrale AB′ aurait une courbure plus faible que l'enveloppe AH, ce qui est absurde. Mais en partant du point A on peut suivre l'enveloppe AH qui est évidemment une solution puisque par hypothèse l'enveloppe est formée des éléments des courbes isoclines qui satisfont à l'équation différentielle. On trouve donc des intégrales particulières ayant pour enveloppe une solution qui se confond avec l'enveloppe des courbes isoclines. Si l'on part

d'un point quelconque B, on trouve deux ou plusieurs intégrales particulières ; si le point B se rapproche du point A, deux de ces intégrales coïncident ; mais alors apparaît la solution KAH ; cette solution n'est donc pas comprise dans l'intégrale générale ; c'est la solution singulière.

Considérons les intégrales de l'espace ; nous avons dit que par tout point de la surface des inclinaisons passe une intégrale et une seule ; mais en nous exprimant ainsi, nous avons exclu le cas où le plan projetant l'élément de l'intégrale est tangent à la surface, car alors on se trouve dans les conditions du point P du numéro précédent ; le plan projetant coupe la surface suivant une courbe qui présente un point multiple au point de contact ; il faut alors recourir à l'équation (8) qui donne deux valeurs de dy'. Ces circonstances se produisent ici tout le long du contour apparent ; mais l'une des solutions est le contour apparent lui-même. Si on exclut cette solution, on peut dire encore que par tout point de la surface des inclinaisons passe une intégrale et une seule ; toutes ces intégrales couvrent la surface des inclinaisons sans se rencontrer ; ce sont les intégrales particulières. Mais il se fait qu'il existe une courbe coupant ces intégrales particulières, et qui n'est solution que parce qu'elle suit le contour apparent ; c'est la solution singulière.

Nous avons dit qu'en menant, à la surface des inclinaisons, des plans tangents verticaux, on trouve quelquefois une courbe qui n'est pas contour apparent ; si cette courbe est solution, c'est une solution singulière. On trouve alors, en projection, une solution singulière qui est touchée et traversée par les intégrales particulières ; ces points de contact sont des points d'inflexion ou de rebroussement.

Nous avons dit aussi qu'en menant les plans tangents verticaux, on peut trouver, pour courbe de contact, une courbe isocline. Cette courbe isocline ne sera solution que si elle est droite : c'est alors une solution singulière.

Remarquons aussi qu'il est difficile de prévoir tous les cas qui peuvent se présenter. On peut, en effet, donner à la surface des inclinaisons, les formes les plus étranges. On peut

même se donner arbitrairement les intégrales particulières, construire la surface des inclinaisons ou ce qui revient au même chercher l'équation différentielle. On peut donc réaliser toutes les dispositions imaginables.

Si l'on choisit pour la fonction F (x, y, y') une fonction analytique ordinaire, la surface des inclinaisons aura généralement un contour apparent qui ne coïncidera qu'exceptionnellement avec la courbe des inflexions ; on peut donc dire qu'en général les équations différentielles n'ont pas de solutions singulières ; les intersections successives des intégrales particulières ne déterminent pas une enveloppe, mais un lieu de points de rebroussements. Si, au contraire, on choisit arbitrairement une fonction analytique $f(x, y, C)$ et si on prend pour intégrale générale $f(x, y, C) = 0$, les intégrales particulières ont généralement une enveloppe ; il y a une solution singulière. La surface des inclinaisons déduite de l'équation $f(x, y, C) = 0$ présente donc généralement la particularité d'avoir un contour apparent qui soit solution ; tandis que si on se donne arbitrairement F (x, y, y'), cette particularité est exceptionnelle.

723. Exemple. — Dans la figure 300 nous avons pris pour intégrales des cercles de rayon r touchant intérieurement un cercle de rayon R ; on obtient pour courbes isoclines des cercles de rayon $r' = R - r$. En effet, les éléments d'intégrales qui ont l'inclinaison α s'obtiennent en menant les rayons r perpendiculaires à la direction α ; le lieu des extrémités de ces rayons est une circonférence égale à la circonférence des centres des intégrales. Il y a réciprocité, c'est-à-dire que les circonférences de rayon r' deviennent les intégrales quand les courbes isoclines sont les circonférences de rayon r. Si l'on prend le centre de l'enveloppe comme origine, l'équation différentielle est :

$$\left(x + \frac{ry'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)^2 + \left(y - \frac{r}{\sqrt{1+y'^2}}\right)^2 = r'^2.$$

L'intégrale générale est :

$$\left(x + \frac{r'c}{\sqrt{1+c^2}}\right)^2 + \left(y - \frac{r'}{\sqrt{1+c^2}}\right)^2 = r'^2.$$

La solution singulière est :

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Extension. — Prenons pour intégrales les positions d'une courbe invariable A à laquelle on donne un mouvement de translation qui fait décrire, à tous les points de cette courbe, des trajectoires B égales et parallèles. Les courbes B sont évidemment les courbes isoclines, car les éléments des intégrales restent parallèles à eux-mêmes pendant leur transport. Si on prend les courbes B comme intégrales, les courbes isoclines sont les courbes A. L'enveloppe commune des courbes A et B est la solution singulière. L'équation différentielle est

$$F[x - \varphi(y'), \quad y - \psi(y')] = 0.$$

Les fonctions φ et ψ satisfont à l'équation

$$y' = \frac{\psi'(y')}{\varphi'(y')}.$$

L'intégrale générale s'obtient en éliminant y' entre les équations :

$$x = x_0 + \varphi(y'),$$
$$y = y_0 + \psi(y').$$

et en assujettissant le point x_0, y_0 à se trouver sur la courbe $F(x_0, y_0) = 0$.

§ 2. Cas où les lignes isoclines sont droites.

794. Droites convergentes. — Supposons que les lignes isoclines soient droites et passent par un point fixe ; l'équation d'une ligne isocline peut se mettre sous la forme $u = vm$; u et v étant des fonctions entières du premier degré en x et y ; m une fonction de y'. L'équation différentielle est donc de la forme :

$$F\left(\frac{u}{v}, y'\right) = 0.$$

Si nous prenons u et v comme nouvelles variables, cette équation devient :

$$\varphi\left(\frac{u}{v}, \frac{du}{dv}\right) = 0.$$

Reprenons les notations x, y pour les variables, F pour la fonction ; nous avons à étudier l'équation

$$F\left(\frac{y}{x}, y'\right) = 0. \qquad (1)$$

C'est la forme générale des équations homogènes en x et y.
Si on fait $y' = \alpha$, on trouve pour ligne isocline :

$$F\left(\frac{y}{x}, \alpha\right) = 0 \text{ ou } y = x\varphi(\alpha). \qquad (2)$$

Réciproquement, soit $y = tx$ une ligne isocline ; on tire de l'équation (1) :

$$y' = \psi(t). \qquad (3)$$

Les fonctions φ et ψ peuvent avoir plusieurs valeurs pour une valeur de la variable α ou t.

Les intégrales sont des courbes homothétiques ; l'origine est le centre d'homothétie. En effet, si l'on trace une intégrale et si l'on construit des courbes homothétiques en prenant l'origine pour centre, il est évident que toutes ces courbes satisferont à l'équation différentielle ; car en passant d'un point de l'intégrale aux homologues de ce point, $y : x$ et y' ne varient pas et l'équation différentielle continue à être satisfaite.

725. Point asymptotique. — Supposons (fig. 301) qu'en faisant varier α par tous les états de grandeur, on trouve que la ligne isocline tourne autour de l'origine en prenant toutes les directions imaginables ; supposons que toutes ces lignes isoclines soient coupées par les éléments d'intégrales. Si on part d'un point quelconque A, on trouvera une intégrale ABCD tournant autour de l'origine ; elle ne sera fermée qu'exceptionnellement. Suivons l'intégrale dans un sens tel qu'après une spire on se rapproche de l'origine ; on

trouve une infinité de spires semblables ; l'intégrale se rapproche indéfiniment de l'origine sans pouvoir jamais l'atteindre.

726. Droite solution. — Si le long d'une ligne isocline, l'élément d'intégrale est dirigé suivant cette ligne, cette ligne est évidemment une droite solution. Nous obtiendrons les droites solutions en posant dans l'équation (1), (2) ou (3) $y = \theta x$ et $y' = \theta$; on trouve :

$$F(\theta, \theta) = 0, \qquad \theta = \varphi(\theta), \qquad \theta = \psi(\theta). \qquad (4)$$

Étudions les intégrales dans les environs d'une de ces droites ; pour y arriver, faisons converger la variable t vers la valeur θ qui satisfait aux équations (4). L'élément d'intégrale peut prendre trois positions que nous allons examiner successivement.

1° L'intégrale AE (fig. 302) se rapproche de la droite solution OB et s'éloigne de l'origine. Soit u l'angle infiniment petit qui fait l'élément d'intégrale avec la ligne isocline OA : on a, dans le triangle AOB,

$$AB : OB = \sin AOB : \sin u.$$

Nous verrons qu'en général, les angles u et AOB sont du même ordre ; le rapport AB : OB est donc fini ; cela n'est possible que si la courbe intégrale ne touche la droite OB qu'à l'infini ; donc la droite solution est une asymptote des intégrales particulières. Soit DE une intégrale, construisons une autre intégrale en prenant un rapport de similitude infiniment petit ; nous obtiendrons comme limite, la droite OB ; donc la droite solution est une intégrale particulière.

2° L'intégrale DE (fig. 303) se rapproche de la droite solution OA et de l'origine O. On démontre comme précédemment que le rapport DE : OE est fini ; cela n'est possible que si la courbe touche la droite OE à l'origine. Si on construit une autre intégrale semblable en prenant un rapport de similitude infiniment grand on trouve OA comme courbe limite, la droite solution est donc une intégrale particulière.

3° L'intégrale EF (fig. 304) s'éloigne de la droite solution OA et de l'origine O. On trouve évidemment une branche infinie; la tangente à l'infini est parallèle à OA. En prenant un rapport de similitude infiniment petit, on trouve que la droite solution OA est une solution particulière.

Vérifions que l'angle u est du premier ordre quand on prend $t - \theta = h$ comme infiniment petit principal. On a :

$$\operatorname{tang} u = \frac{t - y'}{1 + y't}. \qquad (5)$$

Posons $t = \theta + h$ et développons $t - y'$ par la formule de Taylor ; on a :

$$t - y' = h\,[1 - \psi'(\theta)] - \frac{h^2}{1.2}\,\psi''(\theta) + \ldots \qquad (6)$$

Ces deux équations prouvent que u est en général du premier ordre. Il y a cependant deux exceptions :

1° Si $\psi'(\theta) = \infty$, le développement n'est pas applicable ;

2° Si $\psi'\theta = 1$, on a :

$$t - y' = -\frac{h^2}{12}\,\psi''\theta + \ldots$$

Nous examinerons la première exception au numéro 729 ; quant à la seconde, on reconnaît facilement que si u est du second ordre ou d'ordre plus élevé, les raisonnements précédents sont encore applicables ; seulement on trouve que, dans le cas de la figure 303, la courbe OD a, avec la droite solution, un contact comparable à celui de la courbe $y = x : \log x$, avec l'axe OX.

On reconnaît analytiquement si la droite solution se trouve dans l'un ou l'autre cas en calculant $\psi'(\theta)$. La droite solution est asymptote (fig. 302) si dy' est de signe contraire à $d\theta$, donc si $\psi'(\theta)$ est négatif. On se trouve dans le cas de la droite OA (fig. 304) si dy' est de même signe, mais moindre que dt, c'est-à-dire si $\psi\theta > 0$ mais < 1. Enfin la droite solution est tangente à l'origine si $\psi'(\theta) > 1$.

727. Inflexions. — Les points d'inflexion s'obtiennent en posant $dy' = 0$ dans l'équation différentielle

$$\frac{dF}{dt}\,dt + \frac{dF}{dy'}\,dy' = 0. \qquad (7)$$

On trouve les deux équations :

$$dt = 0. \qquad (8)$$

$$\frac{dF}{dt} : \frac{dF}{dy'} = 0. \qquad (9)$$

L'équation (8) n'est satisfaite que pour les droites solutions ; on retrouve aussi les droites solutions en appliquant la construction générale de la courbe des inflexions.

L'équation (9) jointe à l'équation (1) détermine certaines lignes isoclines qui sont coupées par les éléments infléchis des intégrales.

728. Rebroussements. — Les courbes isoclines n'ont pas d'enveloppe ; mais une ligne isocline OA (fig. 305) peut former contour apparent ; les intégrales présentent des points de rebroussement situés sur cette ligne. On obtient les droites de rebroussement en considérant y' comme variable et en cherchant les maxima et les minima de t. On arrive au même résultat en menant les plans verticaux tangents à la surface des inclinaisons ; on pose alors $dy' = \infty$ dans l'équation (7) ; on trouve :

$$\frac{dF}{dy'} : \frac{dF}{dt} = 0. \qquad (10)$$

Les équations (10) et (1) déterminent les valeurs de t et de y' le long des droites de rebroussement. Toutefois, il faut encore vérifier que les droites que l'on obtient ainsi forment contour apparent ou, ce qui revient au même, que t passe par un maximum ou un minimum ; sinon les rebroussements n'existeraient pas ; il y aurait seulement une courbure infinie.

729. Solutions singulières. — Nous savons qu'il n'y a une solution singulière, que si la courbe de contact des

plans verticaux tangents à la surface des inclinaisons est précisément une solution. Cette courbe de contact est ici formée des droites qui satisfont aux équations (10) et (1); si ces droites sont solutions, ce sont les solutions singulières.

En général, ces droites forment contour apparent; on trouve alors des intégrales CAB (fig. 306) enveloppées par ces droites. Si l'une de ces droites OA ne faisait pas contour apparent, chaque intégrale la traverserait soit par un point de rebroussement CAB', soit par un point d'inflexion BAB'.

Il faut remarquer que l'équation (10) revient à

$$\frac{dy'}{dt} = \infty \quad \text{ou} \quad \psi'(t) = \infty.$$

La solution singulière est donc la droite solution pour laquelle le développement de l'équation (7) ne peut se faire.

730. Faisceaux homographiques. — Les lignes isoclines forment un système de droites; les rayons du diagramme des inclinaisons forment un autre système; supposons que ces deux faisceaux soient homographiques, c'est-à-dire que l'équation différentielle soit de la forme:

$$ay't + by' + ct + d = 0. \qquad (11)$$

Les droites solutions s'obtiennent en posant $y' = t = \theta$; on trouve l'équation:

$$a\theta^2 + (b + c)\theta + d = 0.$$

Si on suppose que les deux faisceaux aient même sommet, les droites solutions sont les droites doubles de ces faiceaux. Il peut y avoir deux droites solutions, une seule, ou aucune selon que les racines de l'équation en θ sont réelles, égales ou imaginaires.

Premier cas. — Les racines sont imaginaires. Dans ce cas, il n'y a pas de droites solutions; on trouve que l'origine est un point asymptotique et que l'intégrale a la forme de la courbe ABCD B'C'D'... de la figure 301.

Deuxième cas. — Soient (fig 302) OB et OF les deux droites doubles. Les deux faisceaux homographiques seront com-

plètement déterminés si l'on donne en outre une droite isocline telle que OD et la direction des éléments d'intégrale sur cette droite. Menons une droite CD parallèle à OF ; soit DS la direction de l'intégrale sur la droite OD ; on obtiendra la direction HS de l'intégrale sur une droite quelconque OH, en joignant le point fixe S au point H où la droite donnée OH rencontre la droite fixe CD. En effet, les droites OH et HS que l'on obtient en déplaçant le point H sur la droite CD forment deux systèmes homographiques. Ces deux systèmes sont précisément ceux qui sont déterminés par l'équation différentielle, car les droites doubles et les deux droites OD, DS ont les directions qu'elles doivent avoir.

On reconnaît immédiatement que l'intégrale a pour asymptotes les deux droites solutions et a la forme d'une hyperbole. Les droites OB et OF prolongées divisent le plan en quatre angles; dans chacun de ces angles, on trouve des branches d'intégrales de forme hyperbolique. Les branches situées dans deux angles opposés sont homothétiques inverses. Au point de vue analytique les branches situées dans deux angles adjacents sont aussi homothétiques, mais le rapport de similitude est imaginaire : cette propriété ne peut se démontrer que par l'analyse.

Troisième cas. — Nous avons supposé que la droite CD passe entre les sommets O et S des deux faisceaux.

Dans la figure 304, OA et OB sont les droites doubles; CD est une parallèle à OA; la direction SD correspond à la droite OD ; la droite CD passe à l'extérieur de la droite OS. On trouve alors une branche OEF tangente à la droite OB et présentant à l'infini un élément parallèle à la droite OA. On trouve une autre branche d'intégrale en construisant une courbe OE_1 homothétique inverse de l'intégrale OE par rapport au centre O. On trouve dans les deux autres angles des branches OH et OH'.

Quatrième cas. — Supposons qu'il n'y ait qu'une droite solution ; dans la figure 304 la droite OB vient se coucher sur OA ; les courbes E'OF disparaissent ; la branche OH prend la

forme OK. On peut aussi traiter ce cas directement. Menons une droite CD parallèle à la droite OA, qui est deux fois solution ; supposons que sur la droite OD, la direction de l'intégrale soit DS'. Les faisceaux ayant pour sommet O et S' et se coupant sur la droite CD sont précisément ceux qui sont déterminés par l'équation différentielle, car trois groupes de droites conviennent savoir les deux groupes de droites doubles et le groupe OD, S'D.

Théorème. — Considérons la figure formée par les lignes isoclines et les intégrales d'une équation différentielle de la forme (11). Projetons cette figure sur un plan quelconque orthogonalement ou obliquement. Nous obtiendrons une nouvelle figure qui satisfera à une équation différentielle de même forme. Les projections des droites solutions sont les nouvelles droites solutions.

En effet, les éléments d'intégrales qui sont parallèles ont des projections parallèles ; donc en projection, les lignes isoclines forment encore un système de droites convergentes. La relation entre les variables t et y' de la figure projetée a la forme :

$$a'ty' + b't + c'y' + d' = 0,$$

car cette relation est évidemment algébrique et à chaque valeur de l'une des variables correspond une valeur unique de l'autre variable.

Appliquons ce théorème au cas où les droites solutions sont imaginaires (fig. 301). Prenons le point O pour sommet commun des deux faisceaux ; une droite quelconque LM est coupée par ces deux faisceaux ; les points d'intersection forment deux systèmes de points homographiques ; comme les points doubles sont imaginaires, on peut obtenir ces deux systèmes en faisant tourner un angle constant LO'M autour d'un certain point fixe O'. Supposons que les faisceaux O'L, O'M soient tracés dans un plan P faisant avec la figure un certain angle, on peut considérer les faisceaux OL, OM comme les projections des faisceaux O'L, O'M. Ces derniers se rapportent à une certaine équation différentielle ; les inté-

grales de cette dernière font avec les lignes isoclines un angle constant ; ce sont donc des spirales logarithmiques ; on peut donc dire : quand les droites solutions sont imaginaires, les intégrales de l'équation (11) sont les projections de spirales logarithmiques.

Lorsque les droites solutions existent, on peut ramener le cas général au cas où les droites solutions sont rectangulaires.

Si on rapporte les intégrales aux droites doubles prises pour axes coordonnés obliques, on trouve que l'équation différentielle prend la forme $y' = -at$; les intégrales ont pour équation $yx^{-a} = c$. Ce sont des hyperboles ou des paraboles selon le signe de a.

Quand il n'y a qu'une droite solution, on la prend pour axe des x, l'intégrale générale est $bx = y\,(C - \log y)$.

Discussion analytique. — On peut par l'analyse déterminer le genre des intégrales d'une équation donnée de la forme (11). Les racines θ, θ' de l'équation en θ sont comprises dans la formule :

$$\theta = \frac{-(b+c) \pm \sqrt{(b-c)^2 - 4(ad-bc)}}{2a}. \qquad (12)$$

De l'équation (11), on tire :

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{ad-bc}{(at+b)^2}.$$

On déduit de là :

$$\psi'(\theta) = \frac{ad-bc}{(a\theta+b)^2}, \qquad (13)$$

$$\psi'(\theta') = \frac{ad-bc}{(a\theta'+b)^2}, \qquad (14)$$

$$\psi'(\theta) \times \psi'(\theta') = 1. \qquad (15)$$

L'origine est un point asymptotique, si les racines de θ sont imaginaires, c'est-à-dire si

$$ad - bc > \left(\frac{b-c}{2}\right)^2. \qquad (16)$$

Les intégrales sont du genre hyperbole, si

$$ad - bc < 0,$$

car on voit par la formule (12) que les racines de θ sont réelles, et par les formules (13) et (14) que les dérivées $\psi'(\theta)$ et $\psi'(\theta')$ sont négatives.

Les intégrales sont du genre parabole si l'on a :

$$\left(\frac{b-c}{2}\right)^2 > ad - bc > 0,$$

car les racines sont réelles ; les dérivées $\psi'(\theta)$ et $\psi'(\theta')$ sont négatives ; et d'après l'équation (15) l'une de ces dérivées est plus petite que un, l'autre plus grande.

Les intégrales sont des courbes logarithmiques si l'on a :

$$ad - bc = \left(\frac{b-c}{2}\right)^2.$$

On a alors $\theta = \theta'$; l'équation (15) donne $\psi'(\theta) = \psi'(\theta') = 1$; c'est le cas où l'angle u est du second ordre.

Nous avons laissé de côté le cas ou $ad - bc = 0$; alors l'équation (12) se divise en deux : $at + b = 0$, $y' + \frac{c}{a} = 0$. Les lignes isoclines ne sont plus des droites convergentes.

781. Système quelconque de droites isoclines. — Les lignes isoclines forment un système de droites, si l'équation différentielle est de la forme :

$$Ay + Bx + C = 0. \qquad (12)$$

A, B, C étant des fonctions de y'. En général, les lignes isoclines enveloppent une certaine courbe. Les droites solutions s'obtiennent en posant :

$$y' = -\frac{B}{A}. \qquad (13)$$

L'équation (13) détermine les valeurs de y' ; l'équation (12) donne alors les droites solutions.

L'enveloppe des lignes isoclines est en général la courbe des rebroussements ; il faut quelquefois y ajouter certaines lignes isoclines qui forment contour apparent ; les tangentes

aux points d'inflexion de l'enveloppe possédant cette propriété.

L'enveloppe des lignes isoclines est solution singulière quand tous ses éléments satisfont à l'équation différentielle ; mais alors toutes les lignes isoclines sont des droites solutions; l'équation (13) est donc une identité et l'on peut mettre l'équation différentielle sous la forme :

$$y = y'x - \frac{C}{A}, \qquad (14)$$

C'est l'équation de Clairaut.

Si l'enveloppe n'est pas solution, il ne peut y avoir de solutions singulières que s'il existe des droites solutions le long desquelles les plans tangents à la surface des inclinaisons sont verticaux. Il faut pour cela que l'on puisse satisfaire à la fois aux équations 12, 13 et à l'équation :

$$dy' = \infty$$

ou

$$y\frac{dA}{dy'} + x\frac{dB}{dy'} + \frac{dC}{dy'} = 0, \qquad (15)$$

§ 3. Foyers des courbes isoclines.

739. Environs d'un foyer. — Les lignes isoclines peuvent passer par un même point ; ce point est un foyer. Pour étudier les intégrales dans les environs de ce point, nous remplacerons les lignes isoclines par leurs tangentes ; nous serons ramené au cas d'un système de droites convergentes.

Supposons, par exemple, que l'équation différentielle ait la forme :

$$\varphi(x, y) + y'\psi(x, y) = 0. \qquad (1)$$

On obtient les courbes isoclines en considérant y' comme constant ; l'équation (1) représente alors une série de courbes qui passent par les points d'intersection des courbes :

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad \psi(x, y) = 0. \qquad (2)$$

Soient : a, b les coordonnées d'un de ces points ; transportons l'origine en ce point ; appliquons le développement de Taylor et négligeons les termes de degré supérieur au premier ; l'équation (1) prend la forme :

$$x\frac{d\varphi}{da}+y\frac{d\varphi}{db}+y'\left(x\frac{d\psi}{da}+y\frac{d\psi}{db}\right)=0. \qquad (3)$$

Les courbes isoclines sont alors remplacées par leurs tangentes ; l'équation (3) prouve que ces tangentes forment un faisceau homographique du faisceau des éléments d'intégrales. Dans les environs du foyer les intégrales auront donc l'une des quatre dispositions que nous avons étudiées au numéro 730. S'il n'y a pas d'élément solution passant par le foyer, les intégrales sont les projections de spirales logarithmiques ; le foyer est un point asymptotique. S'il y a deux ou un élément solution qui passe par le foyer, on aura les dispositions des figures 302 ou 304.

733. Application au point singulier du plan. — Reprenons l'étude des intégrales dans les environs du point singulier P où la courbe des inflexions touche l'enveloppe des courbes isoclines (fig. 299). Représentons la surface des inclinaisons et les intégrales de l'espace par une élévation faite sur un plan vertical parallèle à l'axe des x. Les intégrales de l'espace ont pour équation différentielle :

$$\frac{dF}{dx}+y'\frac{dF}{dy}+\frac{dy'}{dx}\cdot\frac{dF}{dy'}=0. \qquad (4)$$

Si dans cette équation, nous éliminons y au moyen de l'équation $F(x, y, y')=0$, nous obtenons l'équation différentielle des projections verticales des intégrales de l'espace. Cette équation contient les ordonnées x, y' de ces courbes ; la dérivée est au premier degré ; donc cette équation a la forme que nous venons d'étudier. Le foyer est précisément le point P', car les équations du foyer sont ici :

$$\frac{dF}{dx}+y'\frac{dF}{dy}=0,$$

$$\frac{dF}{dy'}=0.$$

La première est l'équation de la courbe des inflexions, la seconde est celle de l'enveloppe. Donc en considérant les lignes (x, y'), les lignes isoclines sont des courbes qui passent par le point P'. Remplaçons ces lignes par leurs tangentes au point P'; nous rencontrerons quatre dispositions. Les éléments solutions passant par le point P' nous sont déjà connus; ils sont donnés par l'équation 8 du numéro 721; on vérifierait par l'analyse que ces éléments sont bien les droites doubles du faisceau des tangentes aux lignes (x, y') et du faisceau des inclinaisons $dy' : dx$.

Si les éléments solutions sont imaginaires, les intégrales ont la forme de spirales; P' est un point asymptotique. C'est le cas de la figure 299. Connaissant la courbe (x, y'), on trouve l'intégrale (x, y) par une simple intégration. On trouve une intégrale ACEGK.

Si les éléments solutions existent, les intégrales (x, y') peuvent avoir la forme d'arcs d'hyperboles ayant le foyer pour centre et les éléments solutions pour asymptote; c'est le cas de la figure 298. Mais les deux cas de la figure 304 peuvent aussi se présenter; toutes les intégrales passent alors par le point singulier. Les unes E'OE ne donnent pas lieu à des rebroussements; les autres HOH' présentent des éléments verticaux qui deviennent en projection horizontale des points de rebroussement. Si les deux éléments solutions coïncident, alors toutes les intégrales présentent un rebroussement.

§ 4. Axes hydrauliques.

734. Équation différentielle. — Reprenons l'équation différentielle du mouvement permanent (711). Soient : i la pente du fond, h la profondeur de la section, l la largeur de cette section au niveau de l'eau. Remplaçons u par $q : \omega$; remarquons que ω, R, l sont des fonctions des variables h et s et que l'on a :

$$d\omega = l dh + \frac{d\omega}{ds},$$

$$dz = i ds - \sqrt{1 - i^2}, ds.$$

On trouve

$$i-\left(\alpha+\frac{\beta}{R}\right)\frac{q^2}{R\omega^2}+\frac{q^2}{g\omega^2}\frac{d\omega}{ds}=\frac{dh}{ds}\left(\sqrt{1-i^2}-\frac{q^2l}{g\omega^2}\right). \quad (1)$$

Cette équation est de la forme :

$$\varphi(s,h)=\frac{dh}{ds}\psi(s,h).$$

Les courbes isoclines n'ont pas d'enveloppes; mais elles passent par un ou plusieurs foyers.

On ne peut étudier l'équation (1) qu'en se donnant la forme du lit; nous choisirons l'une des formes les plus simples que l'on peut donner à un lit non prismatique; nous supposerons une section rectangulaire assez large pour pouvoir admettre les formules approchées :

$$\omega=lh, \qquad R=h.$$

Nous supposerons que la largeur l croît uniformément avec s, de sorte qu'en prenant une origine convenable on a : $l=as$. Enfin nous remplacerons le binome de Bazin par le monome bu^2 de Prony. Si nous posons alors :

$$\frac{dh}{ds}=\eta, \qquad \frac{q^2}{ga^2}=p^5,$$

l'équation (1) devient :

$$h^2s^5(i-\eta)=p^5[(gb-\eta)s-h]. \quad (2)$$

On obtient les courbes isoclines en considérant η comme une constante.

785. Foyer des courbes isoclines. — Nous déterminerons le foyer P (fig. 310) des courbes isoclines, par l'intersection de deux courbes isoclines ; nous choisirons :

$\eta=i$ qui donne $h=(gb-i)s$, (3)

$\eta=\infty$ qui donne $h^2s^5=p^5s$. (4)

En résolvant ces deux équations, on trouve :

$$s=p(gb-i)^{-\frac{3}{5}},$$

$$h=p(gb-i)^{\frac{2}{5}}.$$

Transportons l'origine des coordonnées au foyer P; soient x, y les nouvelles coordonnées ; l'équation (2) devient en négligeant les termes de degré supérieur au premier :

$$3\,h^2s^2\,(i-\eta)\,(hx+sy)=p^2\,[(gb-\eta)\,x-y].$$

En tenant compte des équations (3) et (4) et en posant $y=tx$, on trouve :

$$3\,\eta t+\eta\,(2\,gb-2\,i)-t\,(2\,i+gb)-(gb-i)\,(3\,i-gb). \quad (5)$$

Cette équation est de la forme :

$$at^3+bt^2+ct+d=0.$$

On a (730) :

$$ad-bc=5\,(gb-i)^2,$$

$$\theta=\frac{-gb+4\,i\pm\sqrt{9\,g^2b^2-20\,(gb-i)^2}}{6}.$$

La quantité sous le radical s'annule pour les deux valeurs :

$$i=gb\left(1\pm\sqrt{0{,}45}\right).$$

ou

$$i=0{,}33\,gb, \qquad i=1{,}67\,gb.$$

La valeur de $ad-bc$ prouve que le genre hyperbole ne se réalisera jamais dans les environs du foyer P ; mais selon la valeur de i, tous les autres genres se réaliseront. Dans les cas pratiques, on a toujours

$$i<0{,}33\,gb.$$

Les racines de θ sont imaginaires ; le foyer P est un point asymptotique. Pour $i>0{,}33\,gb$, les axes hydrauliques passent par le foyer, en touchant l'un des éléments solutions. Pour $i=gb$, le foyer se transporte à l'infini ; pour $i>gb$, l'abscisse du foyer devient négative ; cela revient à dire qu'il n'y a plus de foyer dans la partie du plan où il est utile d'étudier les intégrales.

L'origine des axes coordonnés est aussi un foyer ; dans les environs de l'origine, l'équation (2) devient :

$$(gb-\eta)\,s-h=0,$$

ou en posant $h = ts$,

$$\eta + t - gb = 0.$$

Les droites solutions sont :

$$\theta = \infty, \qquad \theta = \frac{gb}{2};$$

on a :

$$ad - bc = -1.$$

Les intégrales sont du genre hyperbole. Remarquons que l'origine est le point où la largeur est nulle ; on ne pourra jamais réaliser pratiquement, dans les environs de l'origine, les courbes que nous étudions, car l'équation différentielle suppose une grande largeur.

736. Construction des courbes isoclines. — Construisons la courbe :

$$y^5 x^3 = x - y. \qquad (6)$$

Nous obtiendrons toutes les courbes isoclines par la transformation :

$$h = ny, \qquad s = mx,$$

n, m étant des coefficients qui dépendent de l'inclinaison η ; en effet, on obtient par cette transformation la courbe :

$$\frac{h^5 s^3}{n^5 m^3} = \frac{h}{n} - \frac{s}{m}.$$

En identifiant cette équation avec l'équation (2), on trouve :

$$m = p\,(1-\eta)^{-\frac{1}{5}}(gb-\eta)^{-\frac{2}{5}} \qquad (7)$$

$$n = p\,(t-\eta)^{-\frac{1}{5}}(gb-\eta)^{\frac{3}{5}}. \qquad (8)$$

Pour construire la courbe (6), posons :

$$2yx = X^2, \qquad x - y = -Y. \qquad (9)$$

Il vient $X^4 = -8Y$. Construisons d'abord la courbe (X, Y) qui est une parabole OA (fig. 307). Pour passer d'un point

(X, Y) à un point (x, y), remarquons que des équations (9), on tire :

$$x^2 + y^2 = X^2 + Y^2,$$
$$y = x + Y.$$

Soit A un point (X, Y) ; le point (x, y) se trouve sur le cercle de rayon OA, et sur la droite BC parallèle à la bissectrice de l'angle des axes coordonnés ; on trouve deux points symétriquement placés par rapport à la seconde bissectrice des axes coordonnés. Si on détermine la tangente au point A, on peut en déduire la tangente à la transformée (x, y) par la construction suivante :

Soit : (fig. 308) A'H' une longueur finie représentant la longueur dy = AH à une échelle infiniment grande ; le triangle AHD est représenté par A'HD'. Si on fait tourner AD autour du point O, AD vient se placer en CF ; la figure CNFE est représentée par A'H'F'E' ; on obtient cette dernière en menant H'E' parallèlement à BC ou NE ; en portant : A'F' = A'D', angle D'A'F' = AOC et en menant F'E' perpendiculaire à OC.

La transformation que nous venons d'appliquer ne donne pas les points de la courbe ((x, y) pour lesquelles x et y sont de signe contraire. Pour ces points, on doit poser :

$$2xy = -X^2,$$
$$x - y = Y.$$

On en tire :

$$X^6 = -8Y,$$
$$x^2 + y^2 = Y^2 - X^2,$$
$$y = x - Y.$$

Par un point P de la parabole (Y, X), on trouve deux points S, T de la courbe (x, y) en traçant la droite $y = x - Y$ et le cercle $x^2 + y^2 = Y^2 - X^2$.

Connaissant un nombre suffisant de points de la courbe (x, y), on trouve facilement les coordonnées (h, s) de tous les points correspondants des courbes isoclines. Portons sur un axe horizontal les abscisses x_0, x_1, x_2 des points de la

courbe (x, y) ; joignons les points de cet axe horizontal à un sommet S situé à une distance quelconque d de l'axe. Donnons à l'inclinaison η différentes valeurs ; le coefficient m prend des valeurs m_0, m_1,... ; menons des horizontales distantes du sommet S de $m_0 d$, $m_1 d$, etc..., sur chaque horizontale on trouve les abscisses d'une courbe isocline. On obtient les ordonnées par un faisceau analogue.

Ce tracé graphique pourrait nous dispenser de toute discussion. Néanmoins montrons (fig. 310) comment sont disposées les courbes isoclines, lorsque la pente du fond n'est pas exagérée ($i < 0{,}33\,gb_1$).

1° η varie de 0 à i. Les équations (7) et (8) prouvent que les coefficients m et n augmentent. Cela est évident pour m ; pour n, on le reconnaît en prenant la dérivée logarithmique ; on trouve une dérivée positive :

$$\frac{1}{n}\frac{dn}{d\eta} = \frac{2\eta + (gb - 3i)}{5(i-\eta)(gb-\eta)}.$$

Pour $\eta = i$, m et n deviennent infinis ; nous savons déjà que la courbe isocline est une droite dont l'équation est l'équation (3). En faisant varier η de o à i, on trouve donc les courbes PH, PF, PF', PF'' et PA.

2° η varie de i à gb. Les valeurs de m et de n changent de signe ; on trouvera des valeurs positives de h et s, en prenant des valeurs négatives de y et de x. C'est donc la courbe OC' de la figure 307 qu'il faut transformer ; on trouve une courbe EE. Pour $\eta = i$, cette courbe EE se rapproche de la droite OA. Si η croît de i à gb, on reconnaît que m croît en valeur absolue, mais n décroît ; on trouve des courbes telles que E'E', E''E''. Pour $\eta = gb$, on a $n = 0$, $m = \infty$; la transformation n'est plus possible ; l'équation (2) donne :

$$h = 0, \tag{10}$$

et

$$h^2 s^5 = \frac{p^5}{gb - i}. \tag{11}$$

La courbe se scinde en deux, GG qui est du genre hyperbole, et l'axe $h = 0$. Les courbes du genre E' et E'' couvrent

la portion du plan comprise entre l'hyperbole GG et son asymptote Os.

3° η varie de gb à ∞. La valeur de m reste négative; celle de n devient positive. Nous obtiendrons des valeurs positives de h et s en prenant y positif et x négatif; c'est donc la courbe ST de la figure 307 qu'il faut transformer; nous trouverons des courbes ayant la forme d'une hyperbole asymptote aux axes $h = 0$, $s = 0$. Pour $\eta = \infty$, l'équation (2) devient l'équation (4); on trouve la courbe K. Entre la courbe K et la courbe GG se trouvent les courbes pour les valeurs η variant de gb à ∞. La courbe K est le lieu des éléments normaux au fond du lit; elle correspond à $\eta = \pm \infty$.

4° η varie de $-\infty$ à 0. Les valeurs de m et de n redeviennent positives; on trouve des courbes H', H'', H''' du genre de la courbe H. Si η tend vers $-\infty$, la courbe H''' se scinde en deux : $s = 0$, et la courbe K.

Courbe des inclinaisons. — Si on mène aux courbes isoclines les éléments d'intégrales qui les touchent, on trouve une courbe BCD et une courbe C'D'; ce sont les lieux des points d'inflexion. La courbe C'D' passe par l'origine.

737. Tracé des axes hydrauliques. — Nous trouvons des axes A_1 situés entre le fond du lit et la droite K; ces axes présentent sur la droite K un élément vertical; on ne pourrait réaliser ces axes qu'en établissant à l'amont un appareil pour créer de la vitesse; ces axes sont susceptibles de se relever en ressaut et peuvent être suivis d'un des axes que nous allons étudier.

Au-dessus de la droite K existent des axes A_2, convexes vers le haut, ou des axes A_3, présentant une partie concave séparée des parties convexes par deux points d'inflexion. Entre les axes A_2 et A_3 se trouve un axe intermédiaire qui qui présente en C trois éléments en ligne droite.

Les axes situés au-dessus de la courbe H, ont la forme A_3; h croît indéfiniment, mais alors $\frac{dh}{ds}$ tend vers la valeur i; ces axes présentent une pente indefiniment décroissante et ont des asymptotes horizontales. Ces axes sont concaves vers le

haut, mais ils deviennent convexes en amont de la courbe BC. Entre les axes A_1 et A_2, existe un axe limite A_4; on le déduit de l'axe A_3, en plaçant l'élément normal au fond, à l'infini, sur la courbe K; on l'obtient aussi en plaçant le point d'inflexion I à l'infini sur la courbe D. On le déduit de l'axe A_3 en plaçant l'élément L parallèle au fond à l'infini sur la courbe H. Cet axe se tourne donc entre les courbes H et D et rencontre ces courbes à l'infini. Il est concave vers le haut, sauf en amont de la courbe BC.

Tous ces axes hydrauliques présentent en s'aprochant du point P des formes étranges; ils tournent autour du point P s'approchant indéfiniment de ce point. Évidemment il n'est pas possible de réaliser ces formes bizarres; mais il faut remarquer que le point P se trouve près de l'origine et qu'à l'origine la largeur de la section est nulle; on trouve donc en s'approchant du point P des vitesses excessivement grandes, il faut un appareil pour créer ces vitesses; cet appareil remplace la partie de l'axe hydraulique qui est irréalisable. Il faut remarquer d'ailleurs que près du point P toutes les équations sont fausses: car le lit cesse d'être très large et l'on ne peut pas admettre $\chi = l$.

738. Autre construction des courbes isoclines. — On peut considérer l'ensemble des courbes isoclines comme un abaque des valeurs de h, s, η; les courbes des η sont les lignes isoclines. Nous allons construire un abaque où les trois systèmes de lignes soient droites; à cet effet, posons d'abord :

$$\frac{s}{h} = u.$$

L'équation (2) devient :

$$h^5 u^3 (i - \eta) = p^3 [(gb - \eta) u - 1].$$

Prenons deux axes coordonnés et posons :

$$y = h^5 (i - \eta),$$
$$x = (gb - \eta).$$

On trouve :

ligne des u, $\quad u^3 y = p^3 (ux - 1)$,

ligne des η, $\quad x = gb - \eta$,

ligne des h, $\quad y = h^3 (i - gb + x)$.

Construisons ces trois systèmes de droites ; nous obtiendrons l'abaque des u, η et h. Il s'agit alors de transformer ce tableau, de telle manière que les lignes des u deviennent $s = hu$, les lignes des h deviennent des droites $h = 1$, $h = 2$, etc.

On trace facilement les nouvelles lignes des h et des u ; on trace alors les nouvelles lignes des η de manière qu'elles soient situées dans les lignes nouvelles des u et des h, comme les anciennes. Le problème est résolu.

739. Lit prismatique. — Si le lit est prismatique, on doit faire dans l'équation (1).

$$\frac{d\omega}{ds} = 0.$$

On trouve :

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \left(\alpha + \frac{\beta}{R}\right)\frac{q^2}{R\omega^2}}{\sqrt{1 - i^2} - \frac{q^2 l}{g\omega^3}}. \qquad (12)$$

Si on suivait la méthode précédente, on trouverait $\eta = f(h)$; les lignes isoclines sont des droites parallèles ; mais si nous prenons h comme abscisse, on a :

$$ds = \frac{dh}{f(h)},$$

donc l'ordonnée s est une simple intégrale ; en traçant la courbe dérivée, on obtiendra immédiatement l'axe hydraulique par une intégration.

Posons :

$$s' = \frac{si}{\sqrt{1 - i^2}}, \tag{13}$$

$$\varphi(h) = \frac{Q^2}{Ri\omega^2}\left(\alpha + \frac{\beta}{R}\right), \tag{14}$$

$$\psi(h) = \frac{Q^2 l}{g\omega^2 \sqrt{1 - i^2}}. \tag{15}$$

L'équation (12) devient :

$$ds' = \frac{1 - \psi(h)}{1 - \varphi(h)}\, dh. \tag{16}$$

Cette transformation revient à représenter les longueurs s par des longueurs s' proportionnelles mais beaucoup plus petites ; c'est un changement d'échelle des s, analogue à ceux qui sont usités dans l'exécution des profils en long. L'élément horizontal de l'axe hydraulique satisfait aux équations :

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i}{\sqrt{1 - i^2}} \quad \text{ou} \quad \frac{dh}{ds'} = 1. \tag{17}$$

Nous avons (fig. 309) tracé l'axe os' de manière que les éléments horizontaux restent horizontaux après la transformation.

Considérons dans l'équation (16) ; h comme abscisse, s' comme ordonnée ; l'axe hydraulique est la courbe intégrale de la courbe :

$$y = \frac{1 - \psi(h)}{1 - \varphi(h)}. \tag{18}$$

Prenons pour construire la courbe des y, les axes $yo'h'$; construisons d'abord les courbes $y' = \psi(h)$, $y'' = \varphi(h)$. La courbe $y'' = \varphi(h)$ a la forme AB ; on reconnaît, en effet, que l'on a $\varphi(o) = \infty$ et que la fonction φ décroît constamment quand h augmente pour les formes ordinaires des sections. On trouve que la courbe $y' = \psi(h)$ a une forme analogue CD.

Mais la courbe CD est située sous la corde AB, car des équations (4) et (5) on tire :

$$\frac{\psi}{\varphi} = \frac{i}{\sqrt{1-i^2}} \frac{1}{g\left(\alpha + \frac{\beta}{R}\right)} \frac{l}{\chi}. \qquad (19)$$

Ce rapport reste plus petit que un pour les valeurs ordinaires de la pente i ; en effet, dans les conditions les plus défavorables à cette proposition, on aurait :

$$\frac{\beta}{R} = 0, \quad \frac{l}{\chi} = 1, \quad \frac{\psi}{\varphi} = \frac{i}{\sqrt{1-i^2}} \frac{1}{g\alpha}.$$

Or la pente i est toujours beaucoup plus petite que $g\alpha$. Portons $o'o'' = 1$; par rapport à l'axe $o''h''$ les courbes AB et CD représentent $1 - \varphi$ et $1 - \psi$; on trouve les y en divisant les ordonnées de la seconde par celles de la première ; on trouve la courbe O'KL EF. Si on intègre cette courbe on trouve MNP et QR ; par tout point passe un axe hydraulique que l'on déduit des axes MN, NP ou QR par l'addition d'une constante. La droite $h = O''H$ est une droite solution ; c'est la droite du mouvement uniforme.

Pour tracer graphiquement un axe hydraulique, il n'est pas nécessaire de construire les courbes dérivées ; il suffit de porter, pour des valeurs suffisamment rapprochées de h, l'échelle des valeurs des fonctions $1 - \psi$ et $1 - \varphi$ sur deux axes perpendiculaires ; en joignant les points correspondants de ces deux échelles, on obtient les directions des éléments des axes hydrauliques ; on intègre par approximation.

Connaissant la forme de la section, on trace la courbe des ω, des χ, des R ; on trouve le polynome $\left(\alpha + \frac{\beta}{R}\right)\frac{1}{R}$ par la méthode employée au numéro 702 ; on obtient ψ en multipliant deux fois par $\frac{q}{\omega}$; on obtient φ avec la même facilité.

740. Influence de la pente. — Si la pente du lit augmente, la courbe CD ne varie presque pas ; mais les ordonnées de la courbe AB diminuent.

Pour une certaine valeur de la pente, la courbe AB passera par le point I, c'est-à-dire que la longueur HI s'annulera. Pour une pente plus forte, le point H viendra se placer entre les points O'' et I ; les éléments parallèles au fond sont alors à une profondeur moindre que les éléments normaux au fond ; on a la disposition MP', Q'N'R'.

Lorsque le lit n'est pas prismatique, le nombre de dispositions est considérablement augmenté ; reprenons le cas du lit divergent vers l'aval. Si la pente augmente, les formules (3) et (4) montrent que le foyer P (fig. 310) s'éloigne de l'origine et arrive dans la partie utile du plan. Pour $i = \left(1 - \sqrt{0{,}45}\right) gb$, il y a un élément solution passant par le foyer ; cela prouve que la courbe des inflexions BCD passe par le foyer P. D'après la forme de la surface des inclinaisons, on peut prévoir que lorsque la ligne BCD atteint la verticale du foyer, elle présente sur cette verticale un élément vertical qui devient, en projection, un point de rebroussement. Si la pente augmente encore, il y a deux éléments solutions ; la courbe des inflexions dépasse la verticale P pour y revenir à un autre niveau ; en projection la courbe forme une boucle au-delà du point P ; le point P est un point multiple. Il faut remarquer qu'à l'aval du foyer les éléments normaux au fond du lit sont au-dessous des éléments parallèles, comme dans les lits prismatiques à pente modérée ; à l'amont du foyer, c'est l'inverse qui se présente. Si la pente devient égale à gb, on trouve que le foyer s'éloigne à l'infini ; les courbes isoclines ne se coupent plus ; les éléments normaux au fond du lit se trouvent au-dessus des éléments parallèles ; on a donc une disposition comparable à celle qui se présente dans les lits prismatiques à forte pente.

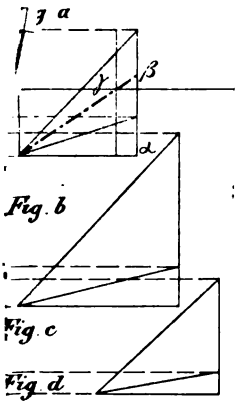


Fig. b

Fig. c

Fig. d

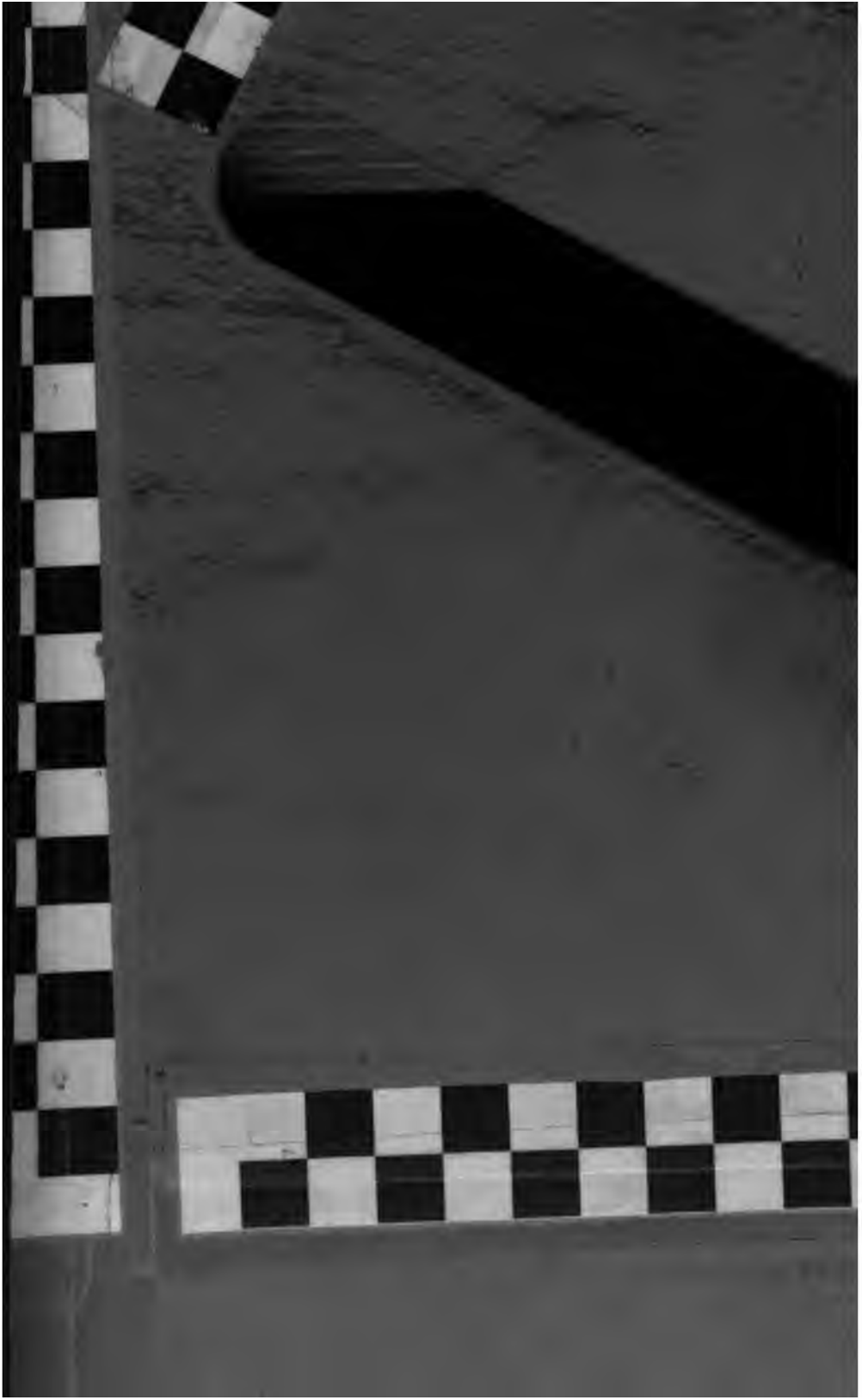
This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

FEB 17 '55 H

MAR 2 8 1968 ILL

1431530

CANCELLED